Quantificateurs, implications, équivalences

Exercice 1. Vrai-Faux. *Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les démontrer quand elles sont vraies, démontrer la négation sinon.*

1. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = e^x$. *(F, $y=-1$)*
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ y < \sqrt{x}$. *(V, $y=-1$)*
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y < \sqrt{x}$. *(V, $y = \sqrt{x}-1$ ou $y=-1$)*
4. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$. *(V, $a = 0$)*
5. $\forall x \in [0,2[,\ \exists y \in [0,2[,\ x < y$. *(V, $y = \dfrac{x+2}{2} \in [0,2[$ et $y - x > 0$)*
6. $\exists T \in \mathbb{C}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ (z+T)^3 = z^3$. *(F, sa négation $\forall T \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C} : (z+T)^3 \neq z^3$ est vraie avec $z = -T$ ou $z = 0$)*

Exercice 2. Négation. *Nier les assertions suivantes.*

1. *« Il pleut tous les jours ».* *« Il y a au moins un jour où il ne pleut pas »*
2. *« Certains nombres entiers sont pairs ».* *« Tous les nombres entiers sont impairs »*
3. $2 \leq x < y$. $\text{non}(x \geq 2$ *et* $x < y)$ *correspond à* $(x < 2$ *ou* $x \geq y)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$. *($f$ injective)*
   f est non injective si : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$ *et* $x \neq y$.
5. *« Si un nombre entier est divisible par* 4*, alors il se termine par* 4 *».* $\text{non}(\forall n \in \mathbb{N},\ 4|n \Longrightarrow n$ *se termine par 4)* *correspond à « il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $4|n$ *et* n *ne se termine pas par 4 »i.e. « il existe un nombre entier divisible par 4 et qui ne se termine pas par 4 », ce qui est vrai (par exemple* 16 *convient).*

Exercice 3. En français. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I sur $\mathbb{R}$.*
Traduire en français chacune des assertions suivantes.

1. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$.
   f n'est pas constante
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, y = f(x)$. *Tout réel a au moins un antécédent par f dans I (f est surjective). Erreur classique : constante. Contre-exemple : fonction inverse définie par 0 en 0.*
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in I,\ y = f(x)$. *Tout réel a exactement un antécédent par f dans I (f bijective) Erreur classique : strictement monotone. Contre-exemple : fonction inverse définie par 0 en 0.*
4. $\forall x \geq 3,\ \ f(x) \leq 2$.
   f est majorée par 2 sur $[3, +\infty[$.

Exercice 4. Conjectures de Goldbach. *La conjecture de Goldbach forte affirme que tout nombre pair ≥ 4 est la somme de deux nombres premiers. La conjecture de Goldbach faible affirme que tout nombre impair ≥ 7 est la somme de trois nombres premiers.*

1. *Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible.*
2. *En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.*

   Que peut-on en déduire sur la conjecture forte ?

Correction.

1. *Supposons la conjecture de Goldbach forte.*

   Montrons la conjecture de Goldbach faible, c'est-à-dire que tout nombre impair ≥ 7 est la somme de trois nombres premiers.

   Soit $n \geq 7$ un nombre impair.

   On va appliquer la conjecture de Goldbach forte à l'entier $n-3$. C'est légitime car

   - *on a bien $n-3$ pair (car n est impair) ;*
   - *on a bien $n-3 \geq 4$ (car $n \geq 7$).*

   D'après la conjecture de Goldbach forte, on peut donc trouver deux nombres premiers p et q tels que $n-3 = p+q$.

   On en déduit $n = 3+p+q$.

   On a donc bien écrit n comme la somme de trois nombres premiers.

2. *Rien !*

Exercice 5. Valeurs prises et subtilité. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Voici deux assertions :*

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\big)$ (ii) $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\big)$

1. *Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes et donner un exemple concret de fonction f vérifiant chaque assertion.*
2. *Y a-t-il une équivalence entre ces deux assertions ?*
3. *Écrire la négation de ces assertions.*
4. *Écrire en langage formel que « f est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et prend effectivement -1 et 1 comme valeurs ».*

Correction.

1. *L'assertion* (i) *signifie que f ne peut prendre que deux valeurs, à savoir 1 et -1.*

   On dit parfois « f prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ » ; plus tard dans l'année, on écrira $f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$, ou encore $\mathrm{Im} f \subset \{-1, 1\}$ pour dire que l'image de f est incluse dans $\{-1, 1\}$.
   La fonction $f_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}$ vérifie cette assertion.

   L'assertion (ii) *signifie que f est constante égale à 1 ou bien f est constante égale à -1.*
   La fonction constante égale à 1 vérifie cette assertion.

2. *Le lecteur vérifiera que* (ii) $\Rightarrow$ (i)*, mais* (i)$\not\Rightarrow$(ii) *(un contre-exemple est la fonction f_0 précédente).*

3. *La négation de* (i) *est* $\exists\, x \in \mathbb{R}, \Big(f(x) \neq 1$ *et* $f(x) \neq -1\Big)$.

   La négation de (ii) *est* $\Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq 1\Big)$ *et* $\Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \neq -1\Big)$.

4. *Une solution possible :*

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 1\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = -1\Big)$$

   ou encore :

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\Big)$$

   ou encore :

$$f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\} \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\Big)$$

   ou encore :

$$f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}.$$

Exercice 6. Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer* $|1 + z| = 1 + |z| \Longrightarrow z \in \mathbb{R}_+$.

2. *En déduire* $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \Big(z = 0$ *ou* $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z)\Big)$.

Correction.

1. *On suppose que $|1+z| = 1+|z|$. En élevant au carré, on obtient : $(1+z)(1+\overline{z}) = 1+2|z|+|z|^2$. En développant, en utilisant $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et en simplifiant, on obtient $\mathrm{Re}(z) = |z|$. On en conclut d'abord que $\mathrm{Im}(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$, d'où $z = \mathrm{Re}(z) = |z| \in \mathbb{R}_+$. On a bien l'implication.*

2. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.*
   $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $|z + z'| = |z| + |z'|$ et $z \neq 0$.*
   Alors, en divisant par $|z|$, on obtient : $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$ avec $\alpha = \dfrac{z'}{z}$. D'après le premier point on a alors $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}_+, \text{ avec } z' = \alpha z}$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ *Traitons les deux cas séparément.*
   - *Si $z = 0$, alors $|z + z'| = |z'| = 0 + |z'| = |z| + |z'|$.*
   - *Supposons désormais qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \alpha z$. Alors : $|z + z'| = |z + \alpha z| = |(1 + \alpha)z| = |1 + \alpha||z| = (1 + \alpha)|z| = |z| + \alpha|z| = |z| + |\alpha||z| = |z| + |z'|$, car $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc aussi $1 + \alpha \in \mathbb{R}_+$.*

Exercice 7. Somme nulle de réels. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer* $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad a_1 + \dots + a_n = 0 \implies \Big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0\Big)$.

