Programme de la colle 22

Semaine du 28/04/2025.

Démonstrations de cours sur les représentations matricielles :

1. Matrice d'une composée d'applications linéaires.
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{GL}_{\dim(E)}(\mathbb{K})$.
3. Conservation du noyau et du rang d'une matrice par multiplication à gauche par une matrice inversible.
4. Formule de changement de bases pour une application linéaire.
5. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme.

Matrices et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et d'un vecteur ;*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d' une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.