Complément de cours

On pourra librement utiliser dans ce TD les résultats suivants (qui ont été énoncés en terminale et seront démontrés dans le chapitre Intégration de fin d'année).

Lemme 0.1 (*Admis pour l'instant*)

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $(a, b) \in I^2$.

1. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.
2. $\displaystyle(a \leq b \text{ et } \forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0$. **(positivité de l'intégrale)**
3. $\displaystyle\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$. **(linéarité de l'intégrale)**
4. $\displaystyle(a \leq b \text{ et } \forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x)) \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$. **(croissance de l'intégrale)**
5. $\displaystyle\forall c \in I,\ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. **(relation de Chasles)**

Gammes

Exercice 1. Primitives usuelles (1). *Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.*

1. $t \mapsto \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}$
2. $t \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{t + \sqrt{t}}$
4. $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)}$
5. $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin^3(t)}$
6. $t \mapsto \tan^2(t)$
7. $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2 - t^2}}$
8. $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1 + \cos^2 t}$
9. $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{1 + \cos^2 t}$
10. $t \mapsto \sin(t)\cos(2t)$
11. $t \mapsto \cos^2(t)\sin^2(t)$
12. $t \mapsto e^t \cos(3t)$

Indication :

1. $u' \cos(u) = u' \sin' \circ u = (\sin \circ u)'$
2. $2u'e^u = 2(e^u)'$
3. $2\dfrac{u'}{u} = 2(\ln|u|)'$
4. $\dfrac{u'}{u} = (\ln|u|)'$
5. $\dfrac{u'}{u^3} = u'u^{-3} = \left(\dfrac{u^{-2}}{-2}\right)'$.
6. $\tan^2 = (1 + \tan^2) - 1 = (\tan - \mathrm{Id})'$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{2 - t^2}} = \dfrac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}}$.
8. $-\dfrac{u'}{1 + u^2}$.
9. $-\dfrac{u'}{u}$
7. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$ *donc* $\sin t \cos(2t) = \frac{1}{2}(\sin(3t) - \sin(t))$.

8. *Utiliser les formules de trigonométrie (angle double pour* $\sin$*).*

9. $e^t\cos(3t)=\mathrm{Re}(e^{(1+3i)t})$. *Et* $t\mapsto e^{(1+3i)t}$ *a pour primitive* $t\mapsto \dfrac{e^{(1+3i)t}}{1+3i}=e^t\dfrac{(\cos(3t)+i\sin(3t))(1-3i)}{1^2+3^2}$, *qui a pour partie réelle* $t\mapsto \dfrac{e^t}{10}(\cos(3t)+3\sin(3t))$.

Correction.

1. $t\mapsto \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $]0,+\infty[$. $\boxed{t\mapsto \sin(\ln t) \text{ est l'une d'elles.}}$

2. $t\mapsto \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $]0,+\infty[$. $\boxed{t\mapsto 2e^{\sqrt{t}} \text{ est l'une d'elles.}}$

3. $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}=2\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+\sqrt{t}}$ *donc* $t\mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$ *admet des primitives sur tout intervalle inclus dans* $\mathbb{R}_+^*$. $\boxed{t\mapsto 2\ln(1+\sqrt{t}) \text{ est l'une d'elles}}$.

4. $t\mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $]0,1[\cup]1,+\infty[$. $\boxed{t\mapsto \ln|\ln t| \text{ est l'une d'elles.}}$

5. $t\mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin^3(t)}$ *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. $\boxed{t\mapsto -\dfrac{1}{2\sin^2(t)} \text{ est l'une d'elles.}}$

6. $t\mapsto \tan^2(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. $\boxed{t\mapsto \tan(t)-t \text{ est l'une d'elles.}}$

7. $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-t^2}}$ *est continue sur* $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *inclus dans* $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. $\boxed{t\mapsto \arcsin\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) \text{ est l'une d'elles.}}$

8. $t\mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$. $\boxed{t\mapsto -\arctan(\cos t) \text{ est l'une d'elles}}$.

9. $t\mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$. $\boxed{t\mapsto -\ln(1+\cos^2 t) \text{ est l'une d'elles}}$.

10. *D'après la formule de trigonométrie,* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$*, d'où :* $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin t \cos(2t) = \frac{1}{2}\left(\sin(3t)+\sin(-t)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(3t)-\sin(t)\right)$*. De plus,* $t \mapsto \sin(t)\cos(2t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur* $\mathbb{R}$*.* $\boxed{t \mapsto \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(3t)}{3}+\cos t\right) \text{ est l'une d'elles.}}$

11. $t \mapsto \cos^2(t)\sin^2(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*.*
$\cos^2(t)\sin^2(t) = (\cos(t)\sin(t))^2 = \left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{1-\cos(4t)}{8}$.
Donc $\boxed{\text{une primitive de } t \mapsto \cos^2(t)\sin^2(t) \text{ sur } I \text{ est } t \mapsto \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin(4t)}$.