2. *Soit* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $x_1 + \dots + x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 = n$.
   En calculant $(1 - x_1)^2 + \dots + (1 - x_n)^2$, *montrer* $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 1$.

Correction.

1. *Fixons* $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. *Donnons deux méthodes, l'une par contraposée, l'autre en suivant le canevas standard.*

   Première méthode (preuve directe). *Supposons* $a_1 + \dots + a_n = 0$.
   Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.
   Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
   D'après l'hypothèse, on a

   $$a_i = -(a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n)$$

   donc a_i est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
   Comme a_i est positif par hypothèse, on a donc $a_i = 0$.
   D'où $a_i = 0$.

   Deuxième méthode (par contraposée). *Supposons* $\mathrm{non}(\forall i,\ a_i = 0)$, *donc il existe i_0 tel que* $a_{i_0} \neq 0$.
   Montrons $\mathrm{non}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i = 0\Big)$, *c'est-à-dire* $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

   Comme a_{i_0} est positif (hypothèse de l'énoncé) et non nul (hypothèse du raisonnement), on a $a_{i_0} > 0$.
   Montrons maintenant ce que l'on doit montrer !
   Par sommation par paquets, et avec les hypothèses, on a

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{a_{i_0}}_{>0} + \underbrace{\sum_{i \neq i_0} a_i}_{\geq 0}$$

   On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *est strictement positive (la somme d'un nombre strictement positif et d'un positif est un nombre strictement positif).*
   A fortiori, la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *est **non** nulle !*

2. *Calculons $(1-x_1)^2+\cdots+(1-x_n)^2$. On a*

$$\begin{aligned}(1-x_1)^2+\cdots+(1-x_n)^2 &= (1-2x_1+x_1^2)+\cdots+(1-2x_n+x_n^2)\\ &= \underbrace{(1+\cdots+1)}_{=n}-2\underbrace{(x_1+\cdots+x_n)}_{=n}+\underbrace{(x_1^2+\cdots+x_n^2)}_{=n}\\ &\qquad\qquad \textit{on utilise les deux hypothèses}\\ &= n-2n+n\\ &= 0.\end{aligned}$$

On peut appliquer la question 1 à $a_i=(1-x_i)^2$. En effet, $a_i\in\mathbb{R}_+$ et la somme des a_i est nulle. On en déduit que tous les a_i sont nuls.

Autrement dit, $\forall\, i\in[\![1,n]\!],\ (1-x_i)^2=0$. D'où $\boxed{\forall\, i\in[\![1,n]\!],\ x_i=1}$.

Exercice 8. Circuit d'équivalences. *Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.*
Montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes

(i) $x=y$

(ii) $\forall\varepsilon\geq 0,\ |x-y|\leq\varepsilon$

(iii) $\forall\varepsilon'>0,\ |x-y|\leq\varepsilon'$

(iv) $\forall\varepsilon>0,\ |x-y|<\varepsilon$

Correction. *Procédons par implications circulaires.*

- *Il est évident que $\boxed{\text{(i)}\Longrightarrow\text{(ii)}\Longrightarrow\text{(iii)}}$.*
- *Supposons (iii) et montrons (iv). Soit $\varepsilon>0$. On pose $\varepsilon'=\varepsilon/2$. On a $\varepsilon'>0$, donc d'après (iii), on a $|x-y|\leq\varepsilon'$. Puisque $\varepsilon'<\varepsilon$ (car $\varepsilon>0$), on a par transitivité $|x-y|\leq\varepsilon$. On a donc $\boxed{\text{(iii)}\Longrightarrow\text{(iv)}}$.*
- *Supposons (iv). Supposons par l'absurde que $x\neq y$. Alors en prenant $\varepsilon=|x-y|$, on aurait $\varepsilon>0$ et par hypothèse $|x-y|<|x-y|$, ce qui est absurde ! Donc $x=y$. On a ainsi montré $\boxed{\text{(iv)}\Longrightarrow\text{(i)}}$.*

On conclut que les 4 assertions sont équivalentes.

Exercice 9. Équivalence pour les suites non majorées. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer*

$$\Big(\forall A\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N}:u_n\geq A\Big)\Longleftrightarrow\Big(\forall A\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N}:u_n>A\Big).$$

Correction. *Nous allons montrer cette équivalence par double implication.*

- *Une inégalité stricte étant plus forte qu'une inégalité large, on a bien : (2) implique (1).*
- *Réciproquement, montrons que (1) implique (2).*
  Supposons (1) et montrons (2).
  Soit $A\in\mathbb{R}$.
  Alors $A+1\in\mathbb{R}$ et d'après la propriété (1) appliquée à $A+1$, on peut trouver un entier $n\in\mathbb{N}$ tel

que $u_n \geq A+1$. En particulier, on a bien $u_n > A$.
On a donc bien montré $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : u_n > A$.

$\boxed{\text{On a l'équivalence}}$.

Exercice 10. Assertions non équivalentes. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Montrer que les assertions suivantes ne sont pas équivalentes

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x+1)$.

Correction.

- *Bien sûr,* (i) $\Rightarrow$ (ii) *en prenant $y = x+1$.*
- *Par contre,* (ii) $\not\Rightarrow$ (i). *Exhibons une fonction f qui vérifie* (ii) *mais pas* (i). *Une fonction 1-périodique mais non croissante fera l'affaire.* $\boxed{\text{Soit } f : x \mapsto \cos(2\pi x)}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos(2\pi x) = f(x)$ *donc f vérifie* (ii). *Pour $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1$ et $f(y) = -1$ donc $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$. On a donc montré que* (i). *n'est pas vraie.*
  Remarque 1 : *la fonction partie fractionnaire $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ convient également, car $frac(1,2) = 0,2$ et $frac(2,1) = 0,1$.*
  Remarque 2 : *la fonction $x \mapsto 2\lfloor x \rfloor - x$ convient également.*

$\boxed{\text{Ainsi, 1. et 2. ne sont pas équivalents}}$.

