

Sous-espaces vectoriels, combinaison linéaire

Exercice 1. 1. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = z + t = 0\}$, décrivez par les équations linéaires. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $G = \{(t + 2u, t - 2u, u) \in \mathbb{R}^3 \mid (t, u) \in \mathbb{R}^2\}$, décrivez par des paramétrages linéaires. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. On écrit :

$$F = \{(x, 2x+z, z, -z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 2, 0, 0) + z(0, 1, 1, -1) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, -1)).$$

2. On écrit :

$$G = \{(t + 2u, t - 2u, u) \in \mathbb{R}^3 \mid (t, u) \in \mathbb{R}^2\} = \{t(1, 1, 0) + u(2, -2, 1) \mid (t, u) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2),$$

avec $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (2, -2, 1)$.

Ainsi, G est le sous-espace vectoriel engendré par e_1 et e_2 donc G est un sous-espace vectoriel.

Question supplémentaire : la famille (e_1, e_2) est-elle libre ?

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$. Alors $(\alpha + 2\beta, \alpha - 2\beta, \beta) = (0, 0, 0)$. Donc $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$.

Ainsi, (e_1, e_2) est une famille libre donc $\dim(G) = 2$.

Exercice 2. Pour a dans $\mathbb{R}$, on pose $E_a = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = a\}$.

Caractériser à l'aide de a le fait que E_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- Pour que E_a soit un espace vectoriel, il faut que $0 = (0, 0, 0, 0) \in E_a$, donc que $a = 0$ (condition nécessaire sur a).
- Regardons si E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$E_0 = \{(-2y - 3z - 4t, y, z, t) \mid (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1)) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3),$$

donc E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, $a = 0$ est une condition suffisante sur a pour que E_a soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

En conclusion,

$$\boxed{E_a \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \iff a = 0}.$$

Remarque. (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E_0 . Comme en plus, elle est libre (regarder la 2ème, 3ème, puis 4ème composante), c'est une base de E_0 .

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des...1. sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$.

(b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$.

(a) $E_1 = \text{Vect}(a, b)$ avec $a = (1, 0, 3)$ et $b = (0, 1, -7)$ et $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ donc E_1 est un ssev de $\mathbb{R}^3$.
 Rq : (a, b) est une famille génératrice de E_3 et libre donc une base de E_1 .

(b) Posons $u = (2, 0, 2)$ et $v = (1, 0, -1)$. u et v appartiennent à E_2 mais $u + v = (3, 0, 1) \notin E_2$ donc E_2 n'est pas un ssev de $\mathbb{R}^3$.

2. sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

(a) $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(b) $E_4 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_2\}$.

(a) $E_3 = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc E_3 est un ssev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rq : (A, B) est une famille libre et génératrice de E_3 donc une base de E_3 .

(b) $0_2^2 = 0_2 \neq I_2$ donc $0_2 \notin E_4$ donc E_4 n'est pas un ssev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

(a) $E_5 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

(b) $E_6 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0\}$.

(c) $E_7 = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}, u_N = 0\}$.

(a) E_5 contient l'application nulle et est stable par CL, donc E_5 est un ssev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(b) E_6 contient l'application nulle et est stable par CL, donc E_6 est un ssev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(c) E_7 n'est pas un ssev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, car non stable par CL. Contre-exemples :

- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n - 1$. Alors (u_n) et $(v_n) \in E_7$ mais pas $(u_n - v_n)$.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (s'annule pour $n = 1$) et $v_n = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (s'annule pour $n = 0$) mais $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = 1$ ne s'annule jamais.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ et $v_n = (n - 1)^2$. Alors (u_n) et $(v_n) \in E_7$ mais pas $(u_n + v_n)$, car $u_n + v_n = 0 \Leftrightarrow n^2 + (n - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow n^2 = (n - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0 = 1$, ce qui n'est pas.

4. sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(a) E_8 , l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ s'écrivant comme différence de deux fonctions croissantes.

(b) $E_9 = \{f : x \mapsto a \cos(x - \varphi) \mid (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (a)
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = \text{Id}_{\mathbb{R}} - \text{Id}_{\mathbb{R}} \in E_8$, avec $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ croissante, ou bien $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} - 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, avec $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ croissante, donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in E_8$.
 - Pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, supposons que $f_i = g_i - h_i$ avec g_i, h_i des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f_1 + f_2 = \underbrace{(g_1 + g_2)}_{\text{croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}} - \underbrace{(h_1 + h_2)}_{\text{croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$ donc $f_1 + f_2 \in E_8$.
 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E_8$. Alors il existe g, h croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = g - h$.
 - Si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f = \lambda g - \lambda h$ est encore la différence de deux fonctions croissantes donc $\lambda f \in E_8$.
 - Si $\lambda < 0$, alors $\lambda f = \lambda g - \lambda h = \underbrace{-\lambda h}_{\text{croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}} - \underbrace{(-\lambda g)}_{\text{croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$

Ainsi, E_8 est un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- (b)
- On a clairement, que la fonction nulle appartient à E_9 et E_9 est stable par multiplication externe.
 - Soit $(f, g) \in E_9^2$. Alors il existe a, b, φ, ψ tels que $f : x \mapsto a \cos(x - \varphi)$ et $g : x \mapsto b \cos(x - \psi)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= a \cos(x - \varphi) + b \cos(x - \psi) \\ &= a \cos x \cos \varphi + a \sin x \sin \varphi + b \cos x \cos \psi + b \sin x \sin \psi \\ &= \cos x (a \cos \varphi + b \cos \psi) + \sin x (a \sin \varphi + b \sin \psi) \\ &= A \cos x + B \sin x. \end{aligned}$$

- Si $(A, B) = (0, 0)$, alors $f + g = 0$ donc $f + g \in E_9$.
- Sinon, $(A, B) \neq (0, 0)$ donc $A^2 + B^2 > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (indépendant de x) tel que $\cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ donc

$$(f + g)(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \theta).$$

Ainsi, là encore, $f + g \in E_9$.

Donc E_9 est un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Sinon : on a clairement vu que $f \in \text{Vect}(\cos, \sin)$. Donc $E_9 \subset \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Réciproquement, $\cos \in E_9$ (avec $(a, \varphi) = (1, 0)$) et $\sin \in E_9$ (avec $(a, \varphi) = (1, \pi/2)$) et on montre comme au dessus que pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on a $A \cos + B \sin \in E_9$. Ainsi, $\text{Vect}(\cos, \sin) \subset E_9$, puis l'égalité, ce qui assure que E_9 est un ssev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque : en cours de route, on a montré que $E_9 \subset \text{Vect}(\cos, \sin)$. On a de manière évidente $\cos, \sin \in E_9$. Sachant que E_9 est stable par CL, on en déduit que $\text{Vect}(\cos, \sin) \subset E_9$.

Ainsi, $E_9 = \text{Vect}(\cos, \sin)$, ce qui prouve que la famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de E_9 . De plus, $(\cos, \sin)$ est libre donc $(\cos, \sin)$ est une base de E_9 .

Exercice 4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Traduire la question « w est-il combinaison linéaire de u et v ? » en termes de systèmes linéaires.

2. Montrer que si u et v ne sont pas colinéaires, alors la famille (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire une classification de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. Le vecteur w est combinaison linéaire de u et v si et seulement si le système linéaire

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu = x \\ c\lambda + d\mu = y, \end{cases}$$

d'inconnues λ et μ , est compatible.

2. Supposons que u et v ne sont pas colinéaires. La famille (u, v) est donc libre.

Le système linéaire homogène

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu = 0 \\ c\lambda + d\mu = 0 \end{cases}$$

n'a donc que la solution nulle.

Par caractérisation des matrices inversibles, on en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible.

À son tour, cela entraîne que le système de la première question est compatible, quel que soit le vecteur $w \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.

3. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

On procède à une grande disjonction de cas.

Premier cas : V ne contient pas de vecteur non nul. On a alors

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deuxième cas : V contient deux vecteurs non colinéaires. Soit (u, v) une famille de deux tels vecteurs. D'après la question précédente, (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit que

$$V \supset \text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2,$$

donc $V = \mathbb{R}^2$, car l'autre inclusion est automatique.

Troisième cas : les autres cas. Supposons que V n'appartienne à aucun des deux cas précédents.

Comme on n'est pas dans le premier cas, on peut trouver $u \in V$ non nul. On va montrer $\text{Vect}(u) = V$.

Comme $u \in V$, on a $\text{Vect}(u) \subset V$ par stabilité par combinaison linéaire.

Réciproquement, soit $v \in V$.

Comme on n'est pas dans le deuxième cas, on sait que u et v sont colinéaires. On a donc $v \in \text{Vect}(u)$ ou $u \in \text{Vect}(v)$.

Si $u \in \text{Vect}(v)$, on peut trouver $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda v$. Puisque $u \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a nécessairement $\lambda \neq 0$, donc $v = \frac{1}{\lambda}u \in \text{Vect}(u)$.

Ainsi, quoi qu'il arrive, $v \in \text{Vect}(u)$, ce qui montre l'inclusion $V \subset \text{Vect}(u)$ et conclut la démonstration.

Ainsi, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :

- le sous-espace vectoriel trivial $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;
- les droites $\text{Vect}(u)$, où $u \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur non nul ;
- l'espace ambiant $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 5. $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ? Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\omega\mathbb{R} = \{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

À quelle condition sur ω , l'ensemble $\omega\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

Correction.

