Applications linéaires

Exercice 1. Linéaire ou pas ? *Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?*

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2y-5x \end{array}$.
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,x,\lambda) \end{array}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé.*
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & u_{50} \end{array}$.
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$.

Correction.

1. *f_1 est linéaire car* $\forall x,y,x',y',\lambda \in \mathbb{R},\ f_1((x,y)+\lambda(x',y')) = ... = f_1((x,y)) + \lambda f_1((x',y'))$ *(à vous de détailler).*
2. - *Si* $\lambda \neq 0$, *alors f_2 n'est pas linéaire car* $f_2((0,0,0)) \neq (0,0,0)$.
   - *Si* $\lambda = 0$ *alors f_2 est linéaire car* $\forall x,y,z,x',y',z'\alpha \in \mathbb{R},\ f_2((x,y,z)+\alpha(x',y',z')) = ... = f_2((x,y,z)) + \alpha f_2((x',y',z'))$.

   Ainsi, $\boxed{f_2 \text{ est linéaire si et seulement si } \lambda = 0}$.
3. *f_3 est linéaire car pour tous* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f_3((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f_3((u_n+\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = u_{50} + \lambda v_{50} = f_3((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \lambda f_3((v_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

4. *De la même façon, f_4 est linéaire. Remarque :* $f_4 = \mathrm{Tr}$.

Exercice 2. *Soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications telles que f est linéaire et surjective et $g \circ f$ est linéaire. Montrer que g est linéaire.*

Correction. *Soient* $(y_1,y_2) \in F^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Puisque f est surjective, il existe un couple* $(x_1,x_2) \in E^2$ *tel que* $y_1 = f(x_1)$ *et* $y_2 = f(x_2)$ *; fixons un tel couple. On a alors :*

$$\begin{aligned} g(\lambda y_1 + y_2) &= g(\lambda f(x_1) + f(x_2)) \\ &= g(f(\lambda x_1 + x_2)) && \text{par linéarité de } f \\ &= (g\circ f)(\lambda x_1 + x_2) \\ &= \lambda (g\circ f)(x_1) + (g\circ f)(x_2) && \text{par linéarité de } g\circ f \\ &= \lambda g(y_1) + g(y_2), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{g \text{ est linéaire}}$.

Exercice 3. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. *Soit* $f : (x, y, z) \mapsto (2y + z, x + z, -x + y + z)$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. *Déterminer* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$. *Que peut-on en déduire ?*

Correction.

- *Par définition,* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
  De plus, on vérifie (le faire...) que $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f((x, y, z)) + \lambda(x', y', z')) = f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z'))$.
  Ainsi $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
- *Soient* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *et* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a :*

$$(a, b, c) = f(x, y, z) \iff \dots \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a + b - 2c) \\ y = \frac{1}{3}(2a - b - c) \\ z = \frac{1}{3}(-a + 2b + 2c) \end{cases}.$$

  Tout élément de $\mathbb{R}^3$ *a donc un unique antécédent par* f *donc* $\underline{f \text{ est bijective}}$. *On en déduit que* $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3}$, $\boxed{\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$ *et* $\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)}$ *(f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).*

Exercice 4. Endomorphisme défini par ses restrictions à des supplémentaires.
Dans le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $E = \mathbb{K}^3$, *on considère les sous-espaces vectoriels*

$$F_1 = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0), (0, 1, 0)\right) \quad \text{et} \quad F_2 = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right).$$

1. *Montrer que* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E.
2. *Vérifier qu'il existe un endomorphisme* u *de* E *tel que*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2,\ u((a, b, 0)) = (-b, a, 0) \quad \text{et} \quad \forall c \in \mathbb{K},\ u((c, c, c)) = -(c, c, c).$$

3. *Prouver que* $u^4 = \mathrm{Id}_E$.

Correction.

1. - *Par définition,* F_1 *et* F_2 *sont des sous-espaces vectoriels de* E.
   - *On a* $\underline{F_1 \cap F_2 = \{0\}}$. *En effet, si* $x \in F_1 \cap F_2$, *alors il existe* $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ *tel que*

$$x = (a, b, 0) = (c, c, c)$$

     et l'on a donc $c = 0$ *et, par suite,* $x = 0$.
   - *Enfin, pour* $(a, b, c) \in E$, *l'égalité :*

$$(a, b, c) = \underbrace{(a - c, b - c, 0)}_{\in F_1} + \underbrace{(c, c, c)}_{\in F_2}$$

     montre que $E \subset F_1 + F_2$. *L'inclusion réciproque étant immédiate, on a l'égalité* $\underline{E = F_1 + F_2}$.
   - *Par suite, on a* $\boxed{E = F_1 \oplus F_2}$.

2. *Étant donné que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E et que :*

$$v: \begin{array}{rcl} F_1 & \to & E \\ (a,b,0) & \mapsto & (-b,a,0) \end{array} \quad \text{et} \quad w: \begin{array}{rcl} F_2 & \to & E \\ (c,c,c) & \mapsto & -(c,c,c) \end{array}$$

sont deux applications linéaires (ce que l'on vérifie aisément), il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont les restrictions à F_1 et F_2 sont respectivement v et w.
Alternative.
Analyse (brouillon). $\forall (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ (a,b,c) = (a-c, b-c, 0) + (c,c,c)$ *et u linéaire donc*

$$u((a,b,c) = u((a-c,b-c,0)) + u((c,c,c)) = (c-b, a-c, 0) + (-c,-c,-c) = (-b, a-2c, -c).$$

Synthèse (copie). *soit $u : (a,b,c) \mapsto (-b, a-2c, -c)$. On vérifie que u est linéaire et il est clair que u vérifie les 2 conditions. D'où l'existence.*

3. *D'une part, pour tout $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, on a :*

$$u^2((a,b,0)) = u((-b,a,0)) = (-a,-b,0),$$

donc $\forall x \in F_1,\ u^2(x) = -x$ d'où $\underline{\forall x \in F_1,\ u^4(x) = x}$.
D'autre part, on a : $\forall x \in F_2,\ u^2(x) = x$ donc $\underline{\forall x \in F_2,\ u^4(x) = x}$.
Ainsi, l'application linéaire u^4 coïncide avec l'identité sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ; par suite on a $\boxed{u^4 = \mathrm{Id}_E}$.

Exercice 5. Application linéaire définie sur une base.
Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1)\,; \quad f(1,1,0) = (1,0) \quad \text{et} \quad f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction. *Posons $e_1 = (1,0,0), e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$ et $E = \mathbb{R}^3$.*

- *On observe que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ (x,y,z) = (x-y)e_1 + (y-z)e_2 + ze_3$ donc la famille (e_1,e_2,e_3) est génératrice de E.*
  De plus, cette famille est libre. Si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ alors $a = b = c = 0$. Ainsi, $\underline{(e_1,e_2,e_3) \text{ est une base de } E}$.

- *On sait qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, donc il existe une telle application f, et elle est unique.*

- *Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x,y,z) = (x-y)e_1 + (y-z)e_2 + ze_3$ donc*

  $$\boxed{f(x,y,z) = (x-y)f(e_1) + (y-z)f(e_2) + zf(e_3) = (0,x-y) + (y-z,0) + (z,z) = (y, x-y+z)},$$

  donc

  $$\boxed{f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y, x-y+z) \end{array}}.$$

- $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1)\right)}$ *: droite vectorielle.*

- **Remarque.** *Par le théorème du rang,* $\dim \mathrm{Im} f = 2$ *et donc* $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2}$. *N'ayant pas encore la dimension on va le justifier autrement. Déjà par définition de* f, *on a* $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$.
Réciproquement, par définition de f, $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *sont dans* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *est stable par combinaison linéaire donc* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left((0,1),(1,0)\right) \subset \mathrm{Im} f$.

Exercice 6. Un opérateur. *Sur le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on définit l'application* ϕ *qui, à toute fonction* $f \in E$ *associe la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \phi(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t \end{array}.$$

Montrer que ϕ *est un endomorphisme de* E. ϕ *est-il surjectif ? injectif ?*

Correction.

- *Pour toute fonction continue* f, *la fonction* $\phi(f)$ *est dérivable (c'est l'unique primitive de* $t \mapsto tf(t)$ *qui s'annule en 0), donc en particulier continue. Ainsi,* ϕ *est bien une application de* E *vers* E. *C'est aussi une application linéaire : la linéarité de* ϕ *résulte de la linéarité de l'intégrale.*

- *Remarquons, que pour toute fonction continue* f, *on a* $\phi(f)(0) = 0$. *Or il existe des fonctions continues qui ne sont pas nulles en 0 (comme par exemple la fonction constante égale à 1) donc* $\boxed{\phi \text{ n'est pas surjective}}$.

- *Soit* $f \in \mathrm{Ker}\phi$. *Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\phi(f)(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 0$. *En dérivant, on trouve :* $\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 0$. *Cela entraîne que* $f(x) = 0$ *pour tout* x *non nul. Par continuité de* f *en 0, on a alors* $f(0) = 0$. *Ainsi* f *est la fonction nulle. Donc* $\boxed{\mathrm{Ker}\phi = \{0\} \text{ et } \phi \text{ est injective}}$.

Exercice 7. Caractérisation des homothéties. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *vérifiant la propriété* $\forall x \in E,\ \exists \alpha \in \mathbb{K} : u(x) = \alpha x$. *Montrer que* u *est une homothétie i.e.* $\exists \alpha \in \mathbb{K} : \forall x \in E,\ u(x) = \alpha x$.

Correction.

- *Si* $E = \{0_E\}$, *c'est immédiat.*

- *Supposons* $E \neq \{0_E\}$.
Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$.
Par hypothèse, il existe $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ *tel que* $u(x_0) = \alpha_0 x_0$.
Montrons que : $u = \alpha_0 \mathrm{Id}_E$ *i.e.* $\forall x \in E,\ u(x) = \alpha_0 x$.
Soit $x \in E$. *Alors il existe* $\alpha_x \in \mathbb{K}$ *tel que* $u(x) = \alpha_x x$.
Idée. *On regarde* $x + x_0$ *car on est dans un e.v. !*
Par hypothèse, il existe $\alpha_s \in \mathbb{K}$ *tel que* $u(x + x_0) = \alpha_s(x + x_0) = \alpha_s x + \alpha_s x_0$.
Par ailleurs, par linéarité de u, *on a :* $u(x + x_0) = u(x) + u(x_0) = \alpha_x x + \alpha_0 x_0$.
D'où $(\alpha_s - \alpha_x)x + (\alpha_s - \alpha_0)x_0 = 0_E$.