Exercice 11. Équivalences pour les suites croissantes. *Montrer l'équivalence*

$$\left(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq q \Longrightarrow u_p \leq u_q\right) \Longleftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}\right).$$

Correction.

- *Le sens direct est clair car $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n+1$.*
- *Pour le sens indirect, supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons pour tout $\forall q \geq p$ l'assertion $H(q)$: « $u_p \leq u_q$ », par récurrence sur q.*
  On a $H(p)$ donc la proposition est initialisée.
  Soit $q \geq p$ tel que $u_p \leq u_q$. Par hypothèse, on a : $u_q \leq u_{q+1}$ donc par transitivité, $u_p \leq u_{q+1}$. La proposition est donc héréditaire.

Ensembles

Exercice 12. Quelques caractérisations d'inclusion et d'égalité d'ensembles. *Soient E un ensemble et A et B des parties de E.*

1. *Montrer que $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.*

   On raisonne par **implications circulaires**.

   - *Supposons que $A \subset B$ et montrons $A \cup B = B$.*
     L'inclusion $B \subset A \cup B$ est toujours vraie donc montrons l'inclusion réciproque.
     Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$. Plusieurs cas sont possibles.
     - *Si $x \in A$, comme par hypothèse $A \subset B$, on a $x \in B$.*
     - *Si $x \in B$, on a bien $x \in B$.*

     Dans tous les cas, $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$.
     Par double inclusion, on a $A \cup B = B$.
   - *Supposons que $A \cup B = B$ et montrons $A \cap B = A$.*
     L'inclusion $A \cap B \subset A$ est toujours vraie donc montrons l'inclusion réciproque.
     Comme $A \subset A \cup B$ et $A \cup B = B$, on a $A \subset B$. Ainsi, tout élément de A est bien dans A et B donc dans $A \cap B$. Cela montre $A \subset A \cup B$.
     Par double inclusion, on a bien $A \cap B = A$.
   - *Supposons que $A \cap B = A$ et montrons $A \subset B$.*
     Soit $x \in A$. Par hypothèse, $x \in A \cap B$ donc en particulier $x \in B$. On a donc $A \subset B$.

2. *Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.*

   Première méthode : *Raisonnons par* **double implication**.
   - *Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in \overline{B}$. Si x appartenait à A alors comme $A \subset B$, x appartiendrait à B, ce qui est* **absurde** *par hypothèse. Ainsi, $x \notin A$. On a donc montré que : $\underline{A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$.*
   - *Supposons que $\overline{B} \subset \overline{A}$. D'après ce que l'on vient de faire, alors $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$, ce qui est équivalent à $A \subset B$. On a donc montré que : $\underline{\overline{B} \subset \overline{A} \Longrightarrow A \subset B}$.*
   - *Les deux implications nous donnent l'équivalence recherchée.*

   Deuxième méthode : *(en utilisant la question 1).*

$$\begin{aligned} A \subset B &\overset{(i\Leftrightarrow ii)}{\iff} A \cup B = B \\ &\iff \overline{A \cup B} = \overline{B} \\ &\iff \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B} \\ &\overset{(i\Leftrightarrow iii)}{\iff} \overline{B} \subset \overline{A}. \end{aligned}$$

Troisième méthode :

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ x \in A \Longrightarrow x \in B \\ &\overset{\text{contraposée}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in E,\ \mathrm{non}(x \in B) \Longrightarrow \mathrm{non}(x \in A) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \\ &\Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}. \end{aligned}$$

3. *Montrer que* $A = B \Longleftrightarrow A \cup B = A \cap B$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ *: Immédiat. Si* $A = B$*, alors* $A \cup B = A$ *et* $A \cap B = A$ *donc d'après la première question* $A \cup B = A \cap B$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ *: Supposons que* $A \cup B = A \cap B$.
   On a : $A \subset (A \cup B) = (A \cap B) \subset B$ *donc* $A \subset B$.
   Puisque A *et* B *jouent des rôles symétrique, on a aussi* $B \subset A$.
   Ainsi, $A = B$.

Exercice 13. Encore une caractérisation d'égalité d'ensembles. *Soient* E *et* F *deux ensembles. Montrer*

$$E \subset F \Longleftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F).$$

Correction. *Procédons par double implication.*

Sens direct. *Supposons* $E \subset F$ *et montrons* $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. *Alors* $A \subset E$ *et* $E \subset F$*, donc par transitivité,* $A \subset F$*, d'où* $A \in \mathcal{P}(F)$.
Ainsi $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Sens réciproque. *Supposons* $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ *et montrons* $E \subset F$.
Soit $x \in E$. *Alors* $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.
Par hypothèse, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$*, donc* $\{x\} \in \mathcal{P}(F)$.
Ainsi $x \in F$*, ce qui prouve* $E \subset F$.

Exercice 14. Ménage à 4, puis à 3. *Soient* E *un ensemble et* A, B, C, D *des parties de* E.

1. *Montrer l'implication* $(A \subset C \text{ et } B \subset D) \Longrightarrow A \cup B \ \subset\ C \cup D$.
2. *Montrer l'équivalence* $B \subset C \Longleftrightarrow (A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C)$.
3. *Montrer l'équivalence* $A \subset B \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.

Correction.

1. *Supposons* $(A \subset C \text{ et } B \subset D)$.

   Montrons $A \cup B \ \subset\ C \cup D$.

   Soit $x \in A \cup B$.

   On a donc $x \in A$ *ou* $x \in B$.
   Cas $x \in A$**.** *Par hypothèse* $A \subset C$. *Et on a toujours* $C \subset C \cup D$. *Donc* $A \subset C \cup D$.

Comme $x \in A$, on en déduit $x \in C \cup D$.

Cas $x \in B$. *Ce cas est totalement similaire (à vous ! Il suffit d'échanger les rôles joués par A, B d'une part, et C, D d'autre part).*

Dans tous les cas, on a $x \in C \cup D$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons $B \subset C$.*

   - *Montrons $A \cup B \subset A \cup C$.*
     On utilise la question précédente avec les inclusions $A \subset A$ et $B \subset C$.
     On en déduit $A \cup B \subset A \cup C$.
   - *Montrons $A \cap B \subset A \cap C$.*
     Soit $x \in A \cap B$.
     - *On a $x \in A$.*
     - *On a $x \in B$. Or $B \subset C$ par hypothèse. Donc $x \in C$.*

     Ainsi, $x \in A \cap C$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons $A \cup B \subset A \cup C$ $(*)$ et $A \cap B \subset A \cap C$ $(**)$.*
   Montrons $B \subset C$.
   Soit $x \in B$.
   On a $B \subset A \cup B$ (toujours) et $A \cup B \subset A \cup C$ (hypothèse $*$), donc $B \subset A \cup C$.
   Ainsi x, qui est dans B, appartient à $A \cup C$.