12. $t \mapsto e^t\cos(3t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur tout intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*.*
$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t\cos(3t) = \mathrm{Re}(e^{(1+3i)t})$ *donc une primitive est* $t \mapsto \mathrm{Re}(\frac{e^{(1+3i)t}}{1+3i}) = \frac{e^t}{10}\mathrm{Re}(e^{3it}(1-3i))$*.*
Ainsi, $\boxed{t \mapsto \frac{e^t}{10}\left(\cos(3t)+3\sin(3t)\right) \text{ est l'une d'elles.}}$

Exercice 2. Primitives usuelles (2). *Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.*

1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$;
2. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$;
3. $x \mapsto \frac{\cos(\ln x)}{x}$;
4. $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$;
5. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$;
6. $x \mapsto \cos x \sin^5 x$;
7. $x \mapsto \sin^5 x$;
8. $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^4}$;
9. $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$;
10. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$;
11. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$;
12. $x \mapsto \frac{\ln(\ln x)}{x}$;
13. $x \mapsto e^{e^x+x}$;
14. $x \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2}$;
15. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$;
16. $x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$;
17. $x \mapsto \mathrm{sh}x \sin x$.

Indication :

5. $x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{-2}\times(-2x)\times(1-x^2)^{1/2}$ *de la forme* $\frac{1}{-2}\times u' \times u^{1/2}$ *dont une primitive est* $\frac{1}{-2}\times\frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

7. *On linéarise à l'aide des formules d'Euler, ce qui permet ensuite de trouver une primitive.*

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \frac{1}{2^5 i}\left(2i\sin(5x) - 5\times 2i\sin(3x) + 10\times 2i\sin(x)\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right)}\end{aligned}$$

12. $\frac{\ln(\ln x)}{x}$ *est de la forme* $u'\times\ln u = (F\circ u)'$ *où* F *est une primitive de* $\ln$ *i.e.* $F : x \mapsto x\ln x - x = x(\ln x - 1)$ *et* $u = \ln$.

13. $e^{e^x+x} = e^x e^{e^x}$ *de la forme* $u'\times e^u = (e^u)'$ *avec* $u : x \mapsto e^x$.

14. $\dfrac{1}{x+x(\ln x)^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$ *de la forme* $\dfrac{u'}{1+u^2} = (\arctan \circ u)'$.

15. $\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln x}}$ *de la forme* $2\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})'$.

16. $e^{-x}\,\sin(2x) = \operatorname{Im}(e^{-x}e^{2ix}) = \operatorname{Im}(e^{(-1+2i)x})$.
Une primitive de $x \mapsto e^{(-1+2i)x}$ *est* $x \mapsto \frac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i} = \frac{e^{-x}}{5}(-1-2i)e^{i2x} = \frac{-e^{-x}}{5}(1+2i)(\cos(2x) + i\sin(2x))$, *de partie imaginaire* $x \mapsto \frac{-e^{-x}}{5}(\sin(2x)+2\cos(2x))$.

17. $\operatorname{sh}x\,\sin x = \operatorname{Im}(\operatorname{sh}x\; e^{ix}) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}e^{(1+i)x} - \frac{1}{2}e^{(-1+i)x}\right)$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}e^{(1+i)x} - \frac{1}{2}e^{(-1+i)x}$ *est*

$$x \mapsto \frac{1}{2}\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{2}\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} = \frac{1}{4}\left[e^x(1-i)(\cos x + i\sin x) + e^{-x}(1+i)(\cos x + i\sin x)\right],$$

de partie imaginaire

$$\begin{aligned} x \mapsto & \frac{1}{4}\left(e^x\sin x - e^x\cos x + e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right) \\ x \mapsto & \frac{1}{2}\left[\sin x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \cos x\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right] \\ x \mapsto & \frac{1}{2}\left(\sin x\;\operatorname{ch}x - \cos x\;\operatorname{sh}x\right). \end{aligned}$$

Correction.

1. $x \mapsto -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + \kappa$;
2. $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2} + \kappa$;
3. $x \mapsto \sin(\ln x) + \kappa$;
4. $x \mapsto \frac{1}{2\cos^2 x} + \kappa$;
5. $x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \kappa$;
6. $x \mapsto \frac{\sin^6 x}{6} + \kappa$;
7. $x \mapsto -\frac{1}{80}\cos(5x) + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos x + \kappa$;
8. $x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{(\ln x)^3} + \kappa$;
9. $x \mapsto \ln|\sin x| + \kappa$;
10. $x \mapsto \frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right| + \kappa$;
11. $x \mapsto 2\sqrt{\tan x} + \kappa$;
12. $x \mapsto \ln x\,(\ln(\ln x) - 1) + \kappa$;
13. $x \mapsto \exp(e^x) + \kappa$;
14. $x \mapsto \arctan(\ln x) + \kappa$;
15. $x \mapsto 2\sqrt{1+\ln x} + \kappa$;
16. $x \mapsto -\frac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x) + \kappa$;
17. $x \mapsto \frac{1}{2}(\sin x\,\operatorname{ch}x - \cos x\,\operatorname{sh}x) + \kappa$.

Exercice 3. Primitives de fonctions rationnelles (1). *Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.*

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3}$
3. $t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+3t-2}$

Correction.

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2}$ *est une fonction rationnelle à pôles simples donc par théorème de décomposition en éléments simples, il existe* $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\},\ \frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}}.$$

Par exemple en écrivant

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(t+\sqrt{2})-(t-\sqrt{2})\right],$$

on trouve que $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ *et* $B = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. *Ainsi,*

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\},\ \frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right).$$

Soit I *un intervalle ne contenant pas* $\sqrt{2}$ *ni* $-\sqrt{2}$. *Alors* $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2}$ *est continue sur* I *et admet des primitives sur* I. *L'une d'elles est* $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\ln|t-\sqrt{2}| - \ln|t+\sqrt{2}|)$, *qui s'écrit aussi* $\boxed{t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|}$.