  - *1er cas : si la famille* (x, x_0) *est libre, alors* $\alpha_x = \alpha_s = \alpha_0$, *donc* $u(x) = \alpha_0 x$.
  - *2e cas : sinon,* (x, x_0) *est liée. Comme par hypothèse* $x_0 \neq 0_E$, *on en déduit qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $x = \lambda x_0$. *Alors, par linéarité de* u, *on a :* $u(x) = \lambda u(x_0) = \lambda \alpha_0 x_0 = \alpha_0(\lambda x_0) = \alpha_0 x$.

Dans tous les cas, on a $u(x) = \alpha_0 x$, quel que soit $x \in E$ donc $\boxed{u = \alpha_0 \mathrm{Id}_E \text{ i.e. } u \text{ est une homothétie}}$.

Des exemples d'isomorphismes

Exercice 8. Sur $\mathbb{R}^2$. *Soit $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.*
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Correction. *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et f linéaire donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.*
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Donc f est bijective.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}^2}$ *et* $\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}}$.

Exercice 9. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. *Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $f_P : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$.*
Montrer que f_P est un automorphisme et déterminer sa bijection réciproque.

Correction. *On montre sans souci que f_P est linéaire, donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*
Pour la bijectivité de f_P :

- *soit en devine sa bijection réciproque, $f_{P^{-1}}$, et on vérifie que $f_{P^{-1}} \circ f_P = \mathrm{Id} = f_P \circ f_{P^{-1}}$, ce qui montre que f_P est bijective et $f_P^{-1} = f_{P^{-1}}$;*
- *soit, pour $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on résout l'équation $N = f_P(M)$.*
  On a : $N = f_P(M) \iff N = P^{-1}MP \iff PNP^{-1} = M$.
  Pour $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a bien $PNP^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et d'après les équivalences précédentes, PNP^{-1} est l'unique antécédent de N par f. Ceci montre que f_P est bijective et $f_P^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ N & \mapsto & PNP^{-1} \end{array}$,
  i.e. $f_P^{-1} = f_{P^{-1}}$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.*

1. *Montrer que l'ensemble $F = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un $\mathbb{C}$-e.v.*
2. *Montrer que l'application $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ appartient à $\mathcal{L}(F, \mathbb{C}^2)$.*
3. *Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.*
4. *En déduire l'existence de deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.*

Correction.

1. *F contient la suite nulle et est stable par CL donc F est un s.e.v.de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, donc un $\mathbb{C}$-ev.*
2. *$f : F \to \mathbb{C}^2$. De plus, f est linéaire car $f(0) = 0_{\mathbb{C}^2}$ et $f(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda f(u) + f(v)$.*
3. *f est injective car $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.*
   f est surjective : soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose $u_0 = x$, $u_1 = y$, et $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Dès lors, $f(u) = (x, y)$.
   Ainsi, f est bijective. Comme de plus f est linéaire, $\boxed{f \text{ est un isomorphisme}}$.
   De plus, $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & (u_n) \end{array}$, où (u_n) est définie par $u_0 = x$, $u_1 = y$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
4. *Notons $P = X^2 - aX - b$.*
   - *Si P a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors $u = (r_1^n)$ et $v = (r_2^n)$.*
   - *Si P a une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$, alors $u = (r_0^n)$ et $v = (nr_0^n)$.*

Exercice 11. Endomorphismes nilpotents . *Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.*
On rappelle que f est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}^* : f^n = 0$.
Montrer que dans ce cas, $\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme et donner une expression de son inverse.

On pourra s'inspirer de la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.

Correction. *A TAPER.*

Exercice 12. Application restriction. *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient G et H des s.e.v. de E tels que $G \oplus H = E$. On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F),\ G \subset \mathrm{Ker}(u)\}$. Montrer que*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathcal{L}(H, F) \\ u & \mapsto & u_{|H} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Correction.

- *On remarque que A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en tant que ssev de $\mathcal{L}(E, F)$, car il contient l'application nulle et est stable par CL).*
- *Φ est clairement une application linéaire.*
- *Si $u \in \mathrm{Ker}\Phi$, alors $u_{|H} = 0$, donc $H \subset \mathrm{Ker}(u)$. Comme en outre $u \in A$, on a $G \subset \mathrm{Ker}(u)$. On en déduit $E = G \oplus H \subset \mathrm{Ker}(u)$, donc $\mathrm{Ker}(u) = E$ i.e. $u = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0\}$ puis $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ d'où Φ est injectif.*
- *Soit $v \in \mathcal{L}(H, F)$. D'après le cours, il existe une application linéaire $u : E = G \oplus H \to F$ telle que $u_{|G} = 0$ et $u_{|H} = v$. Une telle application $u \in A$ est un antécédent de v par Φ. Ainsi, Φ est surjectif.*

On a donc bien montré que $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme}}$.

Exercice 13. Endomorphisme nilpotent et famille libre. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n \in \mathbb{N}^*$ (alors $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$). Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^k(x_0))$ est libre.*

Correction. •$f^{n-1} \neq 0$ *donc* $\underline{\text{il existe } x_0 \in E \text{ tel que } f^{n-1}(x_0) \neq 0}$, *que l'on fixe. En particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(x_0) \neq 0$ (sinon, par linéarité de f, on aurait aussi $f^{n-1}(x_0) = 0$).*
Montrons que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre).
Pour cela, considérons $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et supposons que $a_0x_0 + a_1f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0_E \quad (*)$.
Méthode 1. *On montre,* **par récurrence forte finie**, *que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$.*

- *En appliquant f^{n-1} (qui est linéaire) à $(*)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_0f^{n-1}(x_0) + 0 = 0$. Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ donc $\underline{a_0 = 0}$.*

- *Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $a_0 = 0, \ldots, a_k = 0$. Montrons $a_{k+1} = 0$.*
  En appliquant $f^{n-2-k} \in \mathcal{L}(E)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_{k+1}f^{n-1}(x_0) + 0 = 0$. Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ donc $\underline{a_{k+1} = 0}$.

- *Par théorème de récurrence, on a donc $\underline{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k = 0}$, donc $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.*

Méthode 2 (par l'absurde à l'aide d'un min). *Supposons par l'absurde que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ alors il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a_{k_0} \neq 0$. Notons $A := \{k \in [\![0, n-1]\!] \mid a_k \neq 0\}$. Alors A est une partie non vide (contient k_0) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément. Notons $\boxed{p = \min(A)}$. Alors $(*)$ devient :*

$$0 + a_pf^p(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n-1} a_kf^k(x_0) = 0_E.$$

En appliquant $f^{n-1-p} \in \mathcal{L}(E)$, et puisque $f^n = 0$, on obtient : $a_pf^{n-1}(x_0) = 0_E$.
Or, $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ par définition, donc par propriété des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $a_p = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi, $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.
• *En particulier, $k \in [\![0, n-1]\!]$, la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^k(x_0))$ est libre (car une sous-famille d'une famille libre est encore libre).*

Noyau, image

Exercice 14. Gammes. *Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes, et préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives.*

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x,0,-3y) \end{array}$ 2. $g: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ 3. $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\geq 0} & \mapsto & (u_0,u_1) \end{array}$

Correction.

1. - *f est linéaire ;*
   - $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$ *donc f est injective.*
   - $\mathrm{Im} f = \{(2x,0,-3y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\,((2,0,0),(0,0,-3))$. $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ *car* $(0,1,0) \notin \mathrm{Im} f$ *donc f n'est pas surjective, ni bijective.*
   Sinon. *Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
   On a : $\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = f(\mathrm{Vect}\,(veps_1, \varepsilon_2)) = \mathrm{Vect}\,(f(veps_1), f(\varepsilon_2)) = \mathrm{Vect}\,((2,0,0),(0,0,-3))$.
2. - *g est linéaire.*
   - $\mathrm{Ker} g$ *est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ (double inclusion) donc g n'est pas injective, ni bijective.*
   - *Soit $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors h admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit H l'une d'elles. H est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H' = h$. Or, h est $\mathscr{C}^0$ donc H' aussi d'où $H \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, $h = g(H) \in \mathrm{Im}(g)$. Donc $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im} g$. L'autre inclusion étant claire, on obtient $\mathrm{Im}(g) = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ i.e. g est surjective.*
3. - *h est linéaire.*
   - $\mathrm{Ker}(h) = \{(u_n) \mid u_0 = u_1 = 0\}$. *Ainsi, la suite $(0,0,12,\dots)$ est une suite non nulle qui appartient au noyau de h donc h n'est pas injective, ni bijective.*
   - *Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. Définissons la suite (u_n) par $u_0 = x$, $u_1 = y$, $\forall n \geq 2, u_n = 0$. Dès lors, $h((u_n)) = (x,y)$. Ainsi, $\mathbb{C}^2 \subset \mathrm{Im}(h)$. L'autre inclusion étant claire, on en déduit que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{C}^2$ donc h est surjective.*

Exercice 15. Un polynôme d'endomorphisme. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, deux scalaires distincts α et β et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - (\alpha+\beta)u + \alpha\beta \mathrm{Id}_E = 0$. On note $E_\alpha := \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $E_\beta := \mathrm{Ker}(u - \beta \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $E = E_\alpha \oplus E_\beta$.*

Correction. *On raisonne par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.*

- *Analyse. Soit $(y,z) \in E_\alpha \times E_\beta$ tel que $x = y + z$.*
  On a $\begin{cases} x &= y + z \\ u(x) &= \alpha y + \beta z \end{cases}$, *donc le système a une unique solution :* $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(\beta x - u(x)) \\ z = \dfrac{1}{\beta-\alpha}(u(x) - \alpha x) \end{cases}$.
  On a donc l'unicité en cas d'existence.
- *Synthèse. Posons* $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(\beta x - u(x)) \\ z = \dfrac{1}{\beta-\alpha}(u(x) - \alpha x) \end{cases}$. *Alors $u(y) = \alpha y$ donc $y \in E_\alpha$ et $u(z) = \alpha z$ donc $z \in E_\beta$.*

De plus, $y + z = x$ donc l'existence est acquise.

