Programme de la colle 17

Semaine du 10/03/2025.

Question de cours sur les polynômes.

1. Toute famille finie de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, non nuls et de degrés échelonnés, est libre.
2. Opérations sur la dérivation.
3. Formule de Taylor polynomiale.
4. Caractérisation des racines multiples.
5. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$.

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution des problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situations simples.

L'objectif est de présenter aux étudiants un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de sommes, etc.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensemble des polynômes à une indéterminée

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.

Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.

Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Degré d'une somme, d'un produit.

Composition.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.

Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en terme de divisibilité.

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Multiplicité d'une racine.

Polynôme scindé.

Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».

Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.

Formule de Taylor polynomiale.

Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

La démonstration est hors programme.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles

Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.

La démonstration est hors programme.

Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.

Dérivabilité

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.

Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.

Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une réciproque.

b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.

Interprétations géométrique et cinématique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est

dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Pour k dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

d) Fonctions convexes

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Interprétation géométrique.

L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Exemples d'inégalités de convexité.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la dérivabilité en termes de partie réelle et imaginaire.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».