2. *Écrivons* $\forall t\in\mathbb{R},\ t^2+2t+3 = (t+1)^2+2 = 2\left(1+\left(\dfrac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ *et* $\dfrac{1}{t^2+2t+3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$.

Ainsi $\boxed{\text{une primitive de } t\mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{t+1}{\sqrt{2}}\right)}$.

3. $\forall t\in\mathbb{R},\ 2t^2+3t-2 = 2(t+2)(t-\frac{1}{2}) = (t+2)(2t-1)$.
Par théorème de DES des fonctions rationnelles à pôles simples, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},-2\right\},\ \frac{1}{2t^2+3t-2} = \frac{1}{(t+2)(2t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{2t-1}.$$

En écrivant $1 = \frac{1}{5}\left[2(t+2)-(2t-1)\right]$, *on trouve que* $A = -\dfrac{1}{5}$ *et* $B = \dfrac{2}{5}$ *conviennent. Ainsi,*

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2},-2\right\},\ \frac{1}{2t^2+3t-2} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{2t-1} - \frac{1}{t+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+2}\right)$$

donc $\boxed{\textit{une primitive de } t \mapsto \dfrac{1}{2t^2+3t-2} \textit{ sur } I \subset]-\infty,-2[\cup]-2,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[\textit{ est } t \mapsto \dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{t-\frac{1}{2}}{t+2}\right|}$.

Exercice 4. Primitives de fonctions rationnelles (2). *Déterminer les primitives des fonctions suivantes.*

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-7x+10}$;
2. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-7x+10}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x^2-7x+10}$;
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$;
5. $x \mapsto \dfrac{4+x}{x^2+1}$;
6. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+x+1}$;
7. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$;
8. $x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$;

Indication :

1. $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$ *et* $1=\dfrac{1}{3}\left[(x-2)-(x-5)\right]$ *donc* $\dfrac{1}{x^2-7x+10}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-2}\right]$.
2. $x+1=(x-2)+3=(x-2)+(x-2)-(x-5)=2(x-2)-(x-5)$ *donc* $\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}=\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{1}{x-2}$.
3. *On écrit*
$$x^2+x+1=(x^2-7x+10)+(8x-9).$$
Première méthode. *On écrit :*
$$x^2+x+1=(x^2-7x+10)+8(x+1)-17 \quad \text{où} \quad 17=\frac{17}{3}\left[(x-2)-(x-5)\right],$$
et on utilise la question 2.
Deuxième méthode. *On écrit :*
$$x^2+x+1=(x^2-7x+10)+8(x-2)+7 \quad \text{où} \quad 7=\frac{7}{3}\left[(x-2)-(x-5)\right].$$
Dans tous les cas, on trouve
$$\frac{x^2+x+1}{x^2-7x+10}=1+\frac{31}{3}\times\frac{1}{x-5}-\frac{7}{3}\times\frac{1}{x-2}.$$
4. $\Delta<0$ *donc* arctan.
5. *On ré-écrit* $\dfrac{4+x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^2+1}$.
6. $\Delta<0$ *donc* arctan.
7. $\dfrac{1}{x^2-6x+9}=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ *donc une primitive est* $x\mapsto -\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{3-x}$.
8. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=\left(\dfrac{(x+2)-1}{x+2}\right)^2=\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^2=1-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Correction.

1. $x \mapsto \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + \kappa$;
2. $x \mapsto 2\ln|x-5| - \ln|x-2|$;
3. $x \mapsto x + \frac{31}{3}\ln|x-5| - \frac{7}{3}\ln|x-2| + \kappa$;
4. $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \kappa$.
5. $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan x + \kappa$;
6. $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + \kappa$.
7. $x \mapsto \frac{1}{3-x} + \kappa$;
8. $x \mapsto x - \ln\left((x+2)^2\right) - \frac{1}{x+2} + \kappa$;

Exercice 5. Primitives avec IPP (1). *Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.*

1. $t \mapsto \dfrac{t}{\cos^2(t)}$
2. $t \mapsto \arctan(t)$
3. $t \mapsto t^2 e^t$

Correction.

1. $t \mapsto \dfrac{t}{\cos^2(t)}$ *est continue sur tout intervalle I inclus dans* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right[$, *donc admet des primitives sur I.*
Soit $(a,t) \in I^2$.
Alors deux IPP successives donnent
$$\int_a^t \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = [x\tan x]_a^t + [\ln|\cos x|]_a^t .$$
Ainsi, $\boxed{\text{une primitive de } t \mapsto \dfrac{t}{\cos^2(t)} \text{ sur } I \text{ est } t \mapsto t\tan t + \ln|\cos t|}$.
2. *Une IPP avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \arctan(t)$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:*
$$\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t = [t\arctan(t)]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|.$$
Ainsi, $\boxed{\text{la primitive de } \arctan \text{ qui s'annule en 0 est } x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$.
3. *(Presque fait en cours) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u : t \mapsto t^2$ et $v : t \mapsto e^t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne alors*
$$\int_0^x t^2 e^t \mathrm{d}t = \left[t^2 e^t\right]_0^x - \int_0^x 2te^t \mathrm{d}t = x^2 e^x - 2\int_0^x te^t \mathrm{d}t.$$
Faisons une deuxième IPP avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto e^t$. u et v sont encore $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ donc
$$\int_0^x t^2 e^t \mathrm{d}t = x^2 e^x - 2\left[te^t\right]_0^x + 2\int_0^x e^t \mathrm{d}t = x^2e^x - 2xe^x + 2\left[e^t\right]_0^x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2.$$

