

Programme de la colle 5

Semaine du 04/11/2024.

Démonstrations ou savoir-faire à connaître :

1. Formule du binôme de Newton.
2. Pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, exprimer $\cos(nx)$ à l'aide d'une expression polynomiale en $\cos x$ (ne pas apprendre de formule par cœur, mais la retrouver).
3. La composée de deux injections est injective.
4. La composée de deux surjections est surjective.
5. $f \in F^E$ est bijective ssi $\exists g \in E^F : g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Applications

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Application d'un ensemble dans un ensemble F . Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .
Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble E . Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque.	Notation $\mathbb{1}_A$. Notation $f _A$. Notation $f(A)$. Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant porter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Compléments sur l'ensemble des réels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Compatibilité avec les opérations. Intervalles de \mathbb{R} .	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $ x - a \leq b$.

Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Les fonctions usuelles (arccos, arcsin, arctan, sh, ch) ne seront au programme de colle que la semaine prochaine.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.
La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variation. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations $f'(x)$ ou $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade.
Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.
Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.