- $\omega\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $0 \in \omega\mathbb{R}$ car $0 = \omega \times 0$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(z, z') \in (\omega\mathbb{R})^2$. On peut écrire $z = \omega x$ et $z' = \omega x'$ avec $(x, x') \in \mathbb{R}^2$.
On a $\lambda z + z' = \omega(\lambda x + x')$ avec $\lambda x + x' \in \mathbb{R}$ donc $\lambda z + z' \in \omega\mathbb{R}$.
Ainsi $\boxed{\omega\mathbb{R} \text{ est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{C}}.$
- Si $\omega\mathbb{R}$ était un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors puisque $\omega = \omega \times 1 \in \omega\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$, on aurait $i\omega \in \omega\mathbb{R}$. Or, par intégrité de $\mathbb{C}$, cela n'est possible que si $\omega = 0$.
Inversement, si $\omega = 0$ alors $\omega\mathbb{R} = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Ainsi, $\boxed{\omega\mathbb{R} \text{ est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } \mathbb{C} \text{ ssi } \omega = 0}.$

Vect

Exercice 6. Comparaison de Vect. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et A et B deux sous-ensembles non vides de E . Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

$A \cap B \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc

$$\boxed{\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)}.$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie : prendre $A = \{x\}$ et $B = \{2x\}$ avec $x \neq 0_E$.

Exercice 7. Égalité de deux Vect.

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que l'on a $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(\exp, x \mapsto \exp(-x))$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2)$ peut s'obtenir comme $\text{Vect}(g, h)$, pour deux fonctions $g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bien choisies.

Correction. Pour simplifier les notations, notons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(-x) \end{aligned}$$

afin d'éviter de traîner la notation plus lourde $x \mapsto \exp(-x)$.

1. • Les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

que l'on peut réécrire

$$\text{ch} = \frac{\exp + f}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh} = \frac{\exp - f}{2},$$

montrent que ch et sh sont combinaisons linéaires de $\exp$ et f , ce qui montre

$$\text{ch} \in \text{Vect}(\exp, f) \quad \text{et} \quad \text{sh} \in \text{Vect}(\exp, f).$$

Par stabilité par combinaison linéaire,

$$\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) \subset \text{Vect}(\exp, f).$$

- Réciproquement, on a les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \text{ch}(x) + \text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \text{ch}(x) - \text{sh}(x),$$

donc

$$\exp = \text{ch} + \text{sh} \quad \text{et} \quad f = \text{ch} - \text{sh},$$

donc

$$\exp \in \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) \quad \text{et} \quad f \in \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}).$$

Par stabilité par combinaison linéaire,

$$\text{Vect}(f, \exp) \subset \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}).$$

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, ce qui nous permet « d'éliminer » l'une des fonctions, par exemple $f : x \mapsto \cos(2x)$.

Montrons en effet $\boxed{\text{Vect}(f, \cos^2, \sin^2) = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)}$.

- On a clairement $\cos^2, \sin^2 \in \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
Par ailleurs, on vient de dire que $f = \cos^2 - \sin^2 \in \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit $\text{Vect}(f, \cos^2, \sin^2) \subset \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$.
- Réciproquement, on a clairement $\cos^2, \sin^2 \in \text{Vect}(f, \cos^2, \sin^2)$, donc, par stabilité par combinaison linéaire, $\text{Vect}(\cos^2, \sin^2) \subset \text{Vect}(f, \cos^2, \sin^2)$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 8. Le centre des matrices carrées est un sous-espace vectoriel.

On pose $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

1. Vérifier que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est non vide, stable par produit et combinaison linéaire.
2. Montrer que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \text{Vect}(I_n)$, i.e. l'ensemble des matrices scalaires.

Correction.

1. $I_n \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ donc $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \neq \emptyset$.
Soient $(M, N) \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par associativité du produit matriciel, on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A,$$

donc $MN \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, ce qui prouve que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est stable par produit.

De plus,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A,$$

donc $\lambda M + N \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, ce qui prouve que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est stable par combinaison linéaire.

2. Déjà fait, dans le TD calcul matriciel.

- On a $I_n \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est stable par combinaison linéaire donc $\text{Vect}(I_n) \subset Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
- Montrons l'inclusion réciproque :
Soit $M \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. En particulier, $\forall (i, j), ME_{i,j} = E_{i,j}M$.

1ère méthode. Or, $M = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} E_{k,\ell}$. On trouve alors :

$$\forall (i, j), \quad \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{k,j} = \sum_{\ell=1}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell}.$$

Ainsi,

$$\forall(i, j), \sum_{k=1, k \neq i}^n m_{k,i} E_{k,j} + (m_{i,i} - m_{j,j}) E_{i,j} - \sum_{\ell=1, \ell \neq j}^n m_{j,\ell} E_{i,\ell} = 0.$$

Or, la famille $(E_{p,q})_{p,q}$ étant libre (car une base), donc $m_{k,i} = 0$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ et $m_{i,i} = m_{j,j} = \lambda$ (en notant λ cette valeur commune).

Finalement, $M = \lambda I_n$ est bien une matrice scalaire.

2ème méthode.

$$\forall(i, j), \forall(p, q), (ME_{i,j})_{p,q} = (E_{i,j}M)_{p,q}.$$

Donc

$$\forall(i, j), \forall(p, q), \sum_{r=1}^n m_{p,r} (E_{i,j})_{r,q} = \sum_{r=1}^n (E_{i,j})_{p,r} m_{r,q}.$$

Donc

$$\boxed{\forall(i, j, p, q), m_{p,i} \delta_{j,q} = \delta_{i,p} m_{j,q}}.$$

En particulier :

- Pour $q = j$, on a : $\forall(i, p), p \neq i \Rightarrow m_{p,i} = 0$, ce qui prouve que M est diagonale.
- Pour $p = i$ et $q = j$, on a : $\forall(i, j), m_{i,i} = m_{j,j}$, ce qui prouve que les termes diagonaux de M sont tous égaux.

Ainsi, M est une matrice scalaire.

3ème méthode : en dessinant les matrices, on remarque que $ME_{i,j}$ est une matrice contenant la i -ème colonne de M en j -ème position et ses autres colonnes sont nulles.

$E_{i,j}M$ est la matrice contenant la j -ème ligne de M en i -ème position et les autres lignes sont nulles.

- En regardant le coefficient en position (i, j) , on obtient l'égalité : $m_{i,i} = m_{j,j}$, ce qui prouve que tous les coefficients diagonaux de M sont égaux. Notons λ cette valeur commune.
- En regardant la i -ème ligne de chaque matrice, on observe que $\forall k \neq j, m_{k,j} = 0$, ce qui prouve que M est diagonale.

Ainsi, $M = \lambda I_n$.

- On en déduit l'égalité : $\boxed{Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \text{Vect}(I_n)}.$

Exercice 9. Polynômes trigonométriques. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$f_p : x \mapsto \cos(px) \quad \text{et} \quad g_p : x \mapsto \cos^p(x).$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $F_N = \text{Vect}(f_0, \dots, f_N)$ et $G_N = \text{Vect}(g_0, \dots, g_N)$.

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}, F_N = G_N$.

Correction. Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Soit $p \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Grâce à la formule de Moivre, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(px) = \text{Re}(e^{ipx}) = \text{Re}((\cos x + i \sin x)^p).$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, puis en séparant les indices pairs/ impairs, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos(px) &= \text{Re} \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} i^k \sin^k x \cos^{p-k} x \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2\ell} (-1)^\ell \sin^{2\ell} x \cos^{p-2\ell} x \\ &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2\ell} (\cos^2 - 1)^\ell \cos^{p-2\ell} x \\ &= T_p(\cos x), \end{aligned}$$

où $T_p = \sum_{\ell=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2\ell} (X^2 - 1)^\ell X^{p-2\ell}$, est une somme de polynômes de degré p ($\forall \ell, (X^2 - 1)^\ell X^{p-2\ell}$ est de degré p), donc de degré au plus p (on pourrait en fait montrer que T_p est de degré p exactement).

Ainsi, $f_p \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_p)$. A fortiori, $f_p \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_N)$.

On a donc montré que $f_0, \dots, f_N \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_N)$.

Or, $\text{Vect}(f_0, \dots, f_N)$ est le plus petit s.e.v. à contenir $f_0, \dots, f_N$ donc $\boxed{\text{Vect}(f_0, \dots, f_N) \subset \text{Vect}(g_0, \dots, g_N)}$.

- Soit $p \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos^p x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^p = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{ikx} e^{-i(p-k)x} = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{i(2k-p)x}.$$

En prenant les parties réelles, il vient :

$$\cos^p x = \text{Re} \left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} e^{i(2k-p)x} \right) = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cos((2k-p)x).$$

La fonction $\cos$ étant paire, on a :

$$\cos^p x = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \cos(|2k-p|x).$$

Or, pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $-p \leq 2k-p \leq p$ donc $|2k-p| \in \llbracket 0, p \rrbracket$, ce qui prouve que g_p est une combinaison linéaire de $f_0, \dots, f_p$, donc $g_p \in \text{Vect}(f_0, \dots, f_p)$. A fortiori, $g_p \in \text{Vect}(f_0, \dots, f_N)$,

cela pour tout $p \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Donc $g_0, \dots, g_N \in \text{Vect}(f_0, \dots, f_N)$, et $\text{Vect}(g_0, \dots, g_N)$ est le plus petit s.e.v. à contenir $g_0, \dots, g_N$, donc $\boxed{\text{Vect}(g_0, \dots, g_N) \subset \text{Vect}(f_0, \dots, f_N)}$.