$\boxed{\textit{Ainsi, } x \longmapsto (x^2-2x+2)e^x \textit{ est une primitive sur } \mathbb{R} \textit{ de la fonction } x \mapsto x^2e^x}$. *(Vérification OK)*

Exercice 6. Primitives avec IPP (2). *Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.*

1. $x \mapsto (x\ln x)^2$.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$.
3. $x \mapsto \ln(1+x^2)$.
4. $x \mapsto x\mathrm{ch}x$.
5. $x \mapsto x\sin^2(x)$.
6. $x \mapsto x\arctan x$.

Correction.

1. $x \mapsto \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3$ *(on fait deux IPP, d'abord en dérivant* $t \mapsto (\ln t)^2$ *et en intégrant* $t \mapsto t^2$*, puis en dérivant* $\ln$ *et en intégrant* $t \mapsto t^2$*) ;*
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$ *est définie sur* $D := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$*. Une primitive de* f *sur tout intervalle inclus dans* D *est* $x \mapsto x\tan x + \ln|\cos x|$ *(on dérive* $t \mapsto t$ *et on intègre* $t \mapsto \frac{1}{\cos^2 t}$*, qui est la dérivée de* $\tan$*) ;*
3. $x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ *(on dérive* $t \mapsto \ln(1+x^2)$ *et on intègre* 1*) ;*
4. $x \mapsto x\,\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$ *(on dérive* $t \mapsto t$ *et on intègre* ch*) ;*
5. $x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}$ *(on dérive* t *et on intègre* $\sin^2$*, après en avoir trouvé une primitive par linéarisation).*
6. $x \mapsto \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right]$ *(on dérive* $\arctan$ *et on intègre* $t \mapsto t$*).*

Exercice 7. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 t^3e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^3e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(-\frac{t^2}{2}\right)\left(-2te^{-t^2}\right)\mathrm{d}t && \textit{ré-écriture}\\
&= \left[-\frac{t^2}{2}e^{-t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 te^{-t^2}\mathrm{d}t && \textit{IPP avec } \begin{cases} u : t \mapsto -t^2/2 \\ v : t \mapsto e^{-t^2} \end{cases} \textit{de classe } \mathscr{C}^1 \textit{ sur } [0,1]\\
&= -\frac{1}{2}e^{-1} + \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^1 && \textit{primitive}\\
&= -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}\\
&= \boxed{\frac{1}{2} - e^{-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. Changement de variables. *À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$;
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$;
9. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$;
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$;
11. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$;
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$;
14. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$;
15. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ *($u=t+1$ donc $t=\varphi(u)$ avec $\varphi : u \mapsto u-1 \in \mathscr{C}^1$) ;*
2. $12-4e$ *($x=u^2$, avec $u\mapsto u^2 \in \mathscr{C}^1$) ;*
3. $\frac{5}{48}$ *($u=t^2$, donc $t=\varphi(u)$ avec $\varphi : u\mapsto \sqrt{u}\in\mathscr{C}^1$) ;*
4. $\frac{\pi}{2}$ *($x=\cos\theta$) ;*
5. $2-\frac{\pi}{2}$ *($t=e^x$ puis $t=u^2+1$) ;*
6. $4-3\times 2^{2/3}-2\times 2^{1/2}+9\times 2^{1/3}-6\times 2^{1/6}+6\ln\left(\frac{2^{1/6}+1}{2^{1/3}+1}\right)$ *($u=(2+x)^{1/6}$, puis on utilise la relation $u^3=(u^2-u+1)(u+1)-1$) ;*
7. $\frac{\pi}{6}$ *($x=u^2$ puis primitive de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$) ;*
8. $2\ln 2$ *($u=\sqrt{x}$) ;*
9. $2(\ln 2)^2-4\ln 2+2$ *($u=\ln x$ puis 2 IPP) ;*
10. $\frac{\pi}{12}$ *(transformation $u=x^3$ mais faux chgt de var) ;* $\displaystyle I=\int_{0^3}^{1^3}\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\left[\frac{\arctan(x)}{3}\right]_0^1=\frac{\arctan 1}{3}=\frac{\pi}{12}$.
11. $\frac{\pi}{8}$ *($x=\sin\theta$) ;*
12. $x=\ln u$ *puis astuce* $+1-1$ *d'où* $\boxed{I=1+\ln 2-\ln(e+1)}$
13. $\frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 1\right)$ *(on réécrit l'intégrale comme* $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1-\sin^2(\theta)}$ *et on pose $x=\sin\theta$ puis DES) ;*
14. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ *($u=\cos t$) ;*

15. *Faux chgt de var. On ré-écrit l'intégrale* $I = \int_1^2 \ln\left(\frac{1}{t}+1\right)\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. *On reconnaît la dérivée d'une composée donc* $I = \left[-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^2 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$. *On peut aussi faire une IPP.*

Exercice 9. *A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

Correction.