Exercice 16. A connaître ! *Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que*

$$g \circ f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

Correction. *On a :*

$$\begin{aligned} g \circ f = 0 &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Ker} g \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g. \end{aligned}$$

En particulier : $f^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

Exercice 17. Une égalité d'ensembles. *Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que*

$$f\left(\mathrm{Ker}(g \circ f)\right) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f).$$

Correction. *Procédons par double inclusion.*

- *Soit $y \in f\left(\mathrm{Ker}(g \circ f)\right)$. Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$.*
  Alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$.
  De plus, par hypothèse, $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$, d'où $\boxed{f\left(\mathrm{Ker}(g \circ f)\right) \subset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)}$.
- *Soit $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $g(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, et $y \in f(\mathrm{Ker}(g \circ f))$. On a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset f\left(\mathrm{Ker}(g \circ f)\right)}$.*

Exercice 18. Stabilité. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E qui commutent.*
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g (c'est-à-dire $g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$).

Correction.

- *Montrons que $\boxed{g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.*
  Soit $y \in g(\mathrm{Ker}(f))$. Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $y = g(x)$. Donc puisque $f \circ g = g \circ f$, on a $f(y) = f(g(x)) = g(f(x))$. Or, $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$ et ainsi, $f(y) = 0$, d'où $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
- *Montrons que $\boxed{g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)}$.*
  Soit $z \in g(\mathrm{Im}(f))$. Alors il existe $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $z = g(y)$. Mais il existe aussi $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 19. Inclusion des images. *Soient E et F deux espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que*

$$f(E_1) \subset f(E_2) \iff E_1 + \mathrm{Ker} f \subset E_2 + \mathrm{Ker} f.$$

Correction.

- *Supposons $f(E_1) \subset f(E_2)$.*
  - *Soit $x_1 \in E_1$. Par hypothèse, il existe $x_2 \in E_2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. f étant linéaire, on a donc $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker} f$, donc $x_1 \in E_2 + \mathrm{Ker} f$, puis $\underline{E_1 \subset E_2 + \mathrm{Ker} f}$.*
  - *$\mathrm{Ker} f$ étant stable par somme (car ssev), on a bien $\underline{E_1 + \mathrm{Ker} f \subset E_2 + \mathrm{Ker} f}$.*
- *Supposons $E_1 + \mathrm{Ker} f \subset E_2 + \mathrm{Ker} f$.*
  Soit $y \in f(E_1)$. On peut donc trouver $x_1 \in E_1$ tel que $y = f(x_1)$.
  En particulier, $x_1 \in E_1 + \mathrm{Ker}(f)$, donc par hypothèse, il existe $x_2 \in E_2$ et $x_0 \in \mathrm{Ker} f$ tels que $x_1 = x_2 + x_0$. Par linéarité de f, on a alors :

  $$y = f(x_1) = f(x_2) + f(x_0) = f(x_2) \in f(E_2),$$

  ce qui montre que $\underline{f(E_1) \subset f(E_2)}$.

Exercice 20. Image, noyau et base. *Soient E, F deux espaces vectoriels, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. *Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*
2. *On suppose que l'entier $p \in [\![0,n]\!]$ vérifie*

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = 0_F \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1,n]\!],\ f(e_i) \neq 0_F.$$

   (a) *Démontrer une inclusion entre $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathrm{Ker} f$.*
   (b) *Donner un exemple montrant qu'en général, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathrm{Ker} f$ ne sont pas égaux.*
   (c) *On suppose $n = p+1$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Ker} f$.*

Correction.

1. *Déjà, on a clairement $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in \mathrm{Im} f$. Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit que $\underline{\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im} f}$.*

   Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im} f$.

   On peut donc trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

   Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E, on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

   Par linéarité de f, on en déduit que

   $$y = f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n)),$$

   ce qui conclut.

2. (a) *Par définition, on a* $e_1, \ldots, e_p \in \mathrm{Ker} f$. *Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit* $\boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p) \subset \mathrm{Ker} f}$.

   (b) *Considérons l'application*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & x + y. \end{array}$$

   Il s'agit bien d'une application linéaire et elle vérifie les hypothèses de l'énoncé avec $p = 0$. *On a donc* $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)) = \mathrm{Vect}\,(\varnothing) = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$, *alors que l'on vérifie que* $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\,((-1, 1))$, *donc l'inclusion de la question précédente est stricte.*

   (c) *Soit* $x \in \mathrm{Ker} f$.
   Comme $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ *engendre* E, *on peut trouver* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ *tels que l'on ait* $x = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i e_i$.
   Comme $x \in \mathrm{Ker} f$, *on a*

$$\begin{aligned} 0_F &= f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(e_i) && \text{(par linéarité de } f\text{)} \\ &= \lambda_{p+1} f(e_{p+1}) && \text{(car } f(e_1) = \cdots = f(e_p) = 0_F\text{).} \end{aligned}$$

   Or, par hypothèse, $f(e_{p+1}) \neq 0_F$. *D'après la règle du produit scalaire-vecteur nul, on en déduit* $\lambda_{p+1} = 0$, *donc*

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)\,,$$

   ce qui montre l'inclusion $\underline{\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)}$ *et, par suite, l'égalité* $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)}$.

Exercice 21. Noyau et image d'une composée. *Soient* E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. *Inclusions automatiques.*
   (a) *Montrer que* $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   (c) *Montrer que* $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$. **Indication :** *il s'agit bien sûr de l'image réciproque !*
2. *Caractérisation d'égalités.*
   (a) *Montrer :* $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f \iff \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0_F\}$.
   (b) *Montrer :* $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g \iff \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F$.

Correction.

1. (a) *Soit* $x \in \mathrm{Ker}(f)$. *Alors* $f(x) = 0$. g *étant linéaire, on a :* $g(f(x)) = g(0) = 0$, *donc* $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. *Ainsi, on a bien* $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)}$.

(b) *Soit* $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$*. Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$*. Alors* $y \in \mathrm{Im}(g)$*.*
Finalement, $\boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)}$.
Remarque : *également vrai pour des applications (non nécessairement linéaires).*

(c) *Soit* $x \in E$*. On a :*

$$x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) \Longleftrightarrow g(f(x)) = 0 \Longleftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(g) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{Ker}(g)).$$

D'où l'égalité souhaitée.

2. (a) *Procédons par double implication.*
   - *Supposons* $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$*.*
     Soit $x \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$*. Alors il existe* $a \in E$ *tel que* $x = f(a)$ *et* $g(x) = 0$*. On a donc* $g(f(a)) = 0$*, d'où* $a \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$*. Or, par hypothèse* $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$ *donc* $a \in \mathrm{Ker}(f)$ *d'où* $x = f(a) = 0$*.*
     On a donc montré que $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f \subset \{0_F\}$*. L'inclusion réciproque étant triviale, on a bien l'implication directe.*
   - *Supposons* $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0_F\}$*.*
     g *étant linéaire, on a toujours,* $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$*.*
     Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$*. Alors* $g(f(x)) = 0$ *d'où* $f(x) \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$*, qui est réduit à* $\{0_F\}$ *par hypothèse, donc* $f(x) = 0$*, puis* $x \in \mathrm{Ker} f$*. On a donc* $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker} f$*, puis l'égalité, ce qui prouve l'implication réciproque.*

   (b) *Procédons par double implication.*
   - *Supposons* $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$*. Puisqu'on a déjà* $\mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f \subset F$*, montrons l'inclusion réciproque.*
     Soit $y \in F$*. Alors* $g(y) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ *par hypothèse. Donc il existe* $x \in E$ *tel que* $g(y) = (g \circ f)(x)$*.* g *étant linéaire, on a :* $g(y - f(x)) = 0$*, d'où* $\underline{y - f(x) \in \mathrm{Ker}(g)}$*. Ainsi,*

     $$y = \underbrace{(y - f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(g)} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)},$$

     donc $F \subset \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$*. Finalement, on a l'égalité :* $\boxed{\mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F}$.
   - *Supposons* $\mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F$*.*
     On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$*, donc montrons l'inclusion réciproque.*
     Soit $z \in \mathrm{Im} g$*. Alors il existe* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$*. Par hypothèse, il existe* $(a, b) \in \mathrm{Ker} g \times \mathrm{Im} f$ *tel que* $y = a + b$*.* g *étant linéaire, on a* $z = g(y) = g(a) + g(b) = 0 + g(b)$*. Or,* $b \in \mathrm{Im} f$ *donc il existe* $t \in E$ *tel que* $b = f(t)$ *puis* $z = g(b) = (g \circ f)(t)$*. On a donc* $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$*, puis l'égalité* $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$*.*

Exercice 22. Images en somme directe. *Soient* E *un espace vectoriel et* $f, g \in \mathcal{L}(E)$*.*
Montrer que si $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$*, alors* $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$*.*

<u>**Correction.**</u> *Supposons que* $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$*.*
Soit $x \in E$*.*
Alors $f(x) \in \mathrm{Im} f$ *et* $f(x) + 0_{\mathrm{Im} g} \in \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$*.*
Par hypothèse, on peut trouver $\xi \in E$ *tel que* $(f + g)(\xi) = f(x) + 0_{\mathrm{Im} g}$*.*
Puisque $\mathrm{Im} f$ *et* $\mathrm{Im} g$ *sont en somme directe, on a par unicité de la décomposition d'un vecteur de* $\mathrm{Im} f +$

$\mathrm{Im} g$:

$$f(\xi) = f(x) \qquad \text{et} \qquad g(\xi) = 0.$$

La première égalité entraîne que $x - \xi \in \mathrm{Ker} f$ et la deuxième que $\xi \in \mathrm{Ker} g$.
On en déduit $x = (x - \xi) + \xi \in \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g$, ce qui montre que $\underline{E \subset \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g}$.
Par ailleurs, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, donc $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont des ssev de E et E est stable par somme, donc $\underline{\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g \subset E}$, ce qui conclut.