   - *Cas $x \in A$.*
     Comme $x \in B$, et $x \in A$ dans ce cas, on a $x \in A \cap B$.
     D'après l'hypothèse $(**)$, on obtient $x \in A \cap C$.
     A fortiori, $x \in C$.
   - *Cas $x \in C$. Dans ce cas, on a $x \in C$.*

   Dans les deux cas, on a $x \in C$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ *Conséquence de l'implication précédente.*

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.*
   En particulier, pour $X = E \in \mathscr{P}(E)$, on obtient $A \cap E \subset B \cap E$ i.e. $A \subset B$.

Exercice 15. ABC. *Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E. Montrer l'implication*

$$A \setminus B = C \Longrightarrow A \cup B = B \cup C.$$

Correction. *Supposons que $A \setminus B = C$.*
Montrons l'égalité d'ensembles $A \cup B = B \cup C$.
Première preuve : par double inclusion

$\boxed{\subset}$ *Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $x \in B \cup C$ i.e. $x \in B$ ou $x \in C$.*
Pour cela, supposons que $x \notin B$ et montrons que $x \in C$.
Alors $x \in A \cap \overline{B}$ i.e. $x \in A \setminus B$. Or, par hypothèse $A \setminus B = C$, donc $x \in C$, cqfd.

$\boxed{\supset}$ *Montrons $B \cup C \subset A \cup B$.*

On a toujours $(A \setminus B) \subset A$. Or par hypothèse, $A \setminus B = C$, d'où $C \subset A$.

En intersectant avec B (conséquence de l'exercice précédent), on a $B \cup C \subset A \cup B$.

Deuxième preuve : par égalité ensembliste
Montrons que $A \cup B$ est égal à $(A \setminus B) \cup B$.
On a :

$$\begin{array}{rcll} (A \setminus B) \cup B & = & (A \cap \overline{B}) \cup B & \text{d'après le cours} \\ & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) & \text{par distributivité de l'union par rapport à l'intersection} \\ & = & (A \cup B) \cap E & \\ & = & A \cup B. & \end{array}$$

Or, par hypothèse, $A \setminus B = C$ d'où

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = C \cup B = B \cup C.$$

Exercice 16. Factorisation. *Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E. Montrer l'égalité*

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C).$$

<u>1ère méthode</u> : Preuve avec les ensembles

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) &= ((A \cap C) \cup B) \cap (A \cup C) \text{ factorisation de l'union p.r. à l'intersection} \\ &= ((A \cap C) \cap (A \cup C)) \cup (B \cap (A \cup C)) \text{ distributivité de l'intersection p.r. à l'union.} \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap (A \cup C)) \\ &= (A \cap C) \cup ((B \cap A) \cup (B \cap C)) \text{ distributivité de l'intersection p.r. à l'union.} \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) \text{ associativité de l'union.} \end{aligned}$$

<u>2ème méthode</u> : Utilisez les tables de vérité. (VVVFVFFF)

Exercice 17. Recouvrement. *Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.*
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \cup B = E$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ (X \cap A = \varnothing \Longrightarrow X \subset B)$.

<u>Correction.</u> *Montrons (i) $\Leftrightarrow$ (ii).*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons (i) $A \cup B = E$.*

Montrons l'assertion (ii).

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $X \cap A = \varnothing$.
Montrons que $X \subset B$.

Soit $x \in X$.
A fortiori, $x \in E$.
D'après (i), on a donc $x \in A$ ou $x \in B$.
Or $X \cap A = \varnothing$ donc le premier cas est impossible et on est dans le deuxième cas.
D'où $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons (ii)* $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ (X \cap A = \varnothing \Longrightarrow X \subset B)$.

Montrons que $A \cup B = E$.

Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ *Comme* A *et* B *sont deux parties de* E*, on a bien sûr,* $A \cup B \subset E$.

$\boxed{\supset}$ *Montrons* $E \subset A \cup B$.

Première méthode. *Soit* $x \in E$*. Montrons que* $x \in A \cup B$.

Distinguons deux cas.

- *Cas* $x \in A$*. Dans ce cas, on a* $x \in A \cup B$.
- *Cas* $x \notin A$*. Posons* $X = \{x\}$*. Comme* $x \notin A$*, on a donc* $X \cap A = \varnothing$.
  On peut donc appliquer l'hypothèse (ii) avec ce X.
  On obtient $X \subset B$.
  Comme par définition $x \in X$*, on a* $x \in B$.
  A fortiori, $x \in A \cup B$.

Dans les deux cas, on a $x \in A \cup B$.

Deuxième méthode (ensembliste). *Appliquons l'hypothèse (ii) avec la partie* $X = E \setminus A$ *qui vérifie bien* $X \cap A = \varnothing$.
On en déduit $X \subset B$*, c'est-à-dire* $(E \setminus A) \subset B$.
En prenant l'union avec A *de cette inclusion, on obtient :*

$$A \cup (E \setminus A) \ \subset \ A \cup B.$$

Or $A \cup (E \setminus A) = E$ *donc* $E \subset A \cup B$.