1. *Posons* $x = \ln(t) =: \varphi(t)$, *et*

$$I = \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\varphi\in\mathscr{C}^1([1,e])} = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = \boxed{2\left[\sqrt{1+t}\right]_1^e = 2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)}.$$

Remarque : *Ici, ça pourrait être un faux-CV car on reconnait la dérivée d'une composée* $x \mapsto \sqrt{1+e^x}$, *d'où*

$$I = 2\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}e^x\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{1+e^x}\right]_0^1 = \boxed{2\left(\sqrt{1+e}-\sqrt{2}\right)}.$$

2. *Posons* $x = \tan(t) =: \varphi(t)$ *(où* $\tan \in \mathscr{C}^1([0,\frac{\pi}{4}])$ *et* $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1+\tan^2 t$*). De plus,* $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ *et* $x = 1 \Leftrightarrow t = \pi/4$. *Ainsi,*

$$I = \int_{0=\tan(0)}^{1=\tan(\pi/4)} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4}\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}+\left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}.$$

Exercice 10. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En effectuant un changement de variable, montrer que*

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

Au brouillon : On est tenté de poser $\cos(x) = \sin(u)$. *Ainsi,* $u = \arcsin(\cos(x)) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(x)) = \frac{\pi}{2} - x$.
Autre façon de voir : comment « passe-t-on » de $\cos(x)$ *à* $\sin(x)$ *? En retranchant* x *à* $\pi/2$ *car* $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$.
On fait donc le changement de variable $\boxed{u = \frac{\pi}{2} - x}$, *alors* $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ *et* $x = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 0$.
De plus,

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}-u) = \sin(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n(u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \sin^n(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 11. Avec du cosinus et du sinus. *On pose* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

1. *Calculer* $I + J$.
2. *À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que* $I = J$ *et en déduire leur valeur commune.*
3. *Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de* $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Correction.

1. *Par linéarité,*

$$\boxed{I + J = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}.$$

2. *En posant le changement de variable affine* $x = \frac{\pi}{2} - t$ *qui fait intervenir la fonction* $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ *qui est de classe* $\mathscr{C}^1$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= J. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$.

3. *On a* $K = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\mathrm{d}x$.

Le changement de variable $x = \frac{t}{2}$*, codé par la fonction* $t \mapsto \frac{t}{2}$ *qui est de classe* $\mathscr{C}^1$*, donne*

$$K = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t.$$

Puis

$$K \;=\; \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\right) \;=\; \frac{1}{8}(I+J).$$

En effet, l'intégrale de droite vaut après changement de variable :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(s+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\ \mathrm{d}s \;=\; J.$$

Ainsi,

$$\boxed{K \;=\; \frac{1}{8}(I+J) \;=\; \frac{\pi}{16}}.$$

Exercice 12. *Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.*

1ère méthode, chgt de variables et Chasles. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à la relation de Chasles, on écrit :*

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f.$$

Transformons la troisième intégrale à l'aide d'un changement de variable (on pose $x = u+T$, où $u \mapsto u+T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Ainsi,

$$I := \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u,$$

car f est T-périodique.
Ainsi, la troisième intégrale est l'opposé de la première donc

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$$

(l'intégrale sur une période est invariante).

2ème méthode, étude de fonction. *Soit $g : a \mapsto \int_a^{a+T} f$, définie sur $\mathbb{R}$.*
f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F l'une d'elles. Alors $g : a \mapsto F(a+T)-F(a)$. En tant que différence et composée de fonction dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : a \mapsto f(a+T)-f(a)$. Puisque f est T-périodique, on a $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
En particulier, $\forall a \in \mathbb{R},\ g(a) = g(0)$, ce qui est l'égalité souhaitée.

Exercice 13. Astucieux ! *Calculer* $I = \displaystyle\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \arctan\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) \sqrt[3]{\sin x^3}\,\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.

Correction. *Soit* $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) \sqrt[3]{\sin x^3}\,\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.
Cette fonction est correctement définie et continue sur $[-1,1]$ *et donc sur* $[-\pi/8, \pi/8]$.
Elle est de plus $\boxed{\textit{impaire}}$.
Le changement de variable $x = -t$ *fournit :*

$$I = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(-t)(-1)\mathrm{d}t \underset{\textit{imparité}}{=} \int_{\pi/8}^{-\pi/8} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\pi/8}^{\pi/8} f(t)\mathrm{d}t = -I.$$

Ainsi, $\boxed{I = 0}$.

Exercice 14. *Déterminer une primitive de* $x \mapsto \cos(2\ln x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ *donc admet des primitives sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Une primitive de* $x \mapsto \cos(2\ln x)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int^x \cos(2\ln t)\mathrm{d}t$. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1ère méthode, chgt de variables. *On pose* $t = e^u =: \varphi(u)$ *avec* φ *de classe* $\mathscr{C}^1$.

$$F(x) = \int^x \cos(2\ln t)\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \cos(2u)\, e^u \mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \mathrm{Re}(e^{(1+2i)u})\mathrm{d}u.$$

Une primitive de $u \mapsto e^{(1+2i)u}$ *sur* $\mathbb{R}$ *est* $u \mapsto \frac{e^{(1+2i)u}}{1+2i}$, *donc une primitive de* $u \mapsto \cos(2u)\, e^u$ *sur* $\mathbb{R}$ *est* $u \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+2i)u}}{1+2i}\right)$.
Or,