- Finalement, on a l'égalité souhaitée : $\boxed{\text{Vect}(g_0, \dots, g_N) = \text{Vect}(f_0, \dots, f_N)}$.

Supplémentaires

Exercice 10. Supplémentaires ou pas ?

1. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , supplémentaires dans E .
2. Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe mais non supplémentaires dans E .

Correction.

1. cf cours.

2. • F et G sont clairement des ssev de E (on peut les voir tous les deux comme des Vect).

- On a $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, si $M \in F \cap G$, il existe $(a, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ donc $a = 0 = k$ i.e. $M = 0$. Réciproquement, $0 \in F \cap G$ donc on a l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi, F et G sont en somme directe.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire comme somme d'un élément de F et G (raisonner par l'absurde). On peut aussi voir que $F + G = \left\{ \begin{pmatrix} k & a \\ a & k \end{pmatrix} \mid (a, k) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 11. Deux plans supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Soient

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de F et une base de G .
2. Exprimer G comme ensemble de vecteurs satisfaisant à deux équations.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Correction.

1. Après résolution d'un système linéaire, on trouve que $F = \left\{ \begin{pmatrix} -2z+t \\ z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, donc F

est un ssev de $\mathbb{R}^4$. Une base de F est clairement $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Pour G , la famille génératrice donnée est clairement libre, donc elle convient.

2. On vérifie par exemple que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}.$$

3. Un élément de $F \cap G$ peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} -2z+t \\ z-t \\ z \\ t \end{pmatrix}$, où $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $-2z+t = t$

et $z-t = z$. On a clairement $(z, t) = (0, 0)$, et le vecteur est nul. Cela montre que F et G sont en somme directe.

Pour montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$, on peut par exemple montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

est une base de $\mathbb{R}^4$, par exemple en utilisant la caractérisation des systèmes de Cramer pour se contenter de montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui est un calcul facile.

(On peut aussi argumenter pour dire que la première partie suffit : la caractérisation des systèmes de Cramer montre que, si notre matrice n'était pas inversible, on aurait une relation de liaison non triviale entre nos quatre vecteurs, que l'on va habilement écrire $\lambda u_1 + \mu u_2 = \xi v_1 + \eta v_2$. Ce vecteur appartient à la fois à F et à G , donc il est nul. Comme (u_1, u_2) (resp. (v_1, v_2)) est une base de F (resp. de G), il s'ensuit que les quatre coefficients sont nuls, ce qui conclut.)

Exercice 12. Hyperplan standard de $\mathbb{R}^n$. Soit $n \geq 2$. On note

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Correction. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On va montrer par analyse et synthèse que x se décompose de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Par confort d'écriture, notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Analyse. Soit $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$.

Comme $f \in F$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ vérifie $g_1 + \cdots + g_n = 0$.

On a donc $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + g_1 \\ \vdots \\ \lambda + g_n \end{pmatrix}$. En effectuant la somme des coordonnées, il vient

$$x_1 + \cdots + x_n = n\lambda + g_1 + \cdots + g_n = n\lambda,$$

d'où l'on tire $\lambda = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, puis $g = x - \lambda u$.

Synthèse. Posons $\lambda = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $f = \lambda u$ et $g = x - f$.

- On a clairement $x = f + g$.
- Par construction, $f = \lambda u \in F$.
- Reste à vérifier que $g \in G$.

La somme des coordonnées de g est

$$\begin{aligned} g_1 + \cdots + g_n &= (x_1 - f_1) + \cdots + (x_n - f_n) \\ &= x_1 + \cdots + x_n - n\lambda \\ &= 0, \end{aligned}$$

vu la définition de λ .

En conclusion, tout élément de $\mathbb{R}^n$ se décompose bien de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G . Cela démontre $\boxed{\mathbb{R}^n = F \oplus G}$.

Exercice 13. Supplémentaires dans un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. On définit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}, \quad F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y + t = 0 \right\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Correction. Remarque. On a traité dans le cours des exemples comme $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$, où l'espace décomposé en somme directe ($M_n(\mathbb{K})$) est l'espace « ambient ». Il n'y a dans ce cas pas de doute que $S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$: comme $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$, il en va de même de leur somme. On peut donc se concentrer sur la démonstration de l'existence et de l'unicité de l'écriture d'un élément de $M_n(\mathbb{K})$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.

Ici, il ne faut pas oublier de montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et que F et G sont des ssev de E , car ça n'est pas automatique. Commençons pas cela.

- D'abord, $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc E est un ssev de $\mathbb{R}^4$ donc $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ et $1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$. Par stabilité par combinaison linéaire, on en

déduit que $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset E$, et $\boxed{F \text{ est un ssev de } E}$.

On a $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E$, donc

$\boxed{G \text{ est un ssev de } E}$.

On en déduit que $F + G$ est un ssev de E donc $\boxed{F + G \subset E}$.

- Montrons désormais que $E = F \oplus G$. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E$. Montrons que v s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $(v_F, v_G) \in F \times G$ tel que $v = v_F + v_G$.

- Comme $v_F \in F$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_F = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$.
- On en déduit que

$$v_G = v - v_F = \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - \lambda \\ z - \lambda \\ t - \lambda \end{pmatrix}.$$

L'appartenance $v_G \in G$ donne alors

$$0 = (x - \lambda) + (z - \lambda) = (y - \lambda) + (t - \lambda),$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{x + z}{2} = \frac{y + t}{2}.$$

Synthèse. Réciproquement, posons $\lambda = \frac{x+z}{2}$.

Comme $v \in E$, on a $x + z = y + t$, donc on a également $\lambda = \frac{y+t}{2}$.

Posons également $v_F = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_G = v - v_F$.

- Il est déjà clair que $v_F \in F$.
- On a manifestement $v = v_F + v_G$.
- Reste à vérifier que $v_G \in G$. Sa définition montre que $v_G = \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - \lambda \\ z - \lambda \\ t - \lambda \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} (x - \lambda) + (z - \lambda) &= x + z - 2\frac{x+z}{2} = 0 \\ \text{et} \quad (y - \lambda) + (t - \lambda) &= y + t - 2\frac{y+t}{2} = 0, \end{aligned}$$

donc $v_G \in G$.

Cela conclut la démonstration de $E = F \oplus G$.

Exercice 14. Traces de supplémentaires. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que $A \oplus B = E$ et $A \subset C$.

Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C .

Correction.

- Tout d'abord, $A \subset C$, $(B \cap C) \subset C$, et C est stable par somme, donc $\underline{A + (B \cap C) \subset C}$.
- Soit $c \in C$. Alors $c \in E$ et $E = A \oplus B$, donc on peut trouver $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = a + b$. Par hypothèse, $A \subset C$, donc $a \in C$ puis $b = c - a \in C$. Ainsi, $b \in B \cap C$. Donc $c = a + b$, avec $a \in A$ et $b \in B \cap C$, donc $\underline{C \subset A + (B \cap C)}$.
- De plus, $A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B \underset{A \subset C}{=} A \cap B = \{0_E\}$, donc A et $(B \cap C)$ sont en somme directe.

En conclusion : $\boxed{A \oplus (B \cap C) = C}$.

Exercice 15. Des supplémentaires pour un même hyperplan.

Soit un vecteur v_0 de E , non nul. Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $E = H \oplus \text{Vect}(v_0)$.

Justifier que $v_0 \notin H$.

Montrer que tout vecteur $w \notin H$ vérifie $E = H \oplus \text{Vect}(w)$ (on montrera de manière séparée que la somme est directe, puis qu'elle fait E tout entier).

Correction.

- Si $v_0 \in H$, comme H est stable par multiplication externe et somme, on aurait $H + \text{Vect}(v_0) \subset H$, donc $E = H$: absurde. Donc $\boxed{v_0 \notin H}$.
- Soit $x \in H \cap \text{Vect}(w)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in H$ tels que $x = h = \lambda w$. Si $\lambda \neq 0$, alors $w = \frac{1}{\lambda}h \in H$ (vu que H est stable par CL), ce qui est exclu. Donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $H \cap \text{Vect}(w) \subset \{0_E\}$. Réciproquement, $0_E \in H \cap \text{Vect}(w)$, donc $H \cap \text{Vect}(w) = \{0_E\}$, d'où $\boxed{\text{la somme est directe}}$.
- Justifions la somme.
Écrivons $w = w_H + \lambda_w v_0$, avec $w_H \in H$ et $\lambda_w \in \mathbb{K}$. On a nécessairement $\lambda_w \neq 0$ (sinon, on aurait $w \in H$, ce qui est exclu).
Soit $x \in E$ que l'on essaie de décomposer sur $H \oplus \text{Vect}(w)$.

Par hypothèse, on sait que x se décompose sur $H \oplus \text{Vect}(v_0)$, disons $x = x_H + \lambda_x v_0$.

En remplaçant v_0 par $\frac{1}{\lambda_w}(w - w_H)$, on obtient (après agencement)

$$x = \left(x_H - \frac{\lambda_x}{\lambda_w} w_H \right) + \frac{\lambda_x}{\lambda_w} w,$$

qui est bien une écriture du type « un vecteur de H + un vecteur de $\text{Vect}(w)$ ».

Ceci montre que $E \subset H \oplus \text{Vect}(w)$. L'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité.