Bilan. *On a donc montré que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.*

Exercice 18. Différence symétrique. *On considère un ensemble* E *et deux parties* A *et* B *de* E*. On appelle* **différence symétrique** *de* A *et* B*, et on note* $A \triangle B$*, la partie de* E *définie par*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. *Déterminer une autre écriture de cette opération.*

La différence symétrique correspond à un « ou exclusif ».
On conjecture et on va montrer que :

$$\boxed{A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}.$$

$$\begin{aligned}
A\triangle B &= (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\\
&= (A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) \quad \textit{en développant}\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\\
A\triangle B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B).
\end{aligned}$$

2. *Montrer les propriétés suivantes.*

   (i) $\forall A\in\mathscr{P}(E),\ A\triangle A=\varnothing$;

   (ii) $\forall A,B\in\mathscr{P}(E),\ A\triangle B=B\triangle A$; *(commutatif)*

   (iii) $\forall A,B,C\in\mathscr{P}(E),\ A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$; *(associatif)*

   (iv) $\exists I\in\mathscr{P}(E):\forall A\in\mathscr{P}(E), A\triangle I=I\triangle A=A$; *(existence d'un neutre)*

   (v) $\forall A\in\mathscr{P}(E),\exists B\in\mathscr{P}(E): A\triangle B=\varnothing$. *(tout élément a un symétrique)*

   (vi) $\exists T\in\mathscr{P}(E):\forall A\in\mathscr{P}(E), A\triangle T=T\triangle A=E\setminus A$;

   Remarque : *les propriétés* (ii), (iii), (iv) *et* (v) *montrent que* $\triangle$ *munit* $\mathscr{P}(E)$ *d'une structure de* ***groupe commutatif***.

   Montrons successivement les six assertions.

   (i) Soit $A\in\mathscr{P}(E)$.

   On a alors $A\cup A=A\cap A=A$, donc $A\triangle A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=A\setminus A=\varnothing$.

   (ii) Soit $A,B\in\mathscr{P}(E)$.

   On a alors $A\cup B=B\cup A$ et $A\cap B=B\cap A$, donc $A\cup B=B\cup A$, donc

   $$A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(B\cup A)\setminus(B\cap A)=B\triangle A.$$

   (iii) Revenons aux définitions.

   La preuve est un peu pénible : le plus simple est de faire une sorte de table de vérité où l'on distingue suivant l'appartenance aux différentes parties. Soit $x\in E$. On a alors $x\in A$ ou $x\notin A$. De même, $x\in B$ ou $x\notin B$, et enfin $x\in C$ ou $x\notin C$. Rassemblons tous les cas possibles dans une table de vérité. On peut alors déterminer si x appartient ou non à $A\triangle B$ (ce sera le cas si et seulement si x appartient à A ou à B, mais pas aux deux).

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in A\Delta B$	$x\in(A\Delta B)\Delta C$	$x\in(B\Delta C)$	$x\in A\Delta(B\Delta C)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

On a donc montré

$$\forall x \in E, (x \in A \triangle (B \triangle C)) \Leftrightarrow (x \in (A \triangle B) \triangle C),$$

ce qui montre $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
Remarque. *On peut voir qu'un élément* $x \in E$ *appartient à* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ *si et seulement s'il appartient à un nombre impair des trois ensembles (donc ou bien à l'un des trois, ou bien aux trois).*

(iv) *Posons* $I = \varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

On a alors $A \triangle I = A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$. *De même,* $I \triangle A = A \triangle I = A$, *d'après (ii).*

(v) *Soit* $A \in \mathscr{P}(E)$.

Posons $B = A \in \mathscr{P}(E)$.

On a donc $A \triangle B = A \triangle A = \varnothing$ *d'après (i).*

(vi) *Posons* $T = E \in \mathscr{P}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

On a $A \triangle T = A \triangle E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A$. *De même,* $T \triangle A = A \triangle E = E \setminus A$, *d'après (ii).*

3. *Sans utiliser une table de vérité, montrer que :*

$$\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B.$$

1ère méthode : Faire la table de vérité.

Soit $x \in E$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in \overline{A}$	$x \in \overline{B}$	$x \in A \triangle B$	$x \in \overline{A} \triangle \overline{B}$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

donc $\boxed{\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B}$.

2ème méthode :

$$\begin{aligned}
\overline{A} \triangle \overline{B} &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= \overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup B} \text{ d'après les lois de Morgan} \\
&= \overline{A \cap B} \cap (A \cup B) \text{ car } C \setminus D = C \cap \overline{D} \\
&= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \text{ car } C \cap D = D \cap C \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ car } C \setminus D = C \cap \overline{D} \\
&= A \triangle B, \text{ ce qui conclut la preuve.}
\end{aligned}$$

Exercice 19. Équation ensembliste. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$, l'équation $A \cup X = B$, d'inconnue X.*

On procède par analyse-synthèse. *Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation ensembliste.*

- *Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \cup X = B$. Alors $A \subset B$ et $X \subset B$. Faisons une disjonction de cas.*
  - ***Premier cas*** *: si $A \not\subset B$ alors $\mathscr{S} = \varnothing$.*
  - ***Deuxième cas*** *: on suppose que $A \subset B$.*
    On conjecture à l'aide d'un dessin $(B \setminus A) \subset X$. Montrons cette inclusion.
    Soit $x \in B \setminus A$. Alors $x \in B$ donc $x \in A \cup X$.
    Mais $x \notin A$, donc $x \in X$.
    Ainsi, on obtient la condition : $\underline{(B \setminus A) \subset X \subset B}$.
- *Réciproquement, supposons toujours $A \subset B$ et considérons $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $(B \setminus A) \subset X \subset B$.*
  Vérifions que $A \cup X = B$.
  En faisant l'union avec A, on obtient : $B \subset A \cup X \subset A \cup B = B$, la dernière égalité étant une conséquence de $A \subset B$. Par double inclusion, on obtient donc l'égalité d'ensembles : $\underline{A \cup X = B}$.

En conclusion, $\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } A \not\subset B \\ \{X \in \mathscr{P}(E) \mid (B \setminus A) \subset X \subset B\} & \text{sinon.} \end{cases}}$

Remarque : $\{X \in \mathscr{P}(E) \mid (B \setminus A) \subset X \subset B\} = \{(B \setminus A) \cup Y \mid Y \in \mathscr{P}(A)\}$.

Exercice 20. Union et intersection d'une famille d'ensembles.

1. *Montrer* $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[\; = \;]-1, 2[$.
2. *Que vaut* $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$ *?*

Correction.

1. *Les deux termes de l'égalité sont des parties de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elles sont égales par double inclusion.*
   - *Soit* $y \in \displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.
     On peut trouver $x_0 \in [0,1]$ tel que $y \in \,]x_0 - 1, x_0 + 1[$.
     On a alors
     - *d'une part : $y < x_0 + 1 \leq 2$;*
     - *de l'autre : $y > x_0 - 1 \geq -1$,*

     donc $y \in \,]-1, 2[$.
     Autre argument : *pour tout $x \in [0,1]$, on a $]x-1, x+1[\subset]-1, 2[$ donc leur union est encore une partie de $]-1, 2[$.*
   - *Réciproquement, soit $y \in \,]-1, 2[$.*
     On distingue deux cas :
     - *si $y \in \,]-1, 1[$, alors on a $y \in \,]0-1, 0+1[$, donc* $y \in \displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$ *;*

- *si* $y \in]0,2[$*, alors on a* $y \in]1-1, 1+1[$*, donc* $y \in \displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.