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \frac{e^{(1+2i)u}}{1+2i} = \frac{(1-2i)e^{(1+2i)u}}{5} = \frac{e^u}{5}(1-2i)e^{i2u}$$

Donc

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+2i)u}}{1+2i}\right) = \frac{e^u}{5}(\cos(2u) + 2\sin(2u)).$$

Ainsi, une primitive de $u \mapsto \cos(2u)e^u$ *sur* $\mathbb{R}$ *est* $u \mapsto \frac{e^u}{5}(\cos(2u) + 2\sin(2u))$. *D'où*

$$F(x) = \left[\frac{e^u}{5}(\cos(2u) + 2\sin(2u))\right]^{\ln(x)} = \frac{x}{5}\left(\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)\right).$$

$\boxed{\text{Ainsi, une primitive de } x \mapsto \cos(2\ln x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } x \mapsto \frac{x}{5}\left(\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)\right)}$ *(Vérif OK).*

2ème méthode, deux IPP successives.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int^x \cos(2\ln t) \times 1 \ \mathrm{d}t \\ &= [t\cos(2\ln t)]^x + \int^x 2\sin(2\ln t)\mathrm{d}t \\ &= x\cos(2\ln x) + 2\,[t\sin(2\ln t)]^x - 4\int^x \cos(2\ln t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'où $5F(x) = x\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)$ *puis* $\boxed{F(x) = \frac{x}{5}\left[\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)\right]}$.

Fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Exercice 15. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. *Justifier que* f *est dérivable sur* $[1,+\infty[$ *et déterminer* f'.
2. *Pour tout* $x \in [1,+\infty[$, *calculer* $\displaystyle\int_1^x \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ *et déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. *Conclure que* f *réalise une bijection de* $[1,+\infty[$ *sur un intervalle* J *à préciser.*

Correction.

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{t^3}{1+t}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$, *et la fonction* f *est sa primitive qui s'annule en 1. Par conséquent,* f *est dérivable sur* $[1,+\infty[$ *et pour tout* $x \in [1,+\infty[$,
$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3}{1+x}}.$$

2. • **Méthode 1.** $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\frac{t^3}{1+t} = \frac{t^3+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}$ *et* $t^3+1 = t^3+1^3 = (t+1)(t^2-t+1)$, *donc*
$$\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}, \quad (D.E.S.)$$
puis
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|\right]_1^x \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) + \ln 2 - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) + \ln 2 - \frac{5}{6}}.$$

   • **Méthode 2.** *Avec le changement de variable* $t = 1-u$, *avec* $u \mapsto 1-u \in \mathscr{C}^1([2,1+x],\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}
f(x) = \int_1^x \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_2^{1+x} \frac{(u-1)^3}{u}\mathrm{d}u \\
&= \int_2^{1+x} \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\mathrm{d}u \\
&= \int_2^{1+x} \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^3}{3}-\frac{3}{2}u^2+3u-\ln|u|\right]_2^{1+x} \\
f(x) &= \boxed{\frac{(1+x)^3}{3}-\frac{3}{2}(1+x)^2+3(1+x)-\ln|1+x|-\left(\frac{8}{3}-\ln(2)\right)}.
\end{aligned}$$

- *Notons* $\alpha = \ln 2 - \frac{5}{6}$, *alors pour tout* $x \geq 1$,

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(1+x)}{x^3}+\frac{\alpha}{x^3}\right).$$

De plus, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^3}=0$, *d'où*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(1+x)}{x^3}+\frac{\alpha}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3} = +\infty}.$$

3. *D'après la question 1.,* f *est dérivable sur* $[1,+\infty[$ *et pour tout* $x\in[1,+\infty[$, $f'(x)>0$, *et donc* f *est strictement croissante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$. *Elle réalise donc une bijection de* $[1,+\infty[$ *sur* $J=f([1,+\infty[)$. *De plus, comme* f *est continue,* J *est un intervalle et on a d'après le théorème de la bijection monotone*

$$\boxed{J = f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[}.$$

Exercice 16. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer f'. En déduire les variations de f.*
2. *On définit $g = f - \ln$.*
   (a) *Écrire g sous forme intégrale.*
   (b) *En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   (c) *Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.*
3. *Conclure que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle à préciser.*

Correction.

1. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est la primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. A ce titre,* $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{e^x}{x}}$.
   $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{e^x}{x} > 0$ *donc* $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}$.
2. (a) *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :* $g(x) = f(x) - \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\geq 0}\mathrm{d}t$.
   (b)
   - *Si $x \geq 1$, alors par positivité de l'intégrale* $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t \geq 0$;
   - *si $x < 1$, alors par positivité de l'intégrale* $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t \geq 0$ *donc* $g(x) = -\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t \leq 0$.

   Alternative : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = f'(x) - \ln'(x) = \dfrac{e^x-1}{x} > 0$ *donc g est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $g(1) = 0$ donc* $\boxed{g < 0 \text{ sur }]0,1[\text{ et } g > 0 \text{ sur }]1,+\infty[}$.

   (c)
   - $\forall x \geq 1,\ g(x) \geq 0$ *donc* $f(x) \geq \ln x$. *Puisque* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, *on a par théorème de domination,* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
   - $\forall x < 1,\ g(x) \leq 0$ *donc* $f(x) \leq \ln x$. *Puisque* $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, *on a par théorème de domination,* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.
3. *f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur* $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \left]\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}}$.