Exercice 23. Inversibilité d'une composée. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer l'équivalence*

$$g \circ f \text{ est un isomorphisme} \Longleftrightarrow \begin{cases} g \text{ surjective} \\ f \text{ injective} \\ F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f. \end{cases}$$

Correction. *On procède par double implication.*

- *Supposons que $g \circ f$ est un isomorphisme.*
  - *En particulier, $g \circ f$ est injectif. On a vu dans le cours sur les applications que cela entraînait l'injectivité de f.*
  - *De même, $g \circ f$ est surjectif, et on a vu que cela impliquait la surjectivité de g.*
  - *Montrons $F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$.*
    - *Soit $y \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$.*
      Comme $y \in \mathrm{Im} f$, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors

      $$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= 0, && \text{car } y \in \mathrm{Ker} g \end{aligned}$$

      ce qui entraîne que $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
      Comme $g \circ f$ est injective, on a $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$. Il s'ensuit $y = f(0_E) = 0_F$.
      On a donc montré que $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0_F\}$.
    - *Soit $y \in F$. Montrons $y \in \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$.*
      On a $g(y) \in G$.
      Comme $g \circ f$ est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $g(y) = (g \circ f)(x)$. Les éléments y et $f(x) \in F$ ont alors la même image par g, ce qui montre que $y - f(x) \in \mathrm{Ker} g$.
      On a donc $y = \underbrace{(y - f(x))}_{\in \mathrm{Ker} g} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im} f}$, ce qui montre que $y \in \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$.

    On a donc montré $F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$.
- *Réciproquement, supposons que g soit surjective, que f soit injective et que $F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$, et montrons que $g \circ f$ est un isomorphisme.*

- *Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.*
  On a donc $g(f(x)) = 0_G$. On peut réécrire cette assertion sous la forme $f(x) \in \mathrm{Ker} g$. L'élément $f(x)$ appartient donc à la fois à $\mathrm{Ker} g$ et à $\mathrm{Im} f$. Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on a $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0_F\}$, donc $f(x) = 0_F$.
  Comme f est injective, on en déduit $x = 0_E$.
  Ainsi, on a montré $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$, ce qui montre que $g \circ f$ est injective.
- *Soit $z \in G$.*
  Comme g est surjective, on peut trouver $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
  Comme $F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$, on peut trouver $k \in \mathrm{Ker} g$ et $i \in \mathrm{Im} f$ tels que $y = k + i$. On peut en outre trouver $x \in E$ tel que $i = f(x)$.
  Puisque les éléments $f(x)$ et y diffèrent d'un élément de $\mathrm{Ker} g$ (ici, k), on en déduit qu'ils ont la même image par g. On a donc $g(y) = g(f(x))$.
  Comme $g(y) = z$, on a bien montré $z = (g \circ f)(x)$ et donc $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.
  On a donc $\mathrm{Im}(g \circ f) = G$.

On a montré $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = G$. Cela montre que $g \circ f$ est un isomorphisme.

Exercice 24. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que*

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \iff \Big(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)\Big).$$

Correction.

Sens direct. *Supposons $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.*
Comme on a toujours $\underline{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$ et $\underline{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)}$, il suffit de montrer les inclusions réciproques.

- *Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
  Or, $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$, donc on peut écrire $x = f(a) + x_k$, avec $a \in E$ et $x_k \in \mathrm{Ker}(f)$.
  Par linéarité de f, on obtient $f(x) = f^2(a) + 0$, donc $y = f^2(a)$, d'où $y \in \mathrm{Im}(f^2)$.
  Ainsi, $\underline{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)}$.
- *Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors $f^2(x) = 0$, i.e. $f(f(x)) = 0$. Ainsi, $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.*
  Or $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe, donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$, d'où $f(x) = 0$, puis $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\underline{\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

Finalement, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)}$ et $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$.

Sens réciproque. *Supposons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.*

- *Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc par hypothèse, $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$. D'où, il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$. Par linéarité de f, on a alors $f(x - f(a)) = 0$, d'où $x - f(a) \in \mathrm{Ker}(f)$.*
  Ainsi, on a
  $$x = \underbrace{f(a)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{(x - f(a))}_{\in \mathrm{Ker}(f)},$$
  ce qui prouve que $E \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$. De plus, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E donc $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$. Ainsi, $\underline{E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)}$.

- *Soit* $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$. *Alors il existe* $a \in E$ *tel que* $x = f(a)$ *et* $f(x) = 0$. *Ainsi,* $f^2(a) = 0$, *donc* $a \in \operatorname{Ker}(f^2)$. *Or par hypothèse,* $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, *donc* $a \in \operatorname{Ker}(f)$, *d'où* $f(a) = 0$, *i.e.* $x = 0$. *Ainsi,* $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) \subset \{0_E\}$, *puis* $\underline{\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}}$.

On a montré que $E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$, *donc par caractérisation*

$$\boxed{E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)}.$$

Exercice 25. $f^7 = f$**.** *Soient* E *un espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $f^7 = f$.
Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Correction. *Soit* $x \in E$.
Montrons par analyse et synthèse qu'il existe un unique couple $(k, i) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$ *tel que* $x = k + i$.

Analyse. *Soit* (k, i) *un tel couple. On peut trouver* $t \in E$ *tel que* $i = f(t)$. *On a donc* $x = k + f(t)$.

En appliquant f, *il vient* $f(x) = f^2(t)$.

En appliquant f^5, *il vient alors* $f^6(x) = f^7(t) = f(t) = i$.

On en déduit $k = x - f^6(x)$.

Synthèse. *Réciproquement, vérifions que le couple* $(f^6(x), x - f^6(x))$ *convient.*

Il est patent que

- $f^6(x) \in \operatorname{Im} f$ *;*
- *et que* $(x - f^6(x)) + f^6(x) = x$.

Il reste simplement à vérifier que $x - f^6(x) \in \operatorname{Ker} f$ *:*

$$f\left(x - f^6(x)\right) = f(x) - f^7(x) = f(x) - f(x) = 0_E.$$

L'existence et l'unicité d'une telle décomposition montrent que $\boxed{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f}$.

Exercice 26. Image d'une somme. *Soient E, F deux espaces vectoriels, S_1, S_2 deux sous-espaces vectoriels de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Montrer que $u(S_1 + S_2) = u(S_1) + u(S_2)$.*
2. *On suppose u injective et S_1 et S_2 en somme directe. Montrer que $u(S_1 \oplus S_2) = u(S_1) \oplus u(S_2)$.*
3. *Montrer que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse d'injectivité dans la question précédente.*

Correction.

1. *On procède par double inclusion.*
   - *Soit $y \in u(S_1 + S_2)$.*
     On peut trouver $x \in S_1 + S_2$ tel que $y = u(x)$.
     On peut trouver $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
     On a alors
     $$y = u(x) = u(x_1 + x_2) = \underbrace{u(x_1)}_{\in u(S_1)} + \underbrace{u(x_2)}_{\in u(S_2)} \in u(S_1) + u(S_2).$$
     On a donc montré que $\boxed{u(S_1 + S_2) \subset u(S_1) + u(S_2)}$.
   - *Réciproquement, soit $y \in u(S_1) + u(S_2)$.*
     On peut trouver $y_1 \in u(S_1)$, $y_2 \in u(S_2)$ tels que $y = y_1 + y_2$.
     On peut trouver $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$ tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$.
     On a alors
     $$y = u(x_1) + u(x_2) = u\Big(\underbrace{x_1 + x_2}_{\in S_1 + S_2}\Big) \in u(S_1) + u(S_2).$$
     On a donc montré que $\boxed{u(S_1) + u(S_2) \subset u(S_1 + S_2)}$.
2. *La seule chose à montrer est que $u(S_1) \cap u(S_2) = \{0_F\}$.*

   Soit $y \in u(S_1) \cap u(S_2)$.

   Comme $y \in u(S_1)$, on peut trouver $x_1 \in S_1$ tel que $y = u(x_1)$. De même, on peut trouver $x_2 \in S_2$ tel que $y = u(x_2)$.

   Comme u est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$. Cet élément est donc à la fois dans S_1 et S_2. Puisque ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on en déduit $x_1 = x_2 = 0_E$. Par linéarité de u, on obtient $y = 0_F$.
3. *Il suffit de prendre par exemple $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $u : (x, y) \mapsto x + y$, $S_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ et $S_2 = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.*
   Pour cet exemple, on a bien S_1 et S_2 en somme directe, mais u n'est pas injective (car $\mathrm{Ker} u = \mathrm{Vect}\left((1,-1)\right) \neq \{0\}$), et $u(S_1) = \mathbb{R} = u(S_2)$ donc $u(S_1)$ et $u(S_2)$ ne sont pas en somme directe. L'hypothèse d'injectivité est donc nécessaire.

Exercice 27. Image directe exceptionnelle. *Soient E, F deux espaces vectoriels, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit*

$$W = \{y \in F \mid f^{-1}(\{y\}) \subset V\}.$$

Il s'agit bien sûr d'une image réciproque. Notez que pour $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est constitué des antécédents de y par f.

1. *Montrer que si W est un sous-espace vectoriel de F, alors $\mathrm{Ker} f \subset V$.*
2. *On suppose $\mathrm{Ker} f \subset V$. Montrer que*
$$W = f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f).$$
3. ***Lemme.** Soit $H \subset F$ un sous-espace vectoriel **strict**, c'est-à-dire différent de F lui-même. Montrer que tout élément de F est somme de deux éléments de $F \setminus H$.*
4. *Déduire de tout ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que W soit un sous-espace vectoriel de F. Que vaut W dans ce cas ?*

Correction.