- **Remarque.** On peut montrer que H est un hyperplan de E . En effet, considérant l'unique application linéaire φ sur E telle que $\varphi|_H = 0$ et $\varphi(v_0) = 1_{\mathbb{K}}$. On a ainsi définie φ sur deux supplémentaires de E , donc φ est définie sur E , par $\forall h \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(h + \lambda v_0) = \lambda$. Par construction, on a bien $H \subset \text{Ker} \varphi$. Soit $x \in \text{Ker} \varphi$. Alors $x \in E$, et on peut trouver $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda v_0$. On a $\varphi(x) = 0$ donc $\lambda = 0$ d'où $x \in H$. Ainsi, $\text{Ker} \varphi \subset H$. On a donc l'égalité $H = \text{Ker} \varphi$, avec φ une forme linéaire sur E , non nulle (car $\varphi(v_0) = 1$). On en déduit que H est un hyperplan de E . Cet exercice permet de re-montrer un résultat des hyperplans vus en cours : $\forall w \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \text{Vect}(w)$.

Exercice 16. Supplémentaires dans $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, on considère les parties

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(\sin, \cos).$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Correction. F et G sont clairement des sous-espaces vectoriels de E . Montrons que $E = F \oplus G$.

Soit $h \in E$. Montrons que h se décompose de manière unique sur $F + G$, à l'aide d'une analyse-synthèse.

Analyse. Soient $f \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $h = f + \lambda \sin + \mu \cos$.

En évaluant en $0, \frac{\pi}{2}$ et π , on obtient le système :
$$\begin{cases} h(0) = f(0) + \mu \\ h(\pi/2) = f(0) + \lambda \\ h(\pi) = f(0) - \mu \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \mu = \frac{h(0) - h(\pi)}{2}, \lambda = \frac{2h(\pi/2) - h(0) - h(\pi)}{2} \text{ et } f = h - \lambda \sin - \mu \cos.$$

On obtient l'unicité en cas d'existence (tout est entièrement déterminé à l'aide de h).

Synthèse. Posons $\mu = \frac{h(0) - h(\pi)}{2}, \lambda = \frac{2h(\pi/2) - h(0) - h(\pi)}{2}$ et $f = h - \lambda \sin - \mu \cos$.

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi) = \frac{h(0) + h(\pi)}{2}$ et $f \in E$ donc $f \in F$.

De plus, $\lambda \sin + \mu \cos \in G$.

Et, $h = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{\lambda \sin + \mu \cos}_{\in G}$.

On obtient l'existence d'une décomposition de h sur $F + G$.

En conclusion, $E = F \oplus G$.

Exercice 17. Supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $T_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on rappelle que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = T_n^s(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Existence :** Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & i > j \\ 0 & i = j \\ -m_{j,i} & i < j \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & i > j \\ m_{i,i} & i = j \\ m_{i,j} + m_{j,i} & i < j \end{cases}.$$

Par construction, on a immédiatement $T \in T_n^s(\mathbb{K})$ et $A + T = M$. Justifions que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ i.e.

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Déjà, l'égalité est acquise pour les coefficients diagonaux.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$. Alors $a_{i,j} = -m_{j,i}$. De plus, puisque $j > i$, on a $a_{j,i} = m_{j,i}$ donc $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

De même, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i > j$, $a_{i,j} = m_{i,j}$ et puisque $j < i$, on a $a_{j,i} = -m_{i,j}$ donc $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Ainsi, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, ce qui prouve l'existence d'une telle décomposition.

Cela montre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset T_n^s(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = T_n^s(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

• **Unicité :**

1ère méthode. On a $T_n^s(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$, car la seule matrice à être triangulaire et antisymétrique est la matrice nulle (tous ses coefficients sont nuls).

2ème méthode. Soit $(T, T') \in T_n^s(\mathbb{K})^2$ et soit $(A, A') \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $M = A + T = A' + T'$. Regardons les termes dans le triangle inférieur strict.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i > j$. Alors : $m_{i,j} = a_{i,j} + 0 = a'_{i,j} + 0$. Ainsi, les termes sous-diagonaux de A' coïncident avec ceux de A . Puisque A et A' sont antisymétriques, on a en fait $A = A'$.

Ainsi, $T = M - A = M - A' = T'$ d'où $T = T'$.

On a donc prouvé que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = T_n^s(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18. Supplémentaires et suites/fonctions.

1. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
2. Soit E l'ensemble des fonctions dérivables en 0. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0\}$ et l'ensemble des fonctions affines sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Généraliser.

Correction.

1. On note E_0 l'ensemble des suites convergeant vers 0 et C l'ensemble des suites constantes.

On vérifie sans difficulté qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un moyen élégant est de remarquer que $C = \text{Vect}((1)_{n \in \mathbb{N}})$ et, si l'on dispose de cette notion, de remarquer que E_0 est le noyau de

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \end{aligned}$$

application dont le cours nous garantit la linéarité.

Pour montrer que $E = E_0 \oplus C$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et montrons par analyse et synthèse que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se décompose de manière unique en somme d'un élément de E_0 et d'un élément de C .

Analyse. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_0$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$.

Toutes ces suites sont convergentes. Les théorèmes d'opérations sur les limites montrent que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \\ &= 0 + \lambda.\end{aligned}$$

Cela détermine les deux suites : en notant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, on a les égalités $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$.

Synthèse. Réciproquement, notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Il est déjà clair que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Par construction, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$.
- Il reste à montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_0$. Pour cela, on remarque simplement que, par opérations,

$$v_n = u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0,$$

ce qui conclut.

Tout élément de E se décompose donc de manière unique en somme d'un élément de E_0 et d'un élément de C , donc $E = E_0 \oplus C$.

2. Par opérations^a, l'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions dérivables en 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines. On a $\mathcal{A} = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$, ce qui montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

On vérifie facilement que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$. Si l'on dispose de cette notion, on peut également remarquer que l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f &\mapsto (f(0), f'(0))\end{aligned}$$

est linéaire (à cause de la linéarité de la dérivation) et que F est son noyau.

On peut montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{A} \oplus F$ en effectuant un raisonnement par analyse et synthèse très proche de ceux qui précèdent. (Dans la phase d'analyse, une fois notre fonction décomposée en somme d'une fonction affine et d'un élément de F , il suffit de considérer la valeur de la fonction en 0 et la valeur de sa dérivée en 0 pour obtenir la pente et l'ordonnée à l'origine de la fonction affine, et donc la fonction affine elle-même).

Pour changer, on va rédiger la démonstration en montrant séparément les deux propriétés constitutives de la complémentarité (on « parachutera » donc au bon moment l'expression idoine pour la fonction affine, comme lors d'une analyse-synthèse « analyse cachée, synthèse visible »).

- Montrons que $\mathcal{A}$ et F sont en somme directe.

Soit $f \in \mathcal{A} \cap F$.

Comme $f \in \mathcal{A}$, on peut trouver $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto mx + p$.

Comme $f \in F$, on a $f(0) = f'(0) = 0$. L'égalité $f(0) = 0$ donne directement $p = 0$, et l'égalité $f'(0) = 0$ donne directement $m = 0$.

On en déduit que f est la fonction nulle.

L'inclusion réciproque étant automatique, on a montré $\mathcal{A} \cap F = \{0\}$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ et F sont en somme directe.

- Montrons que $\mathcal{A} + F = \mathcal{D}$.

Soit $f \in \mathcal{D}$.

Notons $p = f(0)$ et $m = f'(0)$. On définit $g : x \mapsto mx + p$ et $h = f - g$.

- On a clairement $f = g + h$.
- Par construction, $g \in \mathcal{A}$.
- Il reste à montrer que $h \in F$.
 - Déjà, $h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - p = 0$.
 - Par ailleurs, h est dérivable en 0 par opérations, et $h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - m = 0$.

Ainsi, $h \in F$.

L'inclusion réciproque étant automatique, on a montré $\mathcal{A} + F = \mathcal{D}$, ce qui conclut la démonstration.

On peut généraliser cet exemple : dans l'espace vectoriel $D^r(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont r fois dérivables^b, les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_r$ des fonctions polynomiales de degré $\leq r$ et $F_r = \left\{ f \in D^r(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r)}(0) \right\}$ sont supplémentaires.

a. C'est une conséquence directe de la définition de la dérivabilité en 0 et des théorèmes d'opérations sur les limites. Ce sera également un théorème d'opérations dans le cours sur la dérivabilité.

b. On pourrait considérer les fonctions r fois dérivables en 0, mais cette notion est un peu subtile, donc on la court-circuite ici.

Somme et intersection de sous-espaces vectoriels

Exercice 19. Calcul de somme et d'intersection. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les sous-espaces vectoriels

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(1, 1, 1).$$

Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Correction. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Montrons que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

Pour cela, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \lambda + \mu + \nu = y \\ \mu + \nu = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \mu = y - x \\ \mu + \nu = z \end{cases} & [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \mu = -x + y \\ \nu = x - y + z \end{cases} & [L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \\ &\iff \begin{cases} \lambda = y - z \\ \mu = -x + y \\ \nu = x - y + z \end{cases} & [L_1 \leftarrow L_1 - L_3]. \end{aligned}$$

Puisque tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a donc une décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \oplus \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = F \oplus G.$$

On a donc

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad F + G = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 20. Sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient A, B, C , et D des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

1. $A \cap B = A + B \implies A = B$.
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$. A-t-on égalité ?
3. $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.
4. $A \subset B \implies A + (B \cup C) = (A + B) \cap (A + C)$.
5. $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

Correction.