Exercice 17. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$*. Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et déterminer* f'*.*

1ère méthode. *La fonction* $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc admet des primitives. Notons* F *la primitive qui s'annule en 1 de* $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$*. Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$*,* $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = F(x^2) = (F \circ g)(x)$ *où* $g : x \mapsto x^2$*.*
g *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc, par composition,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$*,* $f'(x) = (F' \circ g)(x) \times g'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2} \times 2x$ *i.e.* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2e^{x^2}}{x}}$.

2ème méthode. *On pose le changement de variables* $t = u^2$ *(licite car* $u \mapsto u^2 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$*). Ainsi,*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \int_1^x \frac{e^{u^2}}{u^2}2u\mathrm{d}u = \int_1^x 2\frac{e^{u^2}}{u}\mathrm{d}u.$$

Ainsi, f *est aussi la primitive de* $u \mapsto 2\dfrac{e^{u^2}}{u}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *qui s'annule en 1.*

A ce titre, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2e^{x^2}}{x}}$.

Exercice 18. *Étudier l'application* $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ *et* $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ *donc* t *varie entre 0 et 1. Les fonctions* arccos *et* arcsin *étant définies et continues sur* $[-1, 1]$*, on en déduit que* $\underline{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$*.*

- *Comme* f *est* π*-périodique, on réduit l'ensemble d'étude à* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$*. De plus, comme* f *est paire, on réduit finalement l'ensemble d'étude à* $\underline{\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]}$*. Soit* $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$*.*

- **1ère méthode.** *Les fonctions* $t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ *et* $t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ *sont continues sur* $[0, 1]$ *donc admettent des primitives. Soient respectivement* F_s *et* F_c *celles qui s'annulent en 0. En particulier,* $\forall t \in [0, 1],\ F_s'(t) = \arcsin(\sqrt{t})$ *et* $F_c'(t) = \arccos(\sqrt{t})$*.*
Alors $f(x) = F_s(\sin^2 x) + F_c(\cos^2 x)$*.*
En tant que composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$*,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(à détailler) et :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= F_s'(\sin^2 x) \times 2\sin x\cos x - F_c'(\cos^2 x) \times 2\cos x \sin x \\ &= [\arcsin(\sqrt{\sin^2 x}) - \arccos(\sqrt{\cos^2 x})] \times 2\cos x\sin x \\ f'(x) &= (\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|) \times 2\cos x\sin x. \end{aligned}$$

Or, comme $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$*,* $|\sin x| = \sin x$ *et* $|\cos x| = \cos x$*. De plus,* $\arcsin(\sin x) = x$ *car* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

et $\arccos(\cos x) = x$ *car* $x \in [0, \pi]$. *Finalement :* $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 0$ *donc* f *est constante sur l'intervalle* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *puis sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *(par parité) puis* $\boxed{f \text{ est constante sur l'intervalle } \mathbb{R}}$ *par périodicité.*

Or, $f(\pi/4) = \displaystyle\int_0^{1/2} \underbrace{\left(\arcsin(\sqrt{t}) + \arccos(\sqrt{t})\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$ *donc :* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{4}}$.

- **2ème méthode.** *En posant les changements de variables* $t = \sin^2 y$ *dans la première intégrale et* $t = \cos^2 y$ *dans la seconde intégrale (avec* $y \mapsto \sin^2 y$ *et* $y \mapsto \cos^2 y$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*), on obtient :*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\sin^2 0}^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_{\cos^2 \frac{\pi}{2}}^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \arcsin(|\sin y|)2\sin y \cos y \mathrm{d}y + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \arccos(|\cos y|)2\cos y(-\sin y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \arcsin(\sin y)\sin(2y)\mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \arccos(\cos y)\sin(2y)\mathrm{d}y \qquad \textit{car } 0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{2} \textit{ et } 0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^x y\sin(2y)\mathrm{d}y + \int_x^{\frac{\pi}{2}} y\sin(2y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin(2y)\mathrm{d}y \qquad \textit{Chasles} \\
&= \left[-y\frac{\cos(2y)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2y)}{2}\mathrm{d}y \qquad \textit{IPP avec} \left\{\begin{array}{l} u : y \mapsto y \\ v : y \mapsto -\cos(2y)/2 \end{array}\right. \textit{de classe } \mathscr{C}^1 \textit{ sur } [0, \pi/2] \\
&= -\frac{\pi}{2} \times \frac{(-1)}{2} + \left[\frac{\sin(2y)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} + 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ f(x) = \frac{\pi}{4}}$.

Exercice 19. *Déterminer toutes les applications* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t.$$

Correction. *A l'aide d'un dessin, on peut conjecturer que les fonctions affines sont solutions. Procédons par analyse-synthèse/double inclusion.*

- *Soit* f *solution du problème. Par hypothèse,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc admet des primitives sur* $\mathbb{R}$. *Soit* F *celle qui s'annule en 0. Alors*
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2yf(x) = F(x+y) - F(x-y)$. *(**)*
  Cette égalité est clairement dérivable par rapport à y.
  Justifions que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
  On a (pour $y = 1/2$*) :* $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = F(x+1/2) - F(x-1/2)$, *donc* f *est bien dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(en tant que différence et composée de fonctions dérivables).*

1ère méthode. *Dérivons (**) par rapport à x et à y (respectivement). Alors :*

- $\star$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2yf'(x) = f(x+y) - f(x-y)$,
- $\star$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2f(x) = f(x+y) + f(x-y)$.

