Programme de la colle 16

Semaine du 10/02/2025.

Question de cours sur les polynômes.

1. Toute famille finie de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, non nuls et de degrés échelonnés, est libre.
2. Opérations sur la dérivation.
3. Formule de Taylor polynomiale.
4. Caractérisation des racines multiples.
5. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque pour les colleurs : le thème de la colle est principalement "polynômes". Toutes les thématiques ont été abordées, mais seule la moitié des TD a été faite pour l'instant.

Arithmétique

Contenus	Capacités & commentaires
c) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM. Algorithme d'Euclide. Nombre premier. L'ensemble des nombres premier est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.
Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier de $\mathbb{R}$, est hors programme.

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution des problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.
On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situation simples. L'objectif est de présenter aux étudiants un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de sommes, etc.
Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.	
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
Composition.	
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en terme de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».
	Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé.	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor polynomiale.	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.
	Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme.
	Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.
	Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.