Comme ces deux cas recouvrent toutes les possibilités (car $]-1,1[\cup]0,2[=]-1,2[$*), on a montré l'inclusion réciproque, ce qui conclut la preuve.*
Autre argument : *les deux intervalles* $]-1,1[$ *et* $]0,2[$ *font partie de l'union (pour* $x=0$ *et* $x=1$ *respectivement) donc leur union (qui vaut* $]-1,2[$*) est incluse dans* $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.

2. *On procède de la même façon pour montrer que* $\boxed{\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]0,1[}$.

- *Soit* $y \in \displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.
  On a donc en particulier $y \in]0-1, 0+1[=]-1,1[$ *et* $y \in]1-1, 1+1[=]0,2[$*. Cela entraîne à la fois* $0 < y$ *et* $y < 1$*, donc* $y \in]0,1[$.
  Autre argument : *les deux intervalles* $]-1,1[$ *et* $]0,2[$ *font partie de l'intersection (pour* $x=0$ *et* $x=1$ *respectivement) donc leur intersection (qui vaut* $]0,1[$*) contient* $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.
- *Réciproquement, soit* $y \in]0,1[$.
  Montrons $y \in \displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$*, c'est-à-dire* $\forall x \in [0,1],\ y \in]x-1, x+1[$.
  Soit $x \in [0,1]$.
  - *On a* $x \leq 1$*, donc* $x-1 \leq 0$*. Or,* $0 < y$*, d'où* $x-1 < y$.
  - *De même, on a* $0 \leq x$*, donc* $1 \leq x+1$*. Or,* $y < 1$ *d'où* $y < x+1$.

  Ainsi, $y \in]x-1, x+1[$.
  Cela montre $y \in \displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$ *et conclut la preuve.*

Différents types de raisonnement

Exercice 21. Fonctions croissantes. *Montrer que la composée de deux fonctions croissantes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est encore une fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Correction. *Soient* f *et* g *deux fonctions croissantes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Montrons que $g \circ f$ *est croissante, c'est-à-dire que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Longrightarrow g(f(x)) \leq g(f(y))$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x \leq y$.
f *étant croissante, on a* $f(x) \leq f(y)$.
On peut alors appliquer la croissance de g *aux réels* $f(x)$ *et* $f(y)$ *: ceux-ci vérifient bien l'hypothèse* $f(x) \leq f(y)$.
On obtient ainsi l'inégalité voulue $g(f(x)) \leq g(f(y))$.
On a donc montré que $g \circ f$ *est croissante.*
Ainsi, $\boxed{\text{la composée de deux fonctions croissantes est encore une fonction croissante}}$.

Exercice 22. Résolution d'inéquation dans $\mathbb{R}$. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+6| \leq |x-10|$.*

Correction. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que :*

$$|x+6| = \begin{cases} -6-x & \text{si } x \leq -6 \\ x+6 & \text{si } x > -6. \end{cases} \qquad \text{et} \qquad |x-10| = \begin{cases} 10-x & \text{si } x \leq 10 \\ x-10 & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

*On pourrait procéder par **disjonction de cas**.*
*Sinon, on raisonne **par équivalences**.*
Tout d'abord, on a :

$$|x+6| \leq |x-10| \iff (x+6)^2 \leq (x-10)^2.$$

> *En effet, le sens direct est une conséquence de la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et du fait que la valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ y^2 = (-y)^2 = |y|^2$.*
> *Le sens réciproque est une conséquence de la croissance de la fonction racine carrée et du fait bien connu que $\forall y \in \mathbb{R},\ \sqrt{y^2} = |y|$.*

Puis, on a :

$$\begin{aligned}(x+6)^2 \leq (x-10)^2 &\iff x^2 + 12x + 36 \leq x^2 - 20x + 100 \\ &\iff 32x \leq 64 \\ &\iff x \leq 2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ de l'inéquation } |x+6| \leq |x-10| \text{ est l'intervalle }]-\infty, 2]}$.

Exercice 23. Résolution d'équation dans $\mathbb{R}$. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x+6}$.*

Première méthode : *Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation.*

Analyse. *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{x+6}$. Alors $x^2 - x - 6 = 0$. Ainsi, $(x-3)(x+2) = 0$ d'où $x = 3$ ou $x = -2$ (conditions nécessaires). On a donc montré $\mathscr{S} \subset \{-2; 3\}$.*

Synthèse. *On a $\sqrt{3+6} = 3$ donc 3 est bien solution.*
$\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2$ donc -2 n'est pas solution.

Conclusion. *Ces deux étapes ont permis de montrer que $\mathscr{S} \subset \{3\}$ et $\{3\} \subset \mathscr{S}$ d'où* $\boxed{\mathscr{S} = \{3\}}$.

Deuxième méthode (par équivalences) : *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned}x = \sqrt{x+6} &\iff \begin{cases} x^2 = x+6 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(x+2) = 0 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -2 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\iff (x = 3).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \{3\}}$.

Exercice 24. Minorer un maximum. *Montrer* $\forall x \in \mathbb{R},\ \max\{x^2, (x-2)^2\} \geq 1$.

Correction. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. ***Il s'agit en fait de montrer la disjonction :*** $\boldsymbol{x^2 \geq 1}$ ***ou*** $\boldsymbol{(x-2)^2 \geq 1}$.
Supposons donc que $x^2 < 1$. *Alors* $-1 < x < 1$ *donc* $-3 < x-2 < -1$. *Puisque la fonction carrée est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$, *on en déduit* $(x-2)^2 > (-1)^2 = 1$.
On a donc bien $\boxed{x^2 \geq 1 \text{ ou } (x-2)^2 \geq 1 \text{ i.e. } \max\{x^2,(x-2)^2\} \geq 1, \text{ ceci pour tout } x \in \mathbb{R}}$.
Remarque. *Si on avait du montrer que* $\max(a,b) \leq c$, *il aurait fallu montrer que* $a \leq c$ *et* $b \leq c$.

