

Programme de la colle 4

Semaine du 14/10/2024.

Démonstrations ou savoir-faire à connaître :

1. Formule du binôme de Newton.
2. Pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, exprimer $\cos(nx)$ à l'aide d'une expression polynomiale en $\cos x$ (ne pas apprendre de formule par cœur, mais la retrouver).
3. La composée de deux injections est injective.
4. La composée de deux surjections est surjective.
5. $f \in F^E$ est bijective ssi $\exists g \in E^F : g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Compléments de calcul algébrique

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme;
- manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations;
- utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.

Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble.
Graphe d'une application.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .
Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .

Famille d'éléments d'un ensemble.
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Restriction et prolongement.
Image directe.
Image réciproque.

Notation $\mathbb{1}_A$.
Notation $f|_A$.
Notation $f(A)$.
Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Composition.

Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.

Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