1. *On a clairement la chaîne d'équivalences*
$$0_F \in W \iff f^{-1}(\{0_F\}) \subset V \iff \mathrm{Ker} f \subset V.$$
Ainsi, si W est un sous-espace vectoriel de F, on a $0_F \in W$, donc $\mathrm{Ker} f \subset V$.

2. *On procède par double inclusion.*

Sens direct. *Soit $y \in W$. Alors $y \in F$. On distingue deux cas.*

- *Si $y \in \mathrm{Im} f$, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
On en déduit que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Comme $y \in W$, on a $f^{-1}(\{y\}) \subset V$, donc $x \in V$.
On en déduit que $y \in f(V)$, et a fortiori $y \in f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f)$.
- *Si $y \notin \mathrm{Im} f$, alors $y \in F \setminus \mathrm{Im} f$, donc a fortiori $y \in f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f)$.*

Sens réciproque. *Soit $y \in f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f)$. On distingue deux cas.*

- *Si $y \in f(V)$, on peut trouver $x_0 \in V$ tel que $y = f(x_0)$.*
Montrons que $y \in W$, c'est-à-dire que $f^{-1}(\{y\}) \subset V$.
Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$.
On a donc $f(x) = y = f(x_0)$.
On en déduit que $x - x_0 \in \mathrm{Ker} f$. Or, par hypothèse $\mathrm{Ker} f \subset V$, donc $x - x_0 \in V$, donc
$$x \in \underbrace{x_0}_{\in V} + \underbrace{x - x_0}_{\in V}.$$
Puisque V est stable par somme, on en déduit que $x \in V$, ce qui conclut.
- *Si $y \in (F \setminus \mathrm{Im} f)$, $y \notin \mathrm{Im} f$, donc $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \subset V$, d'où $y \in W$.*

3. *Comme H est un sous-espace vectoriel strict de F, on peut trouver $f \in F \setminus H$.*
Soit $y \in F$. Cherchons à écrire y comme somme de deux éléments de $F \setminus H$.
On distingue deux cas.

- *si $y \in H$, on écrit*

$$y = f + (y - f),$$

et il est déjà clair que $f \in F \setminus H$.
Montrons maintenant que $y - f \in F \setminus H$. Pour cela, supposons par l'absurde que $y - f \in H$. On en déduirait que $f = y - (y - f) \in H$, ce qui donne la contradiction souhaitée.

- *Si $y \in F \setminus H$, on écrit*

$$y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y,$$

ce qui conclut directement.

4. *On procède par analyse et synthèse.*

Analyse. *Supposons que W soit un sous-espace vectoriel de F.*
D'après la première question, on sait déjà que $\mathrm{Ker} f \subset V$.
D'après la deuxième question, on sait que $W = f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f)$, donc $F \setminus \mathrm{Im} f \subset W$.
Supposons en outre f non surjective. *Alors $\mathrm{Im} f \subsetneq F$.*

- *D'après la question précédente, tout vecteur de F peut s'écrire comme somme de deux éléments de $F \setminus \mathrm{Im} f$ (qui sont donc éléments de W), donc $F \subset W$. Comme W est un sous-espace vectoriel de F, on en déduit que $\boxed{W = F}$.*
- *D'après 2., on a donc $\mathrm{Im} f \subset F = W = f(V) \cup (F \setminus \mathrm{Im} f)$, ce qui entraîne $\mathrm{Im} f \subset f(V)$. L'inclusion réciproque étant automatique, on a $\boxed{f(V) = \mathrm{Im} f}$.*
- *Montrons que cela entraîne $\boxed{V = E}$.*
Soit $x \in E$.
On a $f(x) \in \mathrm{Im} f$, donc $f(x) \in f(V)$, donc on peut trouver $v \in V$ tel que $f(x) = f(v)$, donc $x - v \in \mathrm{Ker} f \subset V$, donc $x = v + (x - v) \in V$, ce qui conclut.

On a donc montré que si W est un sous-espace vectoriel de F, alors

$$V = E, \text{ ou bien } (\mathrm{Ker} f \subset V \text{ et } \mathrm{Im} f = F).$$

Synthèse. *Réciproquement,*

- *si $V = E$, on a clairement $W = F$ et W est un sous-espace vectoriel de F ;*
- *si $\mathrm{Ker} f \subset V$ et $\mathrm{Im} f = F$, la deuxième question entraîne directement que $W = f(V)$, ce qui entraîne que W est un sous-espace vectoriel de F (l'image directe d'un ssev par une application linéaire est un ssev).*

Conclusion. *In fine, W est un sous-espace vectoriel si et seulement si $V = E$ (auquel cas $W = F$) ou f est surjective de noyau contenu dans V (auquel cas $W = f(V)$).*

Exercice 28. Trois endomorphismes. *Soient E un espace vectoriel et $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que*

$$f \circ g = h, \qquad g \circ h = f \qquad \text{et} \qquad h \circ f = g.$$

1. *Montrer que f, g et h ont le même noyau et la même image.*

   $h \circ f = g$ implique que $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g$. En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}f$, alors $f(x) = 0$ puis $h \circ f(x) = 0$ i.e. $g(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}g$. Les autres égalités donnent :

   $$\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g \subset \mathrm{Ker}h \subset \mathrm{Ker}f,$$

   donc on a l'égalité des noyaux.
   De plus, $f \circ g = h$ implique que $\mathrm{Im}h \subset \mathrm{Im}f$. Les autres égalités donnent :

   $$\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}h \subset \mathrm{Im}f,$$

   donc on a l'égalité des images.

2. *Montrer que $f^5 = f$.*

   On vérifie directement que :

   $$\begin{cases} gf &= h^3 \\ hg &= f^3 \\ fh &= g^3, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f^2 = g^2 = h^2 = fgh = ghf = hfg \\ f^4 = g^4 = h^4 = hgf = gfh = fhg. \end{cases}$$

   On en déduit par exemple

   $$f^5 = f \circ gfh = hfh = gh = f.$$

3. *En déduire que $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires.*

   Soit $y \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f$. On peut donc trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors

   $$y = f(x) = f^5(x) = f^4(f(x)) = f^4(y) = 0,$$

   ce qui prouve $\boxed{\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}}$.
   Soit $x \in E$. Les vecteurs $f^4(x)$ et x ont la même image par l'application f donc

   $$x = \underbrace{f^4(x)}_{\in \mathrm{Im}f} + \underbrace{\left(x - f^4(x)\right)}_{\in \mathrm{Ker}f},$$

   ce qui prouve $\boxed{E = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f}$. *Ainsi, on a* $\boxed{E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f}$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 29. Sous-espace maximal. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer $F = H$ ou $F = E$.*

Correction. *On a $H \subset F \subset E$. Supposons $F \neq H$, et montrons que $F = E$, ce qui montrera la disjonction.*
Comme $H \subsetneq F$, il existe alors $a \in F \setminus H$.
D'après le cours, on a alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
Puisque $H \subset F$ et $\mathrm{Vect}(a) \subset F$, on a $E \subset F$. De plus, par hypothèse, $F \subset E$, donc $F = E$.
Ainsi, on a bien montré $\boxed{F = H \text{ ou } F = E}$.

Exercice 30. E^* est intègre. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux formes linéaires sur E. Montrer que $fg = 0 \Longrightarrow (f = 0 \text{ ou } g = 0)$.*

Correction. *Supposons $fg = 0$ c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f(x)g(x) = 0$.*
Méthode 1. *Raisonnons par l'absurde et supposons les formes linéaires f et g non nulles.*
On peut donc trouver $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$.
Puisque $f(x)g(x) = f(y)g(y) = 0$ et $\mathbb{K}$ est intègre, on a $f(y) = 0$ et $g(x) = 0$.
Or, par linéarité de f, on a $f(x+y) = f(x) + f(y) = f(x) \neq 0$. De même, $g(x+y) = g(y) \neq 0$.
Par intégrité de $\mathbb{K}$, on a alors $f(x+y)g(x+y) \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi f est nulle ou g est nulle.
Méthode 2. *Montrons la disjonction par méthode habituelle. Supposons $f \neq 0$ et montrons que $g = 0$.*
$f \neq 0$ donc on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Soit $y \in E$. Montrons que $g(y) = 0$.
Par hypothèse, $f(x)g(x) = 0$, $\mathbb{K}$ est intègre et $f(x) \neq 0$ donc $g(x) = 0$.
On considère le vecteur $x + y$.
Par hypothèse, $0 = f(x+y)g(x+y) = (f(x)+f(y))g(y) = f(x)g(y)+(fg)(y) = f(x)g(y)+0_E = f(x)g(y)$.
Or, $f(x) \neq 0$ donc par intégrité de $\mathbb{K}$, on a $g(y) = 0$.
D'où $g = 0$. On a bien montré que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 31. Un exemple d'hyperplan. *On note $P_\infty = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\}$ et $d : \begin{array}{ccc} P_\infty & \to & P_\infty \\ f & \mapsto & f' \end{array}$.*

1. *Vérifier que P_∞ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis que d est un endomorphisme de P_∞.*

   - *P_∞ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, car :*
     - *$P_\infty \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$.*
     - *La fonction nulle appartient à P_∞.*
     - *P_∞ est stable par CL.*
   - *d est un endomorphisme de P_∞ car :*
     - *d est linéaire car la dérivée est linéaire.*
     - *Vérifions que $\mathrm{Im}(d) \subset P_\infty$:*
       Soit $f \in P_\infty$. Alors f est $\mathscr{C}^\infty$ donc f' est $\mathscr{C}^\infty$. Et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ puis en dérivant, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+1) \times 1 = f'(x)$ donc $d(f) = f' \in P_\infty$.

2. *Déterminer $\mathrm{Ker}(d)$.*

Soit $f \in \operatorname{Ker}(d)$. Alors $f' = 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Réciproquement, les fonctions constantes sont 1-périodiques et à dérivée nulle donc sont dans $\operatorname{Ker}(d)$.
Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(d) \text{ est l'ensemble des applications constantes.}}$

3. *Montrer que* $\operatorname{Im}(d) = \left\{ g \in P_\infty \;\middle|\; \int_0^1 g = 0 \right\}$. *En déduire que* $\operatorname{Im}(d)$ *est un hyperplan de* P_∞.

