Programme de la colle 9

Semaine du 02/12/2024.

Démonstrations de cours sur le calcul matriciel OU les suites :

1. Associativité du produit matriciel.
2. Produit de deux matrices élémentaires.
3. Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.
4. Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par produit.
5. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution.
6. Toute suite réelle convergente est bornée.
7. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
8. Théorème de la limite monotone.
9. Théorème des suites adjacentes.
10. Formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.
11. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ et u_0 fixé.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Cette section a pour but de présenter une initiation au calcul matriciel, de préparer l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre et de revenir sur l'étude des systèmes linéaires. Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opération sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation A^T.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en terme de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques et antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée. Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Modes de définition d'une suite réelle : explicite, implicite ou par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notation $u_n \to \ell$, $\lim u_n$.
Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \le v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de par parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire les notions d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.