Programme de la colle 11

Semaine du 06/01/2025.

Démonstrations de cours d'algèbre linéaire :

1. Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Propriétés du sous-espace vectoriel engendré par une partie.
3. Pour deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on a : $F+G=F\oplus G \Longleftrightarrow F\cap G=\{0_E\}$.
4. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Théorème de la base adaptée.
6. La réciproque d'un isomorphisme est encore une application linéaire.
7. L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
8. Théorème de caractérisation les applications injectives et surjectives parmi les applications linéaires à l'aide de leur noyau et/ou image.
9. Si $E=E_1\oplus E_2$ et si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, alors : $p\in\mathscr{L}(E)$, $p^2=p$, $E_1=\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2=\mathrm{Ker}(p)$.
10. Soit $s:E\to E$. Alors : s est une symétrie, si et seulement si, (s est linéaire et $s^2=\mathrm{Id}_E$).
    Dans ce cas, $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

Attention : nous n'avons pas parlé de dimension.

Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre.
Base, coordonnées.	Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opération sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant la structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
e) Équations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solution est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.
f) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	