

Programme de la colle 13

Semaine du 20/01/2025.

Attention :

1. Nous n'avons pas parlé de dimension.
2. N'ayant pas encore fini le TD sur la continuité, j'aimerais que l'évaluation de la continuité se limite à la question de cours et aux résultats connus depuis le début de l'année (par exemple, des calculs de limites, le TVI et le théorème de la bijection monotone).

Démonstrations de cours de continuité :

1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite en un point $a \in I$, alors cette limite est finie et vaut $f(a)$.
2. Caractérisation séquentielle de la limite.
3. Existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones.
4. L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.
5. Théorème de la bijection monotone.

Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

c) Familles finies de vecteurs

Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre.
Base, coordonnées.	Bases canoniques des espaces \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notations id_E , id .

Opération sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation $\text{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant la structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Espaces vectoriels isomorphes.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

e) Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \text{Ker } u$.

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

f) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Calcul intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu;
- le calcul de dérivées et de primitives;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Intégration par parties, changement de variable.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