- *$\subset$: Soit $g \in \operatorname{Im}(d)$. Alors il existe $f \in P_\infty$ tel que $g = f'$.*
  $\displaystyle\int_0^1 g = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$ *car f est 1-périodique.*
- *$\supset$: Soit $g \in P_\infty$ telle que $\int_0^1 g = 0$. Trouvons $f \in P_\infty$ telle que $g = f'$. Cherchons f parmi les primitives de g...*
  g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit G l'une d'entre elles. Ainsi, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G' = g$.
  g est $\mathscr{C}^\infty$ donc G est aussi $\mathscr{C}^\infty$. Montrons que G est 1-périodique.
  Méthode 1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :* $G(x+1) - G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} G'(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} g(t)\mathrm{d}t \underset{(*)}{=} \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ *car g est 1-périodique et par définition de $\operatorname{Im}(d)$.*
  Ainsi, $G \in P_\infty$ donc $g = d(G) \in \operatorname{Im}(d)$.

  > ***Cours.*** *Montrons que si f est T-périodique alors son intégrale sur un période est invariante, i.e.* $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.
  > *Soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à la relation de Chasles, on écrit :*
  > $$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f.$$
  > *Transformons la troisième intégrale à l'aide d'un changement de variable (on pose $x = u + T$, où $u \mapsto u + T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ainsi,*
  > $$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u,$$
  > *car f est T-périodique.*
  > *Ainsi, la troisième intégrale étant l'opposé de la première, on a bien le résultat attendu.*

- $\operatorname{Im}(d) = \operatorname{Ker}\phi$ *où* $\phi : \begin{array}{ccc} P_\infty & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 g \end{array}$. *$\phi$ est linéaire sur P_∞ car l'intégrale l'est. Ainsi,*
  $\boxed{\phi \text{ est une forme linéaire non nulle donc } \operatorname{Im}(d) \text{ est un hyperplan de } P_\infty}$.

Méthode 2. *On a $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) = g(x)$.*
Donc G et $x \mapsto G(x+1)$ sont deux primitives de g donc diffèrent d'une constante. On peut donc trouver $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x+1) - G(x) = C$.
En particulier $G(1) - G(0) = C$, mais on a aussi $G(1) - G(0) = \int_0^1 G' = \int_0^1 g = 0$ par hypothèse.
Donc $C = 0$, puis $\underline{G \text{ est 1-périodique}}$.

4. *Montrer que* $P_\infty = \operatorname{Ker}(d) \oplus \operatorname{Im}(d)$.

On a vu que $\mathrm{Im}(d)$ *est un hyperplan de* P_∞ *et* $\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Vect}\left((x \mapsto 1)\right)$, *avec* $(x \mapsto 1) \notin \mathrm{Im}(d)$ *donc par théorème sur les hyperplans, on a :*

$$P_\infty = \mathrm{Ker}(d) \oplus \mathrm{Im}(d).$$

Exercice 32. Trace et forme linéaire. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\Theta : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *une forme linéaire telle que* $\Theta(AB) = \Theta(BA)$ *pour tout* (A, B) *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. *Montrer que* Θ *est proportionnelle à la trace.*

Correction.

- *D'abord la trace est une forme linéaire sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *qui vérifie* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- *Connaître une application linéaire revient à connaître son image sur une base.*
  Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. *Calculons* $\Theta(E_{i,j})$. *On remarque que* $\boxed{E_{i,j} = E_{i,1}E_{1,j}}$. *Par propriété de* Θ, *on en déduit que*

$$\begin{aligned}\Theta(E_{i,j}) &= \Theta(E_{i,1}E_{1,j}) \\ &= \Theta(E_{1,j}E_{i,1}) \\ &= \Theta(\delta_{i,j}E_{1,1}) \\ &= \begin{cases} \Theta(E_{1,1}) \textit{ si } i = j \\ 0 \textit{ sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

- *Soit* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors on peut écrire* $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}$, *où les* $m_{i,j}$ *sont les coefficients de la matrice* M.
  Comme Θ *est linéaire, on a :*

$$\begin{aligned}\Theta(M) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\Theta(E_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\Theta(E_{1,1}) \\ &= \Theta(E_{1,1})\mathrm{Tr}(M).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Theta \textit{ est bien proportionnelle à la trace}}$.

Projecteurs et symétries

Exercice 33. Un exemple de symétrie. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^3$. Considérons l'unique endomorphisme u de $\mathbb{K}^3$ tel que $u(e_1) = e_3$, $u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = e_1$.*
Montrer que u est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques (c'est-à-dire les espaces F_1 et F_2 tels que u soit la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2).

Correction. **Remarque :** *les éléments caractéristiques d'un projecteur p sont* $\mathrm{Ker}p$ *et* $\mathrm{Im}p$.
Après calculs, on a $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $u^2(e_i) = e_i$. Ainsi u^2, qui est linéaire, coïncide avec l'identité de $\mathbb{K}^3$ sur la base (e_1, e_2, e_3) donc $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$; on en déduit que $\boxed{u \text{ est une symétrie}}$.
D'après le cours, u est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, avec $F_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3})$. Déterminons ces deux noyaux. Pour $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, on a :

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) = x_1e_3 + x_2(-e_2) + x_3e_1 = (x_3, -x_2, x_1).$$

Donc

$$X \in F_1 \iff u(X) = X \iff (x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_2, x_1) \iff (x_1 = x_3 \text{ et } x_2 = 0),$$

et :

$$X \in F_2 \iff u(X) = -X \iff (x_1, x_2, x_3) = -(x_3, -x_2, x_1) \iff x_1 = -x_3,$$

donc $\boxed{F_1 = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1)\right)}$ *et* $\boxed{F_2 = \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1), (0, 1, 0)\right)}$.

Exercice 34. Projecteurs explicites. *Dans $\mathbb{R}^3$, on pose*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 3)\right).$$

1. *Montrer que F et G sont supplémentaires.*
2. *Déterminer la projection sur F parallèlement à G de $(2, 2, 3)$.*
3. *Déterminer la projection sur G parallèlement à F de $(1, -2, 0)$.*

Correction.

1. - *Soit $u \in F \cap G$. Comme $u \in G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right)$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

   $$u = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\3\lambda\end{pmatrix}.$$

   L'appartenance de u à F se traduit en l'égalité

   $$\lambda + \lambda - 3\lambda = 0, \quad \text{donc} \quad -\lambda = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = 0.$$

   On a donc bien $u = 0$, et on a montré l'inclusion $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant automatique, on a bien $F \cap G = \{0\}$, donc F et G sont bien en somme directe.
   - *Montrons $F + G = \mathbb{R}^3$. L'autre inclusion étant automatique, il suffit de prouver $\mathbb{R}^3 \subset F + G$.*

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Cherchons un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F$. *On a les équivalences*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F &\iff \begin{pmatrix} x-\lambda \\ y-\lambda \\ z-3\lambda \end{pmatrix} \in F \\ &\iff (x-\lambda)+(y-\lambda)-(z-3\lambda)=0 \\ &\iff x+y-z+\lambda=0 \\ &\iff \lambda = -x-y+z. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\lambda = -x-y+z$, *on a* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F$, *donc*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G} \in F+G.$$

On a donc bien montré

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

2. *En suivant le raisonnement de la première question, on obtient* $\lambda = -1$ *puis la décomposition*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sur* F *parallèlement à* G *est* $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. *On raisonne comme à la question précédente : on trouve* $\lambda = 1$ *puis la décomposition*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sur* G *parallèlement à* F *est* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 35. Projecteurs « complémentaires ». *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.*
2. *On suppose que p est un projecteur de E. Exprimer alors $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.*

Correction.

1. *$p \in \mathcal{L}(E)$ donc $\mathrm{Id}_E - p \in \mathcal{L}(E)$.*
   On a : $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2$ donc $(\mathrm{Id} - p)^2 = (\mathrm{Id} - p) \Leftrightarrow p = p^2$.
   Ainsi, $\boxed{p \text{ est un projecteur ssi } \mathrm{Id} - p \text{ est un projecteur}}$.
2. **Méthode 1 :** *$\mathrm{Id}_E - p$ étant un projecteur, on a :*

$$\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Inv}\ (\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}((\mathrm{Id} - p) - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(-p) = \mathrm{Ker}(p)}.$$

   En appliquant l'égalité précédente au projecteur $\mathrm{Id} - p$, on obtient : $\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p)) = \mathrm{Im}(p)}$.
   Méthode 2 : *On a : $p \circ (\mathrm{Id} - p) = 0$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Ker}(p)$.*
   Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Alors $(\mathrm{Id} - p)(x) = x - p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$. Donc $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.
   Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)}$.
   En appliquant l'égalité précédente à $\mathrm{Id} - p$ (qui est un projecteur), on obtient : $\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)}$.

Exercice 36. Somme de projecteurs. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^2 = ku$.*
Montrer que u s'écrit comme une somme de projecteurs.

Correction. *Considérons l'égalité $u^2 = ku$.*
Multiplions par $\left(\frac{1}{k}\right)^2$ (licite car $k \neq 0$).
On a alors $\left(\frac{1}{k}u\right)^2 = \frac{1}{k}u$, et $\frac{1}{k}u \in \mathcal{L}(E)$ donc $\boxed{\frac{1}{k}u \text{ est un projecteur}}$.
Profitons du fait que k est un entier naturel non nul, en écrivant : $u = \underbrace{\frac{1}{k}u + \cdots + \frac{1}{k}u}_{k \text{ fois}}$.

D'où $\boxed{u \text{ s'écrit comme une somme de projecteurs}}$.

Exercice 37. Inverses unilatéraux. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ deux applications telles que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$ *et* $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v)$.
2. (a) *Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de E.*
   (b) *En déduire que* $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.
3. *Montrer l'équivalence*

$$u \text{ injective} \iff v \text{ surjective} \iff u \text{ et } v \text{ sont des isomorphismes},$$

et que, si ces trois assertions sont vraies, alors u et v sont réciproques l'un de l'autre.