Exercice 25. Principe des tiroirs. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que si l'on range* $n+1$ *chaussettes dans* n *tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.*

Correction. *On doit montrer l'implication « si on a* $n+1$ *chaussettes à ranger dans* n *tiroirs, alors il existe au moins un tiroir contenant* 2 *chaussettes ou plus ».*
Supposons donc que l'on range $n+1$ *chaussettes dans* n *tiroirs.*
Montrons qu'il existe au moins un tiroir contenant 2 *chaussettes ou plus.*
Pour cela, raisonnons par l'absurde.
Supposons donc que chaque tiroir contienne 0 *ou* 1 *chaussette.*
Comme il y a n *tiroirs, cela signifie que l'on a rangé au plus* n *chaussettes, et on tient là une contradiction !*
Ainsi, $\boxed{\text{pour ranger } n+1 \text{ chaussettes dans } n \text{ tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient } 2 \text{ chaussettes ou plus}}$.

Exercice 26. Inégalités en bataille !

1. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. *Soit* $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3$.
   Montrer que l'un des trois produits $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ *est inférieur ou égal à* $\frac{1}{4}$.

Correction.

1. *On peut étudier la fonction* $x \mapsto x(1-x)$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Raisonnons par l'absurde et supposons que les trois produits sont strictement supérieurs à* $\frac{1}{4}$:

$$a(1-b) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-c) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Par produit d'inégalités ***positives****, on a*

$$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$*) :*

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \tag{$\clubsuit$}$$

Or, on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, *donc on a*

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-b) \leq \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-c) \leq \frac{1}{4}$$

Et on a $a(1-a) \geq 0$ *(en effet,* $a \geq 0$ *par hypothèse, et l'inégalité* $c(1-a) > \frac{1}{4}$ *implique que* $1-a \geq 0$ *car* $c \geq 0$*).*

De la même façon $b(1-b) \geq 0$ *et* $c(1-c) \geq 0$.

Par produit d'inégalités ***positives****, on a*

$$a(1-a) \times b(1-b) \times (1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$*) :*

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui contredit l'inégalité ($\clubsuit$) *précédente.*

Exercice 27. Non-linéarité de la conjugaison.
L'assertion $\exists\,(a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \overline{z} = az + b$ *est-elle vraie ou fausse ? Justifier.*

Correction. $\boxed{\textit{L'assertion est fausse}}$. *Supposons par l'absurde que l'on puisse trouver un couple* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *tel que*

$$(\diamondsuit) \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{z} = az + b$$

En appliquant $(\diamondsuit)$ *à* $z = 0$, *on obtient* $0 = a \times 0 + b$, *c'est-à-dire* $\underline{b = 0}$.
La relation $(\diamondsuit)$ *devient alors* $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{z} = az$.
En appliquant cette nouvelle relation à $z = 1$, *on obtient* $\overline{1} = a \times 1$, *c'est-à-dire* $\underline{a = 1}$.
Il s'ensuit que l'on a $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \overline{z} = z$, *ce qui est absurde (cela est faux pour* i*, par exemple).*

Exercice 28. Méli-mélo d'irrationnels.

1. *Montrer que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*
2. *Existe-t-il deux irrationnels* a *et* b *tels que* $a^b \in \mathbb{Q}$ *?*
3. *Montrer* $\forall x \in \mathbb{Q},\ x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Correction.

1. *Raisonnons par l'absurde. Supposons que* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
   Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *et la fraction* $\frac{p}{q}$ *est irréductible.*
   On a donc $p = \sqrt{2}q$, *d'où* $p^2 = 2q^2$ *donc* p^2 *est pair (et d'après un exemple du cours),* p *est pair.*
   Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $p = 2k$. *Puis* $4k^2 = 2q^2$, *d'où* $q^2 = 2k^2$ *donc* q^2 *est pair d'où* q *est pair.*
   La fraction $\frac{p}{q}$ *est donc réductible, ce qui contredit l'hypothèse de départ.*
   Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

2. *La réponse est* $\boxed{\textit{oui}}$. *Prouvons-le par disjonction de cas.*

   - *Si* $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, *alors il suffit de prendre* $a = b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   - *Sinon,* $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ *donc il suffit de prendre* $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ *et* $b = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   $\boxed{\textit{Dans tous les cas, on a montré l'existence de deux réels } a \textit{ et } b \textit{ non rationnels tels que } a^b \in \mathbb{Q}}$.

3. *Soit* $x \in \mathbb{Q}$. *Raisonnons par l'absurde. Supposons que* $y = x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
   Alors $\sqrt{2} = y - x \in \mathbb{Q}$, *ce qui est absurde. Ainsi,* $\underline{x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$.

Exercice 29. Récurrence ou pas ?

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$, *où on rappelle que* $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

   Soit, on montre cette double inégalité par une récurrence simple, soit, on fait une preuve directe.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'une part, on a : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k \leq n$. *En multipliant ces* n *inégalités de termes positifs, on obtient :* $\underline{n! \leq n^n}$.
   D'autre part, on a : $\forall k \in [\![2, n]\!],\ 2 \leq k$. *En multipliant ces* $n - 1$ *inégalités de termes positifs, on obtient :* $\underline{2^{n-1} \leq n!}$.
   On a bien l'encadrement souhaité.

2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

   Correction. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$: « $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ».
   Montrons par récurrence simple $P(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$ *donc* $P(1)$.

   Hérédité : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$. *On a donc* $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

   En ajoutant $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, *on obtient*

   $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

   Or,

   $$\begin{aligned} 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} &\iff \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &\iff \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad \textit{quantité conjuguée,} \end{aligned}$$

   et $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ *est vraie (car* $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$*), donc d'après les équivalences précédentes, on sait que* $2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$, *ce qui permet d'en conclure* $P(n+1)$.

Conclusion : *Par théorème de récurrence, on a* $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}}$.

Sinon, par preuve directe :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par quantité conjuguée, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Donc

$$\forall k \geq 1,\ \sqrt{k} - \sqrt{k-1} > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ et par télescopage, on obtient : $\sqrt{n} > \frac{1}{2}S_n$ d'où $S_n < 2\sqrt{n}$, ce qui est l'inégalité souhaitée.

3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(x)u_{n+1} - u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(nx)$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n = 2\cos(nx)$ ».
Montrons par récurrence double $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : *Les conditions initiales donnent $P(0)$ et $P(1)$.*

Hérédité : *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$. Par définition,*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2\cos(x)u_{n+1} - u_n \\ &= 2\cos(x)2\cos((n+1)x) - 2\cos(nx) && \text{par HR} \\ &= 2\cos((n+2)x) + 2\cos(nx) - 2\cos(nx) && \text{car } 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= 2\cos((n+2)x). \end{aligned}$$

On a donc $P(n+2)$.

