

**Exercice 1. Calcul d'équivalents de suites.** Donner un équivalent simple des suites dont les termes généraux sont les suivants.

1.  $\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1};$

6.  $\frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan \frac{\pi}{n}};$

11.  $\frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2};$

2.  $\frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1};$

7.  $\ln(n + 2) - \ln(n + 1);$

12.  $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n};$

3.  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right);$

8.  $(2n + \ln(n^2))e^{-(n+1)};$

13.  $\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n - 1};$

4.  $\ln\left(\frac{n + 1}{n}\right);$

9.  $\frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1};$

14.  $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1};$

5.  $\sin \sin \frac{\pi}{n^2};$

10.  $\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}};$

15.  $\sqrt{\ln(n + 1) - \ln(n - 1)}.$

**Indication :**

- Pour 1, 2, 6, 10, 11, faire des quotients d'équivalents;
- Pour 3 et 4, utiliser l'équivalent usuel  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$  avec  $u_n \rightarrow 0$ .
- Pour 5, utiliser deux fois l'équivalent usuel  $\sin(u_n) \sim u_n$  avec  $u_n \rightarrow 0$ .
- Pour 7, utiliser la propriété du  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$  puis  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$  avec  $u_n \rightarrow 0$ .
- Pour 8, faire un produit d'équivalents
- Pour 9, conjecturer que le numérateur est équivalent à  $2 \ln n$  et montrer-le.
- Pour 12, faire des quotient d'équivalents, en repérant pour le numérateur (puis pour le dénominateur) quel terme est négligeable par rapport à l'autre.
- Pour 13, mettre sous la forme d'une seule fraction.
- Pour 14, quantité conjuguée ou bien factorisation par l'une des racines carrées puis utilisation de l'équivalent usuel concernant les puissances.
- Pour 15, déterminer un équivalent de la suite sous le radical (similaire à la question 7), puis passer à la puissance  $1/2$  dans les équivalents.

**Correction.** Les réponses sont :

$$1. \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2}n;$$

$$2. \frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n};$$

$$3. \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2};$$

$$4. \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n};$$

$$5. \sin \sin \frac{\pi}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2};$$

$$6. \frac{n^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\tan \frac{\pi}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{\pi};$$

$$7. \ln(n+2) - \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n};$$

$$8. (2n + \ln(n^2))e^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2ne^{-(n+1)};$$

$$9. \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \frac{\ln n}{n};$$

$$10. \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n};$$

$$11. \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{2};$$

$$12. \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n};$$

$$13. \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2};$$

$$14. \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$15. \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$