Programme de la colle 12

Semaine du 13/01/2025.

Démonstrations de cours d'algèbre linéaire :

1. Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Propriétés du sous-espace vectoriel engendré par une partie.
3. Pour deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on a : $F+G=F\oplus G \Longleftrightarrow F\cap G=\{0_E\}$.
4. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Théorème de la base adaptée.
6. La réciproque d'un isomorphisme est encore une application linéaire.
7. L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
8. Théorème de caractérisation les applications injectives et surjectives parmi les applications linéaires à l'aide de leur noyau et/ou image.
9. Si $E=E_1\oplus E_2$ et si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, alors : $p\in\mathscr{L}(E)$, $p^2=p$, $E_1=\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2=\mathrm{Ker}(p)$.
10. Soit $s:E\to E$. Alors : s est une symétrie, si et seulement si, (s est linéaire et $s^2=\mathrm{Id}_E$).
Dans ce cas, $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$.

Attention : nous n'avons pas parlé de dimension.

Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre.
Base, coordonnées.	Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opération sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant la structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
e) Équations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solution est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.
f) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Calcul intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.