Conclusion : *Par théorème de récurrence double, on a* $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\cos(nx)}$.

Exercice 30. Inégalité du binôme.
Montrer que pour tous réels $a, b > 0$ distincts et tout entier $n \geq 21$, on a l'inégalité

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n.$$

Correction. *Si on procède par récurrence, l'inégalité clé à montrer est*

$$2^{n-1}\left(a^{n+1} + b^{n+1} + ab^n + a^n b\right) < 2^n\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right),$$

qui est équivalente, après simplification, à

$$a^{n+1} + b^{n+1} - ab^n - a^n b > 0,$$

i.e. $(a-b)(a^n-b^n)>0$, *ce qui est vrai car* $x\mapsto x^n$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *vu que* $n\geq 1$.

Exercice 31. Entiers de la forme $x+x^{-1}$.
Soit $x\in\mathbb{R}^*$ *tel que* $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$. *En procédant par récurrence double, montrer que* $\forall n\in\mathbb{N},\ x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$.
Indication : *on pourra développer un produit* $\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x^q+\frac{1}{x^q}\right)$, *avec* p *et* q *bien choisis.*

Correction. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *notons* $H(n)$ *l'assertion « * $x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$ *». Montrons* $\forall n\in\mathbb{N}, H(n)$ *par récurrence double.*

Initialisation. *Par hypothèse, on a* $H(1)$.
De plus, $x^0+\frac{1}{x^0}=2\in\mathbb{Z}$. *L'initialisation est assurée par* $H(0)$ *et* $H(1)$.

Hérédité. *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $H(n)$ *et* $H(n+1)$.
On écrit :

$$x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}=\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\in Z.$$

Exercice 32. Une analyse-synthèse. *On souhaite déterminer toutes les fonctions* f *définies et continues sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et vérifiant*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)f(y).$$

On raisonne par analyse-synthèse.

1. *Phase d'analyse : soit* f *une fonction solution du problème.*

   (a) *Montrer que si* f *s'annule en un point, alors* f *est la fonction nulle.*

   Supposons qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0)=0$.
   Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0$, *donc* f *est nulle.*

   Dans toute la suite, on suppose que f *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.

   (b) *Montrer que* f *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$.

   $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(x/2+x/2)=f(x/2)^2\geq 0$. *Puisqu'on est dans le cas où* f *ne s'annule pas, on a même* $\boxed{f \text{ strictement positive sur } \mathbb{R}}$.

   (c) *Déterminer* $f(0)$.

   $f(0)=f(0+0)=f(0)^2$ *donc* $f(0)(1-f(0))=0$ *d'où* $f(0)=0$ *ou* $f(0)=1$. *Puisque* f *ne s'annule pas, on a* $\boxed{f(0)=1}$.

   (d) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=f(1)^n$.

Récurrence

(e) *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ f(k) = f(1)^k$.

Soient $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $k = -n$.
$1 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n)f(-n)$. f *ne s'annulant pas, on a :* $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{f(1)^n} = f(1)^{-n}$, *d'où le résultat.*

(f) *Montrer que pour tout* $r \in \mathbb{Q},\ f(r) = f(1)^r$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. *Il existe* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $r = \dfrac{p}{q}$ *et cette fraction est irréductible.*
Alors $p = qr$, *d'où* $f(p) = f(r + \cdots + r) = f(r)^q$ *(en itérant la propriété de* f*).*
Par ailleurs, puisque $p \in \mathbb{Z}$, *on a d'après (d) :* $f(p) = f(1)^p$.
Ainsi, $f(r) = f(1)^{p/q} = f(1)^r$. *CQFD.*

On admet maintenant que l'on a étendu la propriété à $\mathbb{R}$ *et que l'on a pour tout* $x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1)^x$.

(g) *Justifier qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(1) = e^\alpha$.

$f(1) > 0$ *et la fonction exponentielle est surjective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *donc il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(1) = e^\alpha$.

(h) *En déduire la forme de la fonction* f.

En considérant un tel α, *on a pour tout* $x \in \mathbb{R},\ f(x) = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x}$.
La conclusion de la phase d'analyse est que $f = 0$ *ou il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f : x \mapsto e^{\alpha x}$.

2. *Phase de synthèse : vérifier que les fonctions obtenues sont effectivement solutions du problème.*

   Réciproquement la fonction nulle et les fonctions exponentielles sont bien continues et vérifient l'équation.

3. *Conclure.*

   $\boxed{\text{Les fonctions solutions sont donc la fonction nulle et les fonctions } x \mapsto e^{\alpha x}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$.

Exercice 33. Une autre analyse-synthèse. *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que*

♠
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Correction. *On procède par analyse-synthèse.*

Analyse. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* ♠.

En particulier, l'assertion ♠ *pour* $x = 0$ *fournit :*

$$(\star) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0)f(y) - f(0) = y$$

En particulier, l'assertion ♠ pour $y = 0$ fournit :

$$f(0)^2 - f(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

Ainsi, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

• *Montrons que le cas $f(0) = 0$ est impossible.*

Supposons $f(0) = 0$. En reprenant l'égalité précédente $(\star)$ avec $y = 1$, on a

$$f(0)f(1) - f(0) = 1$$

et comme on suppose $f(0) = 0$, on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde.

On a donc $f(0) = 1$. L'égalité $(\star)$ devient

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 1 \times f(y) - 1 = y$$

On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = y + 1$$

Ainsi, la seule fonction solution possible est

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Ici, dans cet exercice, à la fin de l'analyse, on trouve qu'il y a 0 ou 1 fonction à vérifier ♠

Synthèse. *Montrons que la fonction $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ vérifie la condition ♠.*

Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{array}{rcl} f_0(x)f_0(y) - f_0(xy) & = & (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ & = & x + y \end{array}$$

Bilan. *On a montré l'égalité d'ensembles*

$$\Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ vérifie } \spadesuit \Big\} = \{x \mapsto x+1\}$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions vérifiant la condition ♠ est l'ensemble $\{x \mapsto x + 1\}$.

Autrement dit, il n'y a qu'une seule fonction à vérifier la condition ♠ à savoir $x \mapsto x + 1$.