1. Supposons $A \cap B = A + B$. On a : $A \subset A + B = A \cap B \subset B$. De même $B \subset A$. D'où l'égalité $A = B$.
2.
 - Soit $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. On peut donc trouver $\beta \in A \cap B$ et $\gamma \in A \cap C$ tels que $x = \beta + \gamma$.
D'une part, $\beta, \gamma \in A$ et A est stable par somme, donc $x \in A$.
D'autre part, $\beta \in B$ et $\gamma \in C$ donc $x = \beta + \gamma \in B + C$.
Ainsi, $x \in A \cap (B + C)$, d'où l'inclusion souhaitée.
 - Pour montrer que l'on ne peut pas faire mieux (égalité) donnons un contre-exemple.
Considérons, dans $\mathbb{R}^2$, les sous-espaces vectoriels :

$$A = \text{Vect}((1, 1)), \quad B = \text{Vect}((1, 0)) \quad \text{et} \quad C = \text{Vect}((0, 1)).$$

On a $B + C = \text{Vect}((0, 1), (1, 0)) = \mathbb{R}^2$ et donc $A \cap (B + C) = A$.

En revanche, on a $A \cap B = A \cap C = \{(0, 0)\}$ et donc $(A \cap B) + (A \cap C) = \{(0, 0)\}$.

Puisque $(1, 1) \in A \setminus \{(0, 0)\}$, on n'a donc pas l'égalité.

3. Soit $x \in A + (B \cap C)$. Alors il existe $a \in A$ et $y \in B \cap C$ tels que $x = a + y$.
D'une part, $y \in B$ donc $x = a + y \in A + B$.
D'autre part, $y \in C$ donc $x = a + y \in A + C$.
Finalement, $x \in (A + B) \cap (A + C)$, d'où l'inclusion souhaitée.
4.
 - Tout d'abord, remarquons qu'on a toujours $A + (B \cap C) \subset A + B$ et $A + (B \cap C) \subset A + C$ donc $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.
 - Supposons maintenant que $A \subset B$, et montrons que $(A + B) \cap (A + C) \subset A + (B \cap C)$.
Soit $x \in (A + B) \cap (A + C)$. Sous l'hypothèse $A \subset B$, on a $A + B = B$ donc $x \in B$ et on peut trouver $a \in A$ (donc $a \in B$) et $c \in C$ tels que $x = a + c$.
En tant que différence de deux éléments de B , $c = x - a \in B$, donc $c \in B \cap C$.
Ainsi, $x \in A + (B \cap C)$, d'où $(A + B) \cap (A + C) \subset A + (B \cap C)$.
5. Soit $x \in (A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)$. Alors on peut trouver $\alpha \in A \cap B$, $\beta \in B \cap C$ et $\gamma \in C \cap A$ tels que $x = \alpha + \beta + \gamma$.
Premièrement, $x = (\alpha + \gamma) + \beta$ avec $(\alpha + \gamma) \in A$ et $\beta \in B$, donc $x \in A + B$.
Deuxièmement, $x = \alpha + (\beta + \gamma)$ avec $\alpha \in B$ et $(\beta + \gamma) \in C$, donc $x \in B + C$.

Troisièmement, $x = (\beta + \gamma) + \alpha$ avec $(\beta + \gamma) \in C$ et $\alpha \in A$, donc $x \in C + A$.
Ainsi, $x \in (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F + G = F + H \quad \text{et} \quad F \cap G = F \cap H \quad \text{et} \quad G \subset H.$$

1. Montrer que $G = H$.
2. L'hypothèse $G \subset H$ est-elle nécessaire ?

Correction.

1. On a déjà $G \subset H$ donc il suffit de montrer que $H \subset G$.

Soit $h \in H$.

On peut écrire : $h = 0_E + h \in F + H$ donc par hypothèse $h \in F + G$. Ainsi, il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $h = f + g$.

$f = h - g$ avec $h \in H$ et $g \in G$. Par hypothèse, $G \subset H$ donc $g \in H$. Puisque H est stable par soustraction, on a $f \in H$.

Donc $f \in F \cap H = F \cap G$. En particulier $f \in G$.

Ainsi, $h = f + g$ avec $f \in G$ et $g \in G$, et G est stable par addition, donc on a $h \in G$, ce qui montre que $H \subset G$.

2. Oui. Contre-exemple : pour $E = \mathbb{K}^2$, $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$, $H = \text{Vect}((1, 1))$, on a $\mathbb{K}^2 = F \oplus G = F \oplus H$ donc $F + G = F + H$ et $F \cap G = F \cap H$, mais que $G \neq H$, ce qui implique que $G \not\subset H$ (sinon...).

Exercice 22. On pose $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
2. $F \cup G$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Correction.

1. $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, -1)$ et $G = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, 1)$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
2. $(2, 2), (1, -1) \in F \cup G$ mais $(2, 2) + (1, -1) = (3, 1) \notin F \cup G$.
Donc $F \cup G$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 23. Caractériser l'appartenance à un sous-espace vectoriel.

1. On considère $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. On définit $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, -3, -1, 1)$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Caractériser par une condition sur les x_i l'appartenance de x à F .

$x \in F \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha e_1 + \beta e_2$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha - 3\beta \\ x_3 = \alpha - \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_3 = \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha - 3\beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ \beta = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ x_2 = \alpha - 3\beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ \beta = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$$

Conclusion : $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases}$

2. On considère $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. On définit $e_3 = (6, 12, 1, 14)$ et $e_4 = (-3, 9, 3, 3)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_4)$. Caractériser par une condition sur les x_i l'appartenance de x à G .

De même, $x \in G \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha e_3 + \beta e_4$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} x_1 = 6\alpha - 3\beta \\ x_2 = 12\alpha + 9\beta \\ x_3 = \alpha + 3\beta \\ x_4 = 14\alpha + 3\beta \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{7}(x_3 + x_1) \\ \beta = \frac{1}{21}(6x_3 - x_1) \\ x_2 = \frac{3}{7}(10x_3 + 3x_1) \\ x_4 = \frac{1}{7}(20x_3 + 13x_1) \end{cases}.$$

Conclusion : $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G \iff \begin{cases} x_2 = \frac{3}{7}(10x_3 + 3x_1) \\ x_4 = \frac{1}{7}(20x_3 + 13x_1) \end{cases}$

3. Déterminer $F \cap G$.

Soit $x \in E$. On a :

$$x \in F \cap G \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \\ 2x_3 - x_1 = \frac{3}{7}(10x_3 + 3x_1) \\ x_1 = \frac{1}{7}(20x_3 + 13x_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \\ 0 = 16x_3 + 2x_1 \\ 0 = 20x_3 + 6x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff x = 0.$$

Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Union de sous-espaces vectoriels

Exercice 24. Union de sous-espaces vectoriels. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion (i.e. $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, k \leq \ell \Rightarrow F_k \subset F_\ell$) de sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E . **Indication :** Attention, l'union est infinie !

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset E$ et E est un $\mathbb{K}$ -ev.
- $0_E \in F_{12}$ et $F_{12} \subset F$ donc $0_E \in F$.
- Soient $(x, y) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $x \in F_n$ et $y \in F_p$.
Notons $m = \max(n, p)$. Alors, par croissance de la famille (F_i) , on a : $F_n \subset F_m$ et $F_p \subset F_m$.
Ainsi, $x, y \in F_m$. Or, F_m est un s.e.v., donc $\alpha x + y \in F_m$. Or, $F_m \subset F$, donc $\alpha x + y \in F$.
- Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 25. Union de sous espaces vectoriels. Soient E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $(F \subset G$ ou $G \subset F)$.

- Sens réciproque. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un ssev ; si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ donc $F \cup G$ est un ssev.
- Sens direct. Supposons que $F \cup G$ est un ssev de E .

Méthode 1 : par l'absurde. Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Ainsi, il existe $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$. Alors $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$. Un ssev sert à faire des additions ! Comme $F \cup G$ est un ssev, $f + g \in F \cup G$.

– Si $f + g \in F$, alors $g = \underbrace{(f + g)}_{\in F} + \underbrace{(-f)}_{\in F} \in F$, ce qui est absurde.

– Si $f + g \in G$, alors de même, $f \in G$, ce qui est absurde.

Dans tous les cas, on a une absurdité donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Méthode 2 : on montre directement la disjonction. Pour cela, supposons que $F \not\subset G$, et montrons que $G \subset F$.

$F \not\subset G$ donc il existe $f \in F \setminus G$.

Soit $g \in G$.

On a alors $f, g \in F \cup G$ et puisque $F \cup G$ est stable par addition $f + g \in F \cup G$.

Supposons que $f + g \in G$. Alors $f = (f + g) - g \in G$ (car G est stable par soustraction).

Contradiction.

Ainsi, $f + g \in F$. Donc $g = (f + g) - f \in F$ (car F est stable par soustraction). On a donc montré $G \subset F$.

2. En déduire : $F \cup G = E \implies (F = E$ ou $G = E)$.

Correction. Supposons $F \cup G = E$. Alors $F \cup G$ est un ssev de E donc $F \subset G$ ou $G \subset F$. D'où $E = F \cup G = G$ ou $E = F \cup G = F$, ce qui conclut.

Familles libres, liées

Exercice 26. Liberté ? Dans chacun des cas suivants, étudier la liberté éventuelle de la famille $\mathcal{F}$ dans E .

1. $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 2), (0, 2, 1, -2))$.

Correction. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta t = 0$. Alors
$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma & = & 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\delta & = & 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma + \delta & = & 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma - 2\delta & = & 0 \end{cases}.$$

En résolvant ce système, on trouve que $\delta = 0$, $\alpha = 2\gamma$ et $\beta = -\gamma$.

