Programme de la colle 14

Semaine du 27/01/2025.

Démonstrations de cours sur la continuité :

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite en un point $a \in I$, alors cette limite est finie et vaut $f(a)$.
2. Caractérisation séquentielle de la limite.
3. Existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones.
4. L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.
5. Théorème de la bijection monotone.

Calcul intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

— *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation;*
— *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu;*
— *le calcul de dérivées et de primitives;*
— *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable;*
— *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Limites, continuité

Ce chapitre est divisé en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans le premier chapitre d'analyse.
Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-d), sont à valeurs réelles.
Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,A]$ si $a=-\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.
Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle ℓ en majorant $\lvert f(x)-\ell\rvert$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Extension de la notion de limite en a lorsque la fonction est définie sur $I\setminus\{a\}$.
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a.	Adaptation des énoncés relatifs aux suites.
Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
b) Continuité en un point	
Continuité de f en un point a de I.	La fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Continuité à droite et à gauche.	
Prolongement par continuité en un point.	Si a est une extrémité de I n'appartenant pas à I, f admet une limite finie en a si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a.
Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a.	Application aux suites définies par $u_{n+1}=f(u_n)$.
Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.	
c) Continuité sur un intervalle	
Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	$\leftrightarrows$ I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.	La démonstration est hors programme.
d) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes	
Limite de f en a, continuité de f en a, continuité de f sur un intervalle I. Fonctions bornées au voisinage de a. Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a. Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a, continues en a ou continues sur un intervalle I : combinaisons linéaires, produit, quotient.	Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.