

Programme de la colle 20

Semaine du 31/03/2025.

Démonstrations de cours sur la dimension finie :

1. Toute sous-famille libre d'une famille génératrice finie \mathcal{G} de E peut, à l'aide d'éléments de \mathcal{G} , être complétée en une base de E .
2. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
3. Formule de Grassmann.
4. Le rang d'une composée d'applications linéaires est majoré par le minimum des rangs.
5. Théorème du rang (avec le théorème qui précède).
6. Si E est de dimension finie, alors les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim(E) - 1$.

Pour les colleurs : le thème de la colle est principalement dimension finie, mais vous pouvez aussi un petit exercice d'analyse asymptotique pour vérifier que les DL et les méthodes de bases sont connus. Le TD sur les DL sera fini mercredi matin, mais toutes les techniques d'analyse asymptotique ont déjà été vues en cours.

Algèbre linéaire (la nouveauté est la dimension finie et le rang)

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire;
- reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire;
- définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

c) Familles finies de vecteurs

Famille génératrice. Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.

Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.

La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Sous-espaces supplémentaires.

On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Existence de bases en dimension finie.

Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Notation $\text{Im } u$.

Noyau d'une application linéaire.

Notation $\text{Ker } u$. Caractérisation de l'injectivité.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Application linéaire de rang fini.

Notation $\text{rg}(u)$.

Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notations id_E , id .

Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.

Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation $\text{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

e) Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \text{Ker } u$.

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.
Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

a) Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de \mathbb{R} ou $a = \pm\infty$.
Lien entre ces relations.

Notations

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement.

Pour la relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes

$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α , $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.

Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O .

Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f , g , h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

b) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe \mathcal{C}^n , développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de \exp , \sin , \cos , sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan .

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan .

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

Signe de f au voisinage de a .

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

La notion d'échelle de comparaison est hors programme.