Correction.

1. • $\boxed{\text{Montrons que } \mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)}$:
   - *On a toujours* $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$;
   - *Soit $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$. Alors $(v \circ u)(x) = 0$. En composant par u et comme $u \circ v = \mathrm{Id}_F$, on a : $u(x) = u(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi,* $\mathrm{Ker}(v \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

   • $\boxed{\text{Montrons que } \mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v)}$:
   - *Bien sûr,* $\underline{\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)}$.
   - *Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $x \in F$ tel que $y = v(x)$.*
     Méthode 1. *En composant par $v \circ u$ et car $u \circ v = \mathrm{Id}_F$, on a : $(v \circ u)(y) = (v \circ u \circ v)(x) = v(x) = y$.*
     Méthode 2. *En appliquant u, on a : $u(y) = x$ puis en ré-injectant, on a : $y = v(u(y)) \in \mathrm{Im}(v \circ u)$.*
     Méthode 3. *Puisque $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $x \in F$, on peut écrire $x = u(v(x))$. Donc $y = v(x) = v(u(v(x))) = (v \circ u)(v(x)) \in \mathrm{Im}(v \circ u)$.*

   Dans tous les cas, on a $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$, ce qui montre que $\underline{\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(v \circ u)}$.

2. (a) $(v \circ u)^2 = v \circ u \circ v \circ u = v \circ \mathrm{Id}_F \circ u = v \circ u$. *Ainsi,* $\underline{(v \circ u)^2 = v \circ u}$ *et* $\underline{v \circ u \in \mathcal{L}(E)}$ *donc* $\boxed{v \circ u \text{ est un projecteur de } E}$.
   (b) *$v \circ u$ étant un projecteur, on sait que* $\underline{E = \mathrm{Ker}(v \circ u) \oplus \mathrm{Im}(v \circ u)}$, *et d'après 1., on en déduit que* $\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im} v}$.

3. • *Un supplémentaire de $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = \{0_E\} + F$, c'est-à-dire $F = E$. De même, un supplémentaire de E est un sous-espace vectoriel F de E tel que $F \cap E = \{0_E\}$, c'est-à-dire $F = \{0_E\}$.*
   Ainsi, le seul supplémentaire de $\{0_E\}$ est E, et réciproquement (il s'agit d'ailleurs des seuls cas où le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné est unique).
   • *Cette remarque et la question précédente montrent que*

$$u \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\} \iff \mathrm{Im}(v) = E \iff u \text{ surjective}.$$

   Comme il est en outre clair que la troisième assertion entraîne les deux premières, il reste à montrer que si v est injective, alors v et u sont des isomorphismes.
   • *Supposons donc v injective.*

L'hypothèse $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ entraîne par ailleurs que u est surjective (car Id_F l'est). L'application linéaire u est donc bijective donc un isomorphisme.
On obtient alors $v = u^{-1}$ en composant à gauche par u^{-1} dans la relation $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Cela montre en particulier que v est un isomorphisme.

Exercice 38. Projecteurs de mêmes noyaux. *Soit $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer l'équivalence entre les assertions :*

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$; *(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.*

Correction.

- $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ *: Supposons (i). On a : $p^2 = p \circ q \circ p = p \circ q = p$ et $q^2 = q \circ p \circ q = q \circ p = q$ donc p et q sont des projecteurs.*
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. En appliquant q, on a : $q(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. Par symétrie, on a l'égalité, puis (ii) est vraie.

- $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ *: Supposons (ii).*
  Méthode 1. *Soit $x \in E$. p étant un projecteur, on a :*
  $$x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} .$$
  En appliquant q, il vient : $q(x) = 0 + q(p(x))$, cela pour tout $x \in E$, donc $\boxed{q = q \circ p}$. De même, $p = p \circ q$.
  Méthode 2. *Soit $x \in E$. q étant un projecteur, on a : $E = \mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Im}(q)$.*
  On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$.
  D'une part $q(x) = 0_E + v$ vu que q est un projecteur puis $(p \circ q)(x) = p(v)$.
  D'autre part, par linéarité de p, $p(x) = p(u) + p(v) = p(v)$, car $u \in \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $p \circ q = p$.
  De même, en écrivant $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, on obtient : $q \circ p = q$.
  On a donc (i).
  Méthode 3. *Soit $x \in E$. On a : $p^2 - p = 0$ donc $p(p(x) - x) = 0$ donc $p(x) - x \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.*
  Ainsi, $q(p(x) - x) = 0$ et comme q est linéaire, $q \circ p(x) = q(x)$, cela pour tout $x \in E$ donc $\boxed{q \circ p = q}$.

Exercice 39. Commutativité et sous-espaces stables. *Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes.*

1. *On suppose que g est un projecteur et que $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} g$ sont stables sous f.*
   Montrer que f et g commutent.

2. *Donner un contre-exemple à la question précédente si on ne suppose plus que g est un projecteur.*

Correction.

1. *Supposons que g est un projecteur (on sait alors qu'il s'agit du projecteur sur $S_1 = \mathrm{Im} g = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $S_2 = \mathrm{Ker} g$, et notamment que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires) et que $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} g$ sont stables par f.*

   Pour montrer que f et g commutent, c'est-à-dire que $\forall x \in E, f(g(x)) = g(f(x))$, on va commencer par le faire dans le cas particulier d'un élément d'un des deux sous-espaces vectoriels remarquables S_1 et S_2. Comme on le verra, la linéarité permettra de « recoller les morceaux ».

   - *Soit $x \in S_1$. On a alors*

   $$\begin{aligned} & f(g(x)) = f(x) && \text{(car } x \in S_1 = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)\text{)} \\ \text{et} \quad & g(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

     car S_1 est stable sous f, donc $f(x) \in S_1 = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$, ce qui signifie $g(f(x)) = f(x)$.

   - *Soit $x \in S_2$. On a alors*

   $$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(0_E) && \text{(car } x \in S_2 = \mathrm{Ker} g\text{)} \\ &= 0_E && \text{(car } f \text{ linéaire)} \\ \text{et} \quad g(f(x)) &= 0_E && \text{(car } f(x) \in \mathrm{Ker} g, \text{ par stabilité de } \mathrm{Ker} g \text{ sous } f\text{),} \end{aligned}$$

     donc on a bien $f(g(x)) = g(f(x))$.

   Soit maintenant $x \in E$.

   Comme S_1 et S_2 sont supplémentaires, on peut trouver $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors

   $$\begin{aligned} f(g(x)) &= (f \circ g)(x_1 + x_2) \\ &= (f \circ g)(x_1) + (f \circ g)(x_2) && \text{(car } f \circ g \text{ linéaire)} \\ &= (g \circ f)(x_1) + (g \circ f)(x_2) && \text{(d'après les cas particuliers précédents)} \\ &= (g \circ f)(x_1 + x_2) && \text{(car } g \circ f \text{ linéaire)} \\ &= g(f(x)). \end{aligned}$$

   On a donc bien montré $f \circ g = g \circ f$, c'est-à-dire que f et g commutent.

2. *On peut trouver un contre-exemple pas cher en remarquant que, si g est un automorphisme, alors $\mathrm{Ker} g = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im} g = E$ sont évidemment stables sous f.*

   Il suffit donc de trouver deux endomorphismes, dont l'un est un automorphisme, et qui ne commutent pas.

Par exemple, les endomorphismes

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array},$$

canoniquement associés aux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, conviennent.*

Exercice 40. Composée de projecteurs qui commutent. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E qui commutent.*

1. *Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.*
2. *Exprimer $\mathrm{Ker}(p \circ q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$.*
3. *Exprimer $\mathrm{Im}(p \circ q)$ en fonction de $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.*

Correction.

1. $p \circ q \in \mathcal{L}(E)$ *et* $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ *donc* $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur de } E}$.

2.
   - *Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Alors $x \in E$ et $(p \circ q)(x) = 0_E$, donc $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.*
     Or, $x \in E$ et $E = \mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$ donc on peut écrire $x = \underbrace{(x - q(x))}_{\in \mathrm{Ker}(q)} + \underbrace{q(x)}_{\in \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)}$.
     Puisque $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Ker}(p)$, donc $\underline{\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)}$.
   - *On a toujours $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$ (cf exercice 7).*
     De même, $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q \circ p)$, mais puisque $p \circ q = q \circ p$, on a aussi $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.
     Comme $\mathrm{Ker}(p \circ q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est stable par somme donc $\underline{\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)}$.

   Par double inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)}$.

3.
   - *On a toujours $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$. De plus, $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$. Donc* $\underline{\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)}$.
   - *Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$, car p et q sont des projecteurs. Alors $p(y) = y = q(y)$. En particulier $y = p(y) = p(q(y)) = (p \circ q)(y) \in \mathrm{Im}(p \circ q)$ d'où* $\underline{\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)}$.

   Par double inclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p \circ q)}$.

Exercice 41. Composée de projecteurs. *Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et p et q deux projecteurs de E.*

1. *On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que $p + q$ est un projecteur.*
2. *On suppose que $p + q$ est un projecteur.*
   (a) *Montrer que $p \circ q = -q \circ p$.*
   (b) *En déduire que $p \circ q \circ p = p \circ q = q \circ p = 0$.*
   (c) *Montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.*
   (d) *Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.*

Correction.

