Programme de la colle 24

Semaine du 12/05/2025.

Démonstrations du cours d'intégration :

1. Inégalité triangulaire intégrale pour une fonction continue par morceaux sur un segment.
2. Positivité stricte de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux (c.p.m.) sur un segment : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est c.p.m. et >0 sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
3. Intégrale d'une fonction périodique sur une période.
4. Inégalité de Taylor-Lagrange : $\forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,K),\ \forall (a,x) \in I^2,\ \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$, où M_{n+1} est un majorant de la fonction $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[\min(a,x), \max(a,x)]$.
   N.B. : le colleur devra rappeler l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral.
5. Convergence des sommes de Riemann dans le cas où f est lipschitzienne : si $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ est lipschitzienne, alors $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[]{n\to+\infty} \int_a^b f$.

Équations différentielles

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

— *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
— *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
— *le calcul de dérivées et de primitives ;*
— *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
— *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Probabilités sur un univers fini

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini. Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$. Probabilité uniforme.	Espace probabilisé fini (Ω, P).
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.