Programme de la colle 2

Semaine du 30/09/2024.

Démonstrations à connaître

1. Inégalité triangulaire
2. Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire
3. Racines carrées d'un nombre complexe
4. Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
5. Racines n -ième d'un complexe non nul

Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont supposés connus.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique, de la théorie des ensembles ou de l'arithmétique est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\bar{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

Trigonométrie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.

Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.

Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.

Cosinus et sinus des angles usuels.

Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Fonction tangente.

Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.

Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.

Notation $a \equiv b [2\pi]$.

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

— l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique;

— l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane;

— l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation

de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Module.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Notation $\cup$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.
Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.
Représentation géométrique.

---

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

---

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.

L'étude générale des similitudes est hors programme.