# Programme de la colle 21

Semaine du 07/04/2025.

## Démonstrations de cours sur les représentations matricielles :

1. Matrice d'une composée d'applications linéaires.
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{GL}_{\dim(E)}(\mathbb{K})$.
3. Conservation du noyau et du rang d'une matrice par multiplication à gauche par une matrice inversible.
4. Formule de changement de bases pour une application linéaire.
5. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme.

## Algèbre linéaire (la nouveauté est la dimension finie et le rang)

*Les objectifs de cette section sont les suivants :*

— *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*

— *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*

— *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.*

*En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général : on en tirera parti par de nombreuses figures.*

### A - Espaces vectoriels

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Espaces vectoriels** | |
| Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.<br>Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.<br>Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. | Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.<br>Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. |
| **b) Sous-espaces vectoriels** | |
| Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. | Sous-espace nul. Droite vectorielle.<br>Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.<br>Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. |
| Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.<br>Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. | Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.<br>Tout sous-espace vectoriel contenant les $x_i$ contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. |
| **c) Familles finies de vecteurs** | |
| Famille génératrice. | |
| Famille libre, liée. | Ajout d'un vecteur à une famille libre.<br>Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. |
| Base, coordonnées. | Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.<br>Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$. |
| **d) Somme de deux sous-espaces** | |
| Somme de deux sous-espaces. | |
| Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. | La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ est unique. |
| Sous-espaces supplémentaires. | On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3. |

### B - Espaces de dimension finie

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Existence de bases** | |
| Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. | |
| Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre $E$ et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie $I$ de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie $J$ de $\{1,\ldots,n\}$ contenant $I$ pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de $E$. | Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base). |
| **b) Dimension d'un espace de dimension finie** | |
| Dans un espace engendré par $n$ vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. | |
| Dimension d'un espace de dimension finie. | Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. |
| Dans un espace de dimension $n$, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de $n$ vecteurs. | |
| Rang d'une famille finie de vecteurs. | Notation $\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n)$. |
| **c) Sous-espaces et dimension** | |
| Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. | |
| Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. | |
| Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. | |
| Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces. | |

### C - Applications linéaires

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Généralités** | |
| Application linéaire. | |
| Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. | Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$. Bilinéarité de la composition. |
| Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. | |
| Image d'une application linéaire. | Notation $\mathrm{Im}\,u$. |
| Noyau d'une application linéaire. | Notation $\mathrm{Ker}\,u$. Caractérisation de l'injectivité. |
| Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de $E$ et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$. | |
| Application linéaire de rang fini. | Notation $\mathrm{rg}(u)$. |
| Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **b) Endomorphismes** | |
| Identité, homothéties.<br>Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.<br>Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.<br>Automorphismes. Groupe linéaire. | Notations $\mathrm{id}_E$, id.<br>Notation $u^k$ pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.<br><br>On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.<br>Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.<br>Notation $u^k$ pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$. |
| **c) Détermination d'une application linéaire lorsque $E$ est de dimension finie** | |
| Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $F$, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.<br>Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.<br>Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.<br>Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. | Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de $u$. |
| Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si $E$ et $F$ sont de dimension finie. | La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. |
| Si $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces de $E$ tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec $u_1$ sur $E_1$ et avec $u_2$ sur $E_2$. | |
| **d) Théorème du rang** | |
| Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $S$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $E$, alors $u$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\, u$.<br>Théorème du rang : si $E$ est de dimension finie $n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(u)$. | |
| **e) Équations linéaires** | |
| Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$. | Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques. |
| **f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie** | |
| Forme linéaire. | |
| Hyperplan. | Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.<br>Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie. |
| Si $H$ est un hyperplan de $E$ et $D$ une droite non contenue dans $H$, alors $E = H \oplus D$. | |

## Analyse asymptotique

*L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.*

*Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.*

*Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.*

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Relations de comparaison : cas des fonctions** | |
| Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point $a$ de $\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.<br>Lien entre ces relations. | Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction $g$ ne s'annule pas localement.<br>Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.<br>Pour mener une étude locale de $f$ au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$.<br>Traduction à l'aide du symbole $o$ des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, $x^\alpha$, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, $x^\alpha$ en 0. |
| Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles $o$ et $O$.<br>Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles $f$, $g$, $h$ vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.<br>Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
| --- | --- |
| **b) Développements limités** | |
| Développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. | Le développement limité à l'ordre $n$ de $f$ en $a$ peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de $f$ au voisinage de $a$. |
| Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. | |
| Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. | On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. |
| Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour $f$ de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre $n$ en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan. | |
| Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. | Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes. |
| Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur. | |
| **c) Relations de comparaison : cas des suites** | |
| Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions. | Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. |
| **d) Problèmes d'analyse asymptotique** | |
| Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. | La notion d'échelle de comparaison est hors programme. |