1. $(p+q)^2 = p^2 + qp + pq + q^2 = p + q$ et $p + q \in \mathcal{L}(E)$ donc $\boxed{p + q \text{ est un projecteur}}$ de E.
2. (a) $p + q$ est un projecteur donc $(p + q)^2 = p + q$ donc $p + qp + pq + q = p + q$ d'où $qp + pq = 0$ puis $\boxed{p \circ q = -q \circ p}$.
   (b) $p \circ q = -q \circ p$ donc en composant par p à droite il vient : $p \circ q \circ p = -q \circ p \circ p = -q \circ p = p \circ q$. De même, $q \circ p = -p \circ q$ donc en composant par p à gauche $p \circ q \circ p = -p^2 \circ q = -p \circ q = q \circ p$. Ainsi, $\boxed{p \circ q \circ p = p \circ q = q \circ p}$.
   De plus, $p \circ q = q \circ p = -p \circ q$ donc $2p \circ q = 0$ d'où $\boxed{p \circ q = 0}$, ce qui conclut.
   (c) On a toujours $\underline{\operatorname{Im}(p + q) \subset \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)}$.
   Soit $y \in \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$. Alors il existe $(a, b) \in E^2$ tel que $y = p(a) + q(b)$. p et q étant des projecteurs et $p \circ q = q \circ p = 0$, on a : $p(y) = p(a) + 0$ et $q(y) = 0 + q(b)$ donc $y = p(y) + q(y) = (p + q)(y)$ d'où $y \in \operatorname{Im}(p + q)$. Ainsi, $\underline{\operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p + q)}$.
   On en déduit l'égalité demandée.
   (d) On a toujours $\underline{\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q) \subset \operatorname{Ker}(p + q)}$.
   Soit $x \in \operatorname{Ker}(p + q)$. Alors $(p + q)(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$. Ainsi, $p(x) = p^2(x) = -p \circ q(x) = 0$. D'où $x \in \operatorname{Ker}(p)$. De même, on montre que $q(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(q)$. Ainsi, $\underline{\operatorname{Ker}(p + q) \subset \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)}$. On en déduit l'égalité demandée.

Exercice 42. Commutant d'un projecteur. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On note $\mathcal{C}(p)$ le commutant de p, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec p :*

$$\mathcal{C}(p) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid p \circ f = f \circ p\}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}(p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*
2. *Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $f \in \mathcal{C}(p)$ si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.*

Correction.

1. Par bilinéarité de la composition dans $\mathcal{L}(E)$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & p \circ f - f \circ p \end{array}$ est linéaire et $\mathcal{C}(p)$ est son noyau donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- *Si $f \in \mathcal{C}(p)$ alors f et p commutent et on a montré en exercice que les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Im}p$ *et* $\mathrm{Ker}p$ *sont stables par f.*
- *Réciproquement, supposons* $\mathrm{Im}p$ *et* $\mathrm{Ker}p$ *stables par f.*
  L'endomorphisme p est un projecteur donc $E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p$. Montrons que $p \circ f$ et $f \circ p$ coïncident sur $\mathrm{Ker}p$ *et* $\mathrm{Im}p$*.*
  - *Soit $x \in \mathrm{Ker}p$. Par hypothèse, on a alors $f(x) \in \mathrm{Ker}p$. Ainsi, $p(x) = 0 = p(f(x))$. On en déduit que $(p \circ f)(x) = 0 = f(0) = (f \circ p)(x)$.*
  - *Soit $x \in \mathrm{Im}p$. Par hypothèse, on a alors $f(x) \in \mathrm{Im}p$. Or, p est un projecteur donc $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \{t \in E \mid p(t) = t\}$. On a alors $p(x) = x$ et $(p \circ f)(x) = f(x)$. On en déduit que $(p \circ f)(x) = f(x) = (f \circ p)(x)$.*

  Ainsi, les applications linéaires $f \circ p$ et $p \circ f$ coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, donc sont égales, ce qui prouve que $f \in \mathcal{C}(p)$.

Exercice 43. Différence de deux projecteurs. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soient π et κ deux projecteurs de E tels que $\pi \circ \kappa + \kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
   Montrer qu'alors $\pi \circ \kappa = \kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Correction.

Première méthode. *On a : $\pi \circ \kappa + \kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
En composant par π à gauche et car π est linéaire, on a :

$$\underbrace{\pi \circ \pi}_{=\pi} \circ \kappa + \underbrace{\pi \circ \kappa}_{-\kappa \circ \pi} \circ \pi = \underbrace{\pi \circ 0}_{=0_{\mathcal{L}(E)}},$$

donc $\pi \circ \kappa - \kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}$, d'où

$$\boxed{\pi \circ \kappa = \kappa \circ \pi}.$$

Ainsi, $2\kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or, $2 \neq 0_{\mathbb{K}}$, donc $\boxed{\kappa \circ \pi = 0_{\mathcal{L}(E)}}$, ce qui conclut.

Deuxième méthode. *Rappelons que :*

$$\pi \circ \kappa \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\kappa) \subset \mathrm{Ker}(\pi).$$

Soit x un élément de $\mathrm{Im}(\kappa)$ et montrons que $\pi(x) = 0$. En utilisant la relation $\pi \circ \kappa + \kappa \circ \pi = 0$, on a :

$$\pi(x) = \pi(\kappa(x)) = -\kappa(\pi(x)).$$

Donc $\pi(x) \in \mathrm{Ker}(\kappa + \mathrm{Id}_E)$.
Or, $\boxed{\text{si } p \text{ est un projecteur, alors } \mathrm{Ker}(p + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}}$, en décomposant selon $\mathrm{Ker}p$ *et* $\mathrm{Im}p$*.*
Cela entraîne $\pi(x) = 0$ i.e. $\mathrm{Im}\kappa \subset \mathrm{Ker}\pi$ i.e. $\boxed{\pi\kappa = 0}$.
Par symétrie, on montrerait de la même façon que $\boxed{\kappa\pi = 0}$.

2. *Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p-q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = q$.*

En développant $(p-q)^2$, on voit directement que :

$$p-q \text{ est un projecteur si et seulement si } p\circ q + q\circ p = 2q.$$

Il reste à montrer que c'est équivalent à la condition $p\circ q = q\circ p = q$, a priori plus forte.

- *Bien sûr, si $p\circ q = q\circ p = q$ alors $p\circ q + q\circ p = 2q$ et par équivalence, $p-q$ est un projecteur, ce qui montre l'implication indirecte.*
- *Supposons que $p-q$ soit un projecteur. Alors $p\circ q + q\circ p = 2q$. Cependant, on peut réécrire cette condition :*

$$\begin{aligned} p\circ q + q\circ p = 2q &\iff (p-\mathrm{Id}_E)\circ q + q\circ(p-\mathrm{Id}_E) = 0 \\ &\iff p'\circ q + q\circ p' = 0, \end{aligned}$$

où $p' = \mathrm{Id}_E - p$ désigne le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. La question précédente permet de conclure que $p'\circ q = q\circ p' = 0$. En remplaçant $p' = \mathrm{Id}_E - p$, on obtient bien : $pq = q$ et $qp = q$, ce qui montre le sens direct.

Exercice 44. Crochet de Lie de deux symétries. *Soient a et b deux symétries d'un espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Im}\,(ab-ba) = \mathrm{Im}(a+b)\cap\mathrm{Im}(a-b)$.*
Indication : *on se rappellera de la notation $ab = a\circ b$, pour $a, b \in \mathcal{L}(E)$.*

Correction. *Procédons par double inclusion.*

$\boxed{\subset}$ *Comme a et b sont des symétries, on a $a^2 = \mathrm{Id}_E$, $b^2 = \mathrm{Id}_E$, et on en déduit que :*

$$ab - ba = (a-b)(a+b) = (a+b)(b-a) \qquad (\star)$$

Il s'ensuit déjà que $\boxed{\mathrm{Im}(ab-ba) \subset \mathrm{Im}(a+b)\cap\mathrm{Im}(a-b)}$.

$\boxed{\supset}$ *Réciproquement, soit $z \in \mathrm{Im}(a+b)\cap\mathrm{Im}(a-b)$. On peut donc trouver x et y dans E tels que*

$$z = a(x) + b(x) = a(y) - b(y).$$

Méthode 1. *On en déduit que $a(y-x) = b(x+y)$. Notons $2h$ ce vecteur. On a alors*

$$h = \frac{a(y-x)}{2} = \frac{b(x+y)}{2}$$

d'où, puisque $b^2 = \mathrm{Id}_E = a^2$, on obtient

$$ab(h) = ab\left(\frac{b(x+y)}{2}\right) = a\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{et} \quad ba(h) = ba\left(\frac{a(y-x)}{2}\right) = b\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}(ab-ba)(h) &= ab(h)-ba(h)\\ &= \frac{a(x+y)-b(y-x)}{2}\\ &= \frac{a(x)+b(x)+a(y)-b(y)}{2}\\ &= \frac{2z}{2} = z.\end{aligned}$$

Ainsi, $z=(ab-ba)(h)\in \operatorname{Im}(ab-ba)$ *donc* $\boxed{\operatorname{Im}(a+b)\cap \operatorname{Im}(a-b)\subset \operatorname{Im}(ab-ba)}$.
Méthode 2. *On a* $z=(a+b)(x)$ *et* $z=(a-b)(y)$.

En appliquant $(a-b)$ *(resp.* $a+b$*) à la première (resp. deuxième) égalité, et en utilisant les relations* $(\star)$*, on en déduit*

$$\begin{cases} a(z)-b(z)=(a-b)(z)=(ab-ba)(x)\in \operatorname{Im}(ab-ba)\\ \text{et}\\ a(z)+b(z)=(a+b)(z)=-(ab-ba)(y)\in \operatorname{Im}(ab-ba).\end{cases}$$

Par résolution du système somme-différence, on en déduit $a(z), b(z)\in \operatorname{Im}(ab-ba)$.

On en déduit que $z=a(a(z))\in \operatorname{Im}\left(a(ab-ba)\right)$.

Or,

$$\begin{aligned}a(ab-ba) &= a^2b-aba &\\ &= b-aba & a^2=\mathrm{Id}_E\\ &= ba^2-aba & a^2=\mathrm{Id}_E\\ &= (ba-ab)a &\\ &= (ab-ba)\circ(-a). &\end{aligned}$$

Ceci montre que $\operatorname{Im}\left(a(ab-ba)\right)\subset \operatorname{Im}(ab-ba)$.

D'où $z\in \operatorname{Im}(ab-ba)$, *puis* $\boxed{\operatorname{Im}(a+b)\cap \operatorname{Im}(a-b)\subset \operatorname{Im}(ab-ba)}$.