Prenons, $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 1, \delta = 0$ alors $2(1, 1, 1, 1) - (1, 2, 3, 4) + (-1, 0, 1, 2) = (0, 0, 0, 0)$ donc la famille $\mathcal{F}$ est liée.

2. $E = \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{F} = (x \mapsto \ln(5x), x \mapsto \ln(3x), x \mapsto 2)$.

Correction. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a \ln(5x) + b \ln(3x) + 2c = 0$.

Pour $x = \frac{1}{3}$, on obtient $a \ln\left(\frac{5}{3}\right) + 2c = 0$.

Pour $x = \frac{1}{5}$, on obtient $b \ln\left(\frac{3}{5}\right) + 2c = 0$.

Ainsi, $a = -b$ et $c = -\frac{a}{2} \ln \frac{5}{3}$.

Posons $a = 2$, $b = -2$, $c = -\ln \frac{5}{3}$ alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2 \ln(5x) - 2 \ln(3x) - 2 \ln \frac{5}{3} &= 2 \ln(5x) - 2 \ln(3x) - 2 \ln \frac{5}{3} \\ &= 2(\ln(5x) - \ln(3x)) - 2 \ln \frac{5}{3} \\ &= 2 \ln \frac{5x}{3x} - 2 \ln \frac{5}{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc la famille est $\mathcal{F}$ est liée.

Sinon, remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(5x) = \ln\left(3x \frac{5}{3}\right) = \ln(3x) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln(3x) + \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{2} \cdot 2,$$

donc la 1ère fonction s'exprime comme une CL des deux autres donc la famille est liée.

3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{F} = \left(I_2, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Correction. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aI_2 + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Alors $\begin{pmatrix} a+b & b \\ c & a+c \end{pmatrix} = 0_2$ donc $a = b = c = 0$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 27. Liberté ?

1. Les fonctions $\cos, \sin, \exp$ sont-elles linéairement indépendantes ?
2. Les fonctions $\arccos, \arcsin$ et $x \mapsto 1$ sont-elles linéairement indépendantes ?
3. Les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}, (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Correction.

1. Oui. Justifions. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda \cos + \mu \sin + \nu \exp = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

Autrement dit, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \nu e^x = 0.$$

Là encore, on va appliquer la $\forall$ -assertion. On peut bien choisir ces points d'application pour se simplifier les calculs.

- En appliquant la $\forall$ -assertion en 0 et en 2π , on a

$$\lambda + \nu = \lambda + \nu e^{2\pi} = 0,$$

d'où on tire facilement $\nu = 0$ (car $e^{2\pi} > 1$), puis $\lambda = 0$.

- Il reste $\forall x \in \mathbb{R}, \mu \sin(x) = 0$, qui donne $\mu = 0$ après application en $\pi/2$.

2. Non. On a

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

donc l'égalité fonctionnelle

$$\arccos + \arcsin x - \frac{\pi}{2} \times 1 = 0,$$

qui est une relation de dépendance linéaire non triviale. Donc la famille est liée.

3. Oui. Justifions. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(1)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(n^2)_{n \in \mathbb{N}} + \nu(2^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}.$$

Autrement dit, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda + \mu n^2 + \nu 2^n = 0.$$

On essaye de tirer de cette assertion suffisamment d'éléments pour montrer $\lambda = \mu = \nu = 0$. On peut être plus ou moins futé.

Méthode directe. On va simplement appliquer la $\forall$ -assertion en 0, 1 et 2, et en tirer des conséquences.

On a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 4\nu = 0 \end{cases} & \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ 4\mu + 3\nu = 0 \end{cases} & \begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{bmatrix} \\
 & \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -\nu = 0 \end{cases} & [L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2] \\
 & \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases} & [L_3 \leftarrow -L_3] \\
 & \text{ donc } \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0. \end{cases} & \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On a montré $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui conclut.

Méthode un peu plus fine. On raisonne asymptotiquement, dans l'esprit de l'échelonnement.

- On a d'une part $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n}{2^n} = \frac{0}{2^n} = 0$ et d'autre part

$$\frac{\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n}{2^n} = \frac{\lambda}{2^n} + \mu \frac{n^2}{2^n} + \nu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu,$$

par croissances comparées.

Par unicité de la limite, on en déduit $\nu = 0$.

- Exactement le même argument montre maintenant que

$$0 = \frac{\lambda + \mu n^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu,$$

donc $\mu = 0$.

- Il reste $\lambda = 0$, ce qui conclut.

Exercice 28. Une nouvelle famille libre.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $n \geq 2$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$ est libre.

Correction. Notons $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_{n-1})$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$.

Alors

$$\lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_{i-1} + \lambda_i) e_i + \lambda_{n-1} e_n = 0.$$

Or, par hypothèse, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_{n-1} = 0$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\lambda_{i-1} + \lambda_i = 0$.

En particulier, $\lambda_1 = 0$ et $\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = -\lambda_{i-1}$ donc par récurrence finie immédiate, $\forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. D'où $\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre}}$.

Exercice 29. Liberté d'une famille de fonctions. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $f_p : x \mapsto e^{px}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

Correction. Preuve 1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- f_0 n'est pas la fonction nulle donc (f_0) est libre.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. Montrons que $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est libre.
Soit $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $a_0 f_0 + \dots + a_n f_n + a_{n+1} f_{n+1} = 0$ (L_1).

Première méthode. En dérivant, il vient : $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + n a_n f_n + (n+1) a_{n+1} f_{n+1} = 0$. (L_2)

$$L_2 - (n+1)L_1 \text{ donne : } \sum_{k=0}^n [k - (n+1)] a_k f_k = 0.$$

Or, par HR, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $[k - (n+1)] a_k = 0$ d'où $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$ car $k \neq n+1$.

En reportant dans L_1 , il vient : $a_{n+1} f_{n+1} = 0$. Or, $f_{n+1} \neq 0_{\mathbb{R}}$ donc $a_{n+1} = 0$.

Ainsi, la famille $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est libre, ce qui montre l'hérédité et conclut la récurrence.

Deuxième méthode. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0 e^{0x} + \dots + a_n e^{nx} + a_{n+1} e^{(n+1)x} = 0.$$

En multipliant par $e^{-(n+1)x}$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0 e^{-(n+1)x} + \dots + a_n e^{-x} + a_{n+1} = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient : $a_{n+1} = 0$.

On en déduit que $\sum_{k=0}^n a_k f_k = 0$. Or, par HR, $(f_0, \dots, f_n)$ est libre donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$.

Ainsi, $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est libre, ce qui clôt la récurrence.

Preuve 2. Preuve directe avec les polynômes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{kx} = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k (e^x)^k = 0 \quad (*)$$

En posant, $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$, la relation $(*)$ s'écrit alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(e^x) = 0$.

Comme l'image de la fonction $\exp$ est $\mathbb{R}_+$, on en déduit $\forall y \in \mathbb{R}_+, P(y) = 0$.

Ainsi P a une infinité de racines, et donc $P = 0$. Par suite, ses coefficients sont tous nuls, ce qui prouve que la famille $(x \mapsto e^{kx})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.

Exercice 30. Liberté d'une famille de fonctions. Soient un entier $n \geq 2$ et des réels $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Montrer que les fonctions $x \mapsto |x - \alpha_1|, x \mapsto |x - \alpha_2|, \dots, x \mapsto |x - \alpha_n|$ sont linéairement indépendantes.

Correction. Notons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_k : x \mapsto |x - \alpha_k|$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Il existe donc $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ tels que

$$f_p = \sum_{k \neq p} \lambda_k f_k.$$

On sait que pour tout k , f_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_k\}$ et les (α_k) sont deux à deux distincts donc pour tout $k \neq p$, f_k est dérivable en α_p .

Par opération sur les fonctions dérivables, $\sum_{k \neq p} \lambda_k f_k$ est dérivable en α_p et par égalité, f_p devrait être dérivable en α_p : absurde ! Donc la famille de fonctions $(x \mapsto |x - \alpha_1|, \dots, x \mapsto |x - \alpha_n|)$ est libre.

Exercice 31. Liberté d'une famille de fonctions. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \cos(at)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels positifs distincts $a_1, \dots, a_n$, la famille $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, (f_a) est libre car la fonction f_a n'est pas nulle (elle vaut 1 en 0).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n .
 Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels positifs distincts. Montrons que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_{n+1}})$ est libre.
 Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (L_1)$$

En dérivant deux fois cette égalité fonctionnelle, on obtient :

$$a_1^2 \lambda_1 f_{a_1} + \dots + a_{n+1}^2 \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (L_2)$$

La transvection $a_{n+1}^2 L_1 - L_2$ donne

$$\lambda_1 (a_{n+1}^2 - a_1^2) f_{a_1} + \dots + \lambda_n (a_{n+1}^2 - a_n^2) f_{a_n} = 0.$$

Or, par hypothèse de récurrence $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est libre donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i(a_{n+1}^2 - a_i^2) = 0.$$

Mais les a_k^2 sont deux à deux distincts (car les a_k sont distincts et positifs) donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{n+1}^2 - a_i^2 \neq 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Il y a un mini-raisonnement à faire. Supposons, par l'absurde qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{n+1}^2 = a_i^2$. Alors $a_{n+1} = \pm a_i$. Si $a_{n+1} = -a_i$, alors par positivité des a_k , il vient $a_{n+1} = 0 = a_i$. Dans tous les cas, on obtient $a_{n+1} = a_i$, avec $i \neq n+1$, ce qui contredit le fait que les a_k sont distincts. Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{n+1}^2 - a_i^2 \neq 0$.

