Programme de la colle 19

Semaine du 24/03/2025.

Démonstrations de cours sur la dérivation ou dimension finie :

1. Condition nécessaire d'extremum local.
2. Théorème de Rolle.
3. Égalité des accroissements finis.
4. Pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable : f convexe sur I ssi f' croissante sur I (une implication seulement).
5. Formule de Grassmann.
6. Le rang d'une composée d'applications linéaires est majoré par le minimum des rangs.
7. Théorème du rang (avec le théorème qui précède).
8. Si E est de dimension finie, alors les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Remarques pour les colleurs. Nous avons à peine commencé le TD sur la dimension finie. Le thème de cette colle est donc plutôt dénombrement, avec un petit complément sur la dimension finie. Concrètement, après la question de cours, j'aimerais que la colle commence par un exercice de dénombrement, et si le temps le permet, vous pouvez donner un exercice simple d'algèbre en dimension finie (par exemple, déterminer une base d'un e.v., déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire). D'avance, merci !

Dénombrement

Ce sous-chapitre a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;*
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Ce chapitre est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui du chapitre « Calculs algébriques ».

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$.
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire et produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.

Algèbre linéaire (la nouveauté est la dimension finie et le rang)

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Im}\,u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Ker}\,u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	

e) Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	