L'équation (L_1) devient $\lambda_{n+1}f_{a_{n+1}}$, qui, évaluée en 0, donne $\lambda_{n+1} = 0$.

Ainsi, $(f_{a_i})_{1 \leq i \leq n+1}$ est libre, ce qui prouve l'hérédité et clôt la récurrence.

Exercice 32. Liberté d'une famille de fonctions. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, considérons $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \sin(kx)$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Récurrence et dériver deux fois.

Correction.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (f_1, \dots, f_n)$ est libre, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété : « la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre ».

Initialisation. La famille (f_1) est libre, car c'est une famille à un seul élément qui n'est pas le vecteur nul (ici qui n'est pas la fonction nulle : en effet, la fonction sinus n'est pas la fonction nulle).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$ càd montrons que la famille $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est libre.

Pour cela, donnons-nous des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$(\star) \quad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Pour tout k , les fonctions f_k sont deux fois dérivables, et on a $f_k'' = -k^2 f_k$.

Dérivons deux fois $(\star)$, on obtient :

$$\lambda_1 f_1'' + \dots + \lambda_k f_k'' + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1}'' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

d'où

$$(\diamond) \quad \lambda_1(-1)f_1 + \dots + \lambda_k(-k^2)f_k + \dots + \lambda_{n+1}(-(n+1)^2)f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Multiplions $(\star)$ par $(n+1)^2$ et ajoutons lui $(\diamond)$.

Les termes d'indice $n+1$ disparaissent et on obtient :

$$\sum_{k=1}^n ((n+1)^2 - k^2) \lambda_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Cette égalité est une relation de liaison entre $(f_1, \dots, f_n)$.

D'après $\mathcal{H}_n$, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad ((n+1)^2 - k^2) \lambda_k = 0$$

D'où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = 0$$

Reportons cette information dans $(\star)$. On obtient :

$$\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Comme f_{n+1} n'est pas la fonction nulle, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$.

Finalement, on a montré la nullité de tous les λ_k .

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Exercice 33. Liberté d'une famille de suites.

Soient a, b, c trois réels **distincts** (et éventuellement positifs si vous voulez).

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left((a^n)_{n \in \mathbb{N}}, (b^n)_{n \in \mathbb{N}}, (c^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.

Correction. Montrons que la famille $\mathcal{F} = \left((a^n)_{n \in \mathbb{N}}, (b^n)_{n \in \mathbb{N}}, (c^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.

Première solution (résolution d'un système en donnant des valeurs particulières à n).

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(a^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(b^n)_{n \in \mathbb{N}} + \gamma(c^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}.$$

Cette dernière égalité est une égalité de suites.

Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a^n + \beta \times b^n + \gamma \times c^n = 0_{\mathbb{R}}$$

En particulier à $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha a^0 + \beta b^0 + \gamma c^0 = 0 \\ \alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1 = 0 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0 \end{cases}$$

que l'on écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} a^0 & b^0 & c^0 \\ a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'objectif est de montrer que ce système admet $(0,0,0)$ pour unique solution. Ceci sera réalisé si on arrive à montrer que la matrice carrée du système est inversible.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, ce qui ne change pas son caractère inversible.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

Comme $b^2 - a^2$ est multiple de $b - a$, en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - (b + a)L_2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b+a)(c-a) \end{bmatrix}$$

Le coefficient en bas à droite vaut $(c-a)(c+a) - (b+a)(c-a) = (c-a)(c-b)$.

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec sur la diagonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & b-a & \\ & & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}$$

Aucun de ces coefficients n'est nul, car a, b, c sont distincts deux à deux.

Bilan, la matrice est inversible.

Donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Deuxième solution dans un cas particulier (passage à la limite après avoir divisé par le terme dominant)

Attention, cette solution ne fonctionne que dans le cas où a, b, c sont positifs.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(a^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(b^n)_{n \in \mathbb{N}} + \gamma(c^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}.$$

Cette dernière égalité est une égalité de suites.

Faisons-en des égalités de nombres réels. On obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times a^n + \beta \times b^n + \gamma \times c^n = 0_{\mathbb{R}}.$$

Quitte à permuter les suites (ou à les renommer), on peut supposer que $0 \leq a < b < c$, de sorte que

$$\left| \frac{a}{c} \right| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{b}{c} \right| < 1$$

(question au lecteur : pourquoi peut-on diviser par c ?)

En divisant par c^n , on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \times \left(\frac{a}{c}\right)^n + \beta \times \left(\frac{a}{c}\right)^n + \gamma = 0_{\mathbb{R}}$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\alpha \times 0 + \beta \times 0 + \gamma = 0_{\mathbb{R}}$$

D'où $\gamma = 0$.

On injecte cette information dans l'égalité initiale, et on obtient :

$$\alpha(a^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(b^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

On constate que l'on est dans la même situation que la situation initiale, mais avec seulement deux suites (toujours avec a, b distincts !). On peut donc recommencer le même coup (division par b : pourquoi b est-il non nul), et obtenir $\beta = 0$.

En injectant dans l'égalité initiale, on obtient

$$\alpha(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}.$$

Or la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle (car son premier terme vaut $a^0 = 1$), donc $\alpha = 0$.

Bilan. On a montré que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Exercice 34. Condition pour être liée.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i = e_i + u$.

A quelle condition sur $a_1, \dots, a_n$ la famille $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est-elle liée ?

Correction. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u) = 0$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + (\sum_{i=1}^n \lambda_i) u = 0$. En notant $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, on a $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + s a_i) e_i = 0$. Or $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc $\forall i$, $\lambda_i = -s a_i$. En sommant, on obtient $s = -s \sum_i a_i$, donc $s(1 + \sum_i a_i) = 0$.

- Si $\sum_i a_i \neq -1$, alors $s = 0$ et $\forall i$, $\lambda_i = -s a_i = 0$ donc $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.
- Si $\sum_i a_i = -1$, alors $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^n a_i u = u - u = 0$ alors que $(a_1, \dots, a_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ vu que leur somme vaut -1 . Donc $(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est liée.

Conclusion : $\boxed{(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{ est liée ssi } \sum_i a_i = -1}$.

Familles génératrices

Exercice 35. Combinaison linéaire.

1. La fonction $(x \mapsto \cos(2x)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $\cos$ et $\sin$?
2. Quelles suites sont combinaisons linéaires des suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Correction.

1. Non. Supposons (par l'absurde) que la fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ soit combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$. On pourrait alors trouver un couple de scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f = \lambda \cos + \mu \sin,$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x). \quad (\text{X})$$

Par exemple, l'assertion (X) implique en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi$ les égalités

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = -\lambda, \end{cases}$$

qui sont manifestement absurdes.

2. Il s'agit des suites 2-périodiques. Montrons-le.
 - Déjà, les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2-périodiques, donc on vérifie alors immédiatement que la même propriété doit être satisfaite par chacune de leurs combinaisons linéaires.
 - Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite 2-périodique. On peut donc trouver deux valeurs $p, i \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} p & \text{si } n \text{ est pair} \\ i & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On vérifie alors (par disjonction des cas) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p+i}{2} \times 1 + \frac{p-i}{2} \times (-1)^n,$$

ce qui montre bien que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des deux suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 36. Trouver une famille génératrice.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^T = M + \text{Tr}(M)I_n$.

Montrer que M est symétrique et de trace nulle.

La réciproque est-elle vraie ?

2. Ici $n = 3$. Déterminer une famille génératrice de $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^T = M + \text{Tr}(M)I_3\}$

Correction.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^T = M + \text{Tr}(M)I_n$.

Appliquons la transposée à cette égalité. On obtient, par linéarité de la transposée :

$$M = M^T + \text{Tr}(M)I_n$$

On obtient le petit système

$$\begin{cases} M^T &= M + \text{Tr}(M)I_n \\ M &= M^T + \text{Tr}(M)I_n \end{cases}$$

Effectuons $L_1 - L_2$. On obtient $M^T - M = M - M^T$, d'où $M^T = M$. Ainsi M est symétrique.

Et en reportant cette information dans l'égalité initiale, on trouve $\text{Tr}(M)I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $\text{Tr}(M) = 0$.

La réciproque est vraie.

Si M est symétrique et de trace nulle, alors on a $M^T = M$ et $\text{Tr}(M) = 0$, d'où l'égalité $M^T = M + \text{Tr}(M)I_n$.

2. On a montré que F est exactement l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.

Il est facile de vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Ou bien vous faites la preuve standard, ou bien vous invoquez le fait que F est l'intersection de deux sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, lesquels ?

Déterminons une famille génératrice de F .

$\square$ Soit $M \in F$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille 3 symétrique et de trace nulle.

Alors M est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \text{avec } a + d + f = 0$$

donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$

Ainsi M s'écrit

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc montré l'inclusion $F \subset \text{Vect}(\text{ces 5 matrices})$.

$\square$ On vérifie que les 5 matrices ci-dessus sont bien symétriques et de trace nulles, donc sont dans F .

Comme F est stable par combinaison linéaire, on en déduit que $\text{Vect}(\text{ces 5 matrices}) \subset F$.

BILAN. On a l'égalité $F = \text{Vect}(\text{ces 5 matrices})$ où les 5 matrices sont :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{11}-E_{33}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}+E_{21}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{13}+E_{31}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{22}-E_{33}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{23}+E_{32}}$$

Bases

Exercice 37. Base de $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 1, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (1, -1, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction. Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = X \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta - \gamma = y \\ -\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{x+y}{2}; \beta = \frac{y+z}{2}; \gamma = \frac{x+z}{2}}.$$

Ainsi, tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u, v, w . Cela montre que $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et que les coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (u, v, w) sont $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{x+z}{2}\right)$.

2. Déterminer les coordonnées de $(2, 0, 4)$ dans cette base.

Correction. On applique ce que l'on a précédemment fait à $x = 2, y = 0, z = 4$.

Dès lors, $\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3) \text{ sont les coordonnées du vecteur } (2, 0, 4) \text{ dans la base } (u, v, w)}$.

Exercice 38. Commutant d'une matrice.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$.

Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Déterminer une base de $C(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. Âne qui trotte.

2. En résolvant le système (pour l'ordre inhabituel des variables a, c, b, d , qui est plus pratique pour l'échelonnement), on trouve

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} d-2b & b \\ -7b & d \end{pmatrix} \mid (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

dont une base est clairement $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

(Par une habile transvection, on pourrait plutôt prendre (I_2, A) , mais a-t-on besoin d'être intelligent ?)

Exercice 39. Un peu d'orthogonalité.

1. Soient $u = (1, 2, 0, -1)$ et $v = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que (u, v) est une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v) \subset \mathbb{R}^4$.

2. Trouver deux vecteurs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta), (\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \mathbb{R}^4$ linéairement indépendants tels que

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t = 0\}.$$

3. Démontrer que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ forment une base de

$$F^\circ = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall (x, y, z, t) \in F, ax + by + cz + dt = 0\}.$$

Correction.

1. Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc la famille (u, v) est libre.

Puisque, par définition, elle est génératrice de $\text{Vect}(u, v)$, elle en constitue bien une base.

2. Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On a $w \in \text{Vect}(u, v)$ si et seulement si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : w = \lambda u + \mu v$, c'est-à-dire si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ 2\lambda + \mu = y \\ \mu = z \\ -\lambda + \mu = t \end{cases}$$

est compatible.

On peut échelonner ce système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ 2\lambda + \mu = y \\ \mu = z \\ -\lambda + \mu = t \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ -\mu = -2x + y \\ \mu = z \\ 2\mu = x + t \end{cases} && \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \mu = z \\ -\mu = -2x + y \\ 2\mu = x + t \end{cases} && [L_2 \leftrightarrow L_3] \\
 &\iff \begin{cases} \lambda = x - z \\ \mu = z \\ 0 = -2x + y + z \\ 0 = x - 2z + t. \end{cases} && \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, ce système est compatible si et seulement si ses deux équations de compatibilité sont triviales, c'est-à-dire si et seulement si

$$-2x + y + z = x - 2z + t = 0.$$

Cela montre que

$$F = \text{Vect}(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + y + z = x - 2z + t = 0 \right\}.$$

Ainsi, $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ conviennent (ils sont bien linéairement indépendants).

3. Déjà, quel que soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$, l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid ax + by + cz + dt = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$: c'est $\text{Ker} \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$.

L'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, ax + by + cz + dt = 0 \right\} = F^\circ.$$

Pour montrer que (w, w') en est une base, il y a trois points à vérifier.

- Commençons par vérifier que w et w' appartiennent à F° .

On sait déjà que $\alpha + 2\beta - \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, et que la même égalité reste valable pour $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$. D'après la première question, on peut trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda + \mu \\ \mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t &= (\lambda + \mu)\alpha + (2\lambda + \mu)\beta + \mu\gamma + (-\lambda + \mu)\delta \\ &= \lambda(\alpha + 2\beta - \delta) + \mu(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $w \in F^\circ$.

La situation étant symétrique, on montre de la même façon que $w' \in F^\circ$.

- On remarque directement que w et w' ne sont pas colinéaires, donc la famille (w, w') est libre.
- Enfin, montrons que (w, w') engendre F° .

Soit donc $\hat{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in F^\circ$.

On doit avoir $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F, ax + by + cz + dt = 0$.

En particulier, en appliquant cette $\forall$ -assertion à u et à v , on en déduit

$$\begin{cases} a + 2b - d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a + 2c + 3d = 0 \\ b - c - 2d = 0 \end{cases} \quad (\text{après échelonnement}).$$

Autrement dit,

$$\hat{w} \in \left\{ \begin{pmatrix} -2\mathfrak{I} - 3\mathfrak{J} \\ \mathfrak{I} + 2\mathfrak{J} \\ \mathfrak{I} \\ \mathfrak{J} \end{pmatrix} \mid \mathfrak{I}, \mathfrak{J} \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour montrer que $\hat{w} \in \text{Vect}(w, w')$, il suffit de montrer que ce sous-espace vectoriel est inclus dans $\text{Vect}(w, w')$.

Par stabilité par combinaison linéaire, il suffit même de vérifier simplement que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Vect}(w, w')$.

C'est évident dans le premier cas (le vecteur est w lui-même), et on trouve facilement l'écriture

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w + w',$$

ce qui conclut dans le deuxième cas.

Exercice 40. Base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

Montrer que l'on peut trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles. Généraliser en taille n .

Le cas $n = 2$

La famille des E_{ij} est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (c'en est même une base).

On a

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}) \stackrel{*}{=} \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}, I) \stackrel{**}{=} \text{Vect}(I + E_{11}, I + E_{22}, I + E_{12}, I + E_{21}, I)$$

Les 5 dernières matrices sont inversibles (elles sont triangulaires/diagonales avec aucun 0 sur la diagonale).

Le premier $*$ est dû au fait que $I = E_{11} + E_{22}$.

Le deuxième $**$ se justifie par double inclusion :

- Il est clair que E_{ij} est combinaison linéaire des matrices de droite : écrire $E_{ij} = (I + E_{ij}) - I$.
- Et les matrices $I + E_{ij}$ sont bien combinaison linéaire des matrices de gauche (facile).

Bilan : La famille $(I + E_{11}, I + E_{22}, I + E_{12}, I + E_{21}, I)$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et formée de matrices inversibles.

Hélas, elle n'est pas libre. En effet, I est combinaison linéaire des $I + E_{ij}$, puisque

$$(I + E_{11}) + (I + E_{22}) = 3I$$

On peut donc reprendre les égalités précédentes et obtenir :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I + E_{11}, I + E_{22}, I + E_{12}, I + E_{21})$$

Ainsi, la famille $(I + E_{11}, I + E_{22}, I + E_{12}, I + E_{21})$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Je vous laisse montrer que cette famille $(I + E_{11}, I + E_{22}, I + E_{12}, I + E_{21})$ est libre.

Le cas n quelconque

- Déterminons une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

On a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}((E_{ij})_{i,j}) = \text{Vect}((E_{ij})_{i,j}, I) = \text{Vect}((I + E_{ij})_{i,j}, I).$$

Or la matrice I est combinaison linéaire des $I + E_{ij}$, car :

$$I = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (I + E_{ii})$$

On peut donc supprimer I « du Vect » et obtenir :

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}((I + E_{ij})_{i,j})}.$$

Les matrices $I + E_{ij}$ sont inversibles (elles sont triangulaires/diagonales avec aucun 0 sur la diagonale).

Ainsi, la famille $(I + E_{ij})_{i,j}$ est formée de matrices inversibles, et $\boxed{\text{est génératrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

- Montrons que la famille $(I + E_{ij})_{i,j}$ est libre.

Soit une famille de scalaires $(m_{i,j})$ telle que

$$\sum_{i,j} m_{i,j} (I + E_{i,j}) = 0.$$

Notons $\sigma = \sum_{i,j} m_{i,j}$. Alors

$$\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j} = -\sigma I.$$

L'égalité des coefficients (diagonaux et hors diagonaux) donne :

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = -\sigma$
- $\forall i \neq j, m_{i,j} = 0.$

D'où $\sigma = -n\sigma$ puis $(n+1)\sigma = 0$ d'où $\sigma = 0$.

Finalement, on a $\forall i, j, m_{i,j} = 0$, ce qui prouve que $\boxed{(I + E_{ij})_{i,j} \text{ est libre}}$.

- En conclusion, $\boxed{(I + E_{ij})_{i,j} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, formée de matrices inversibles.

Exercice 41. $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. On pose $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$.

Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une base de E .

Correction.

- N.B. : $E \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
- $E = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ donc E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ donc E est lui-même un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
- Par définition, la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est génératrice dans E .

- Montrons qu'elle est libre : Supposons que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$.
 - Supposons que $\gamma \neq 0$: alors $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $a = \frac{-\alpha}{\gamma} \in \mathbb{Q}$ et $b = \frac{-\beta}{\gamma} \in \mathbb{Q}$.
 - * En élevant au carré, on a : $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$.
 - * Si $ab \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{ab} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.
 - * Ainsi, $ab = 0$. Par intégrité de $\mathbb{Q}$, $a = 0$ ou $b = 0$.
 - * Supposons que $a = 0$. Alors $3 = 2b^2$ puis $|b| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ce qui est absurde car $b \in \mathbb{Q}$.
 - * Ainsi, $b = 0$, puis $a^2 = 3$ i.e. $|a| = \sqrt{3}$, ce qui est absurde car $a \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - Finalement $\boxed{\gamma = 0}$ i.e. $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$.
 - Supposons que $\beta \neq 0$, alors $\sqrt{2} = \frac{-\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.
 - Donc $\boxed{\beta = 0}$ puis $\boxed{\alpha = 0}$. Ainsi, la famille est libre.
- La famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est libre et génératrice donc c'est une base de E . De plus, $\dim_{\mathbb{Q}} E = 3$.