En sommant, il vient : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = yf'(x) + f(x)$.
Pour $x = 0$, *il vient :* $\forall y \in \mathbb{R},\quad f(y) = f'(0)y + f(0)$.
Ainsi, f *est une fonction affine.*

2ème méthode. *Dérivons (**) deux fois par rapport à y. Alors :*
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2f(x) = f(x+y) + f(x-y)$ *puis* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 = f'(x+y) - f'(x-y)$.
Ainsi, $\forall (s,d) \in \mathbb{R}^2, f'(s) = f'(d)$ *(car on a déjà montré que* $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ *est bijective).*
Alternative. *Fixons* $t \in \mathbb{R}$. *Pour* $(x,y) = (t/2, t/2)$, *il vient* $f'(t) = f'(0)$, *cela pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
Cela prouve que f' *est constante sur l'intervalle* $\mathbb{R}$, *donc* f *est affine.*

- *Réciproquement, soit* f *une fonction affine. Alors il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f : t \mapsto at + b$. *Ainsi,* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x-y}^{x+y} (at+b)\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^2}{2} + bt\right]_{x-y}^{x+y} = \frac{a}{2}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] + b[(x+y)-(x-y)] = \frac{a}{2} \times 4xy + 2by = 2yf(x).$$

Donc f *est solution du problème.*

- **Conclusion.** $\boxed{\textit{Les applications continues sur } \mathbb{R} \textit{ qui vérifient l'équation fonctionnelle sont les fonctions affines.}}$

Suite d'intégrales

Exercice 20. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x \mathrm{d}x$.

1. *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n!}$. *En déduire que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et déterminer sa limite.*
2. *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
3. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N},\ I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. *Conclure que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Correction.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
   - *La fonction* $x \mapsto (1-x)^n e^x$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc* I_n *est bien définie.*
   - *Pour tout* $x \in [0,1]$, $0 \leq (1-x) \leq 1$ *donc* $0 \leq (1-x)^n \leq 1$. *De plus, la fonction exponentielle étant croissante sur* $[0,1]$, *on a* $0 \leq e^x \leq e$. *Ainsi, on en déduit que pour tout* $x \in [0,1]$,

$$\underline{0 \leq (1-x)^n e^x \leq e.}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$ avec $0 \leq 1$, on a :

$$0 \leq I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x \mathrm{d}x \leq \frac{e}{n!}.$$

- *Puisque $\frac{e}{n!} \to 0$, on déduit par théorème d'encadrement que $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0}$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u : x \mapsto (1-x)^{n+1}$ et $v = \exp$. Alors $u, v \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Une IPP donne*

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^x \mathrm{d}x\right) \\ I_{n+1} &= \boxed{-\frac{1}{(n+1)!} + I_n}. \end{aligned}$$

Rq : (I_n) est décroissante.

3. *On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1}(I_{k+1} - I_k) = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}, \quad i.e. \quad I_n - I_0 = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Or, $\boxed{I_0 = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - 1}$ donc $\boxed{I_n = I_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$.

On sait que $I_n \to 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$, ce que l'on écrira plus tard : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e.}$

Exercice 21. *Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n e^{-x}\mathrm{d}x$.*

1. *Déterminer $I_0(a)$.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1}(a) = -a^{n+1}e^{-a} + (n+1)I_n(a)$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(a) = -e^{-a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}a^k + n!I_0(a)$.*
4. *En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I_n(a)$.*

Correction.

1. *$I_0(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}$. Donc $\boxed{I_0(a) = 1 - e^{-a}}$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1}(a) = \displaystyle\int_0^a x^{n+1}e^{-x}\mathrm{d}x$. On effectue une intégration par parties en considérant les*

fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, a]$

$$u : x \mapsto x^{n+1} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto -e^{-x}.$$

Alors $u' : x \mapsto (n+1)x^n$ et $v' : x \mapsto e^{-x}$, et on obtient

$$I_{n+1}(a) = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^a + \int_0^a (n+1)x^n e^{-x}\mathrm{d}x = -a^{n+1}e^{-a} + (n+1)I_n(a).$$

Donc : $\boxed{I_{n+1}(a) = -a^{n+1}e^{-a} + (n+1)I_n(a)}$.

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$: « $I_n(a) = -e^{-a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}a^k + n!I_0(a)$ ».*
En utilisant la question précédente, nous avons $I_1(a) = -ae^{-a} + I_0(a)$ ce qui montre $P(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Montrons que $P(n+1)$.
On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) &= -a^{n+1}e^{-a} + (n+1)I_n(a) && \textit{(question précédente)} \\ &= -a^{n+1}e^{-a} + (n+1)\left(-e^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}a^k + n!I_0(a)\right) && \textit{(d'après } P(n)\textit{)} \\ &= -a^{n+1}e^{-a} - e^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!}a^k + (n+1)!I_0(a). \end{aligned}$$

En écrivant $-a^{n+1}e^{-a} = -e^{-a}\frac{(n+1)!}{(n+1)!}a^{n+1}$, on obtient

$$I_{n+1}(a) = -e^{-a}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}a^k + (n+1)!I_0(a),$$

d'où $P(n+1)$.
Par théorème de récurrence simple, on en déduit que $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

4. *D'après les questions 1. et 3., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$I_n(a) = -e^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}a^k + n!I_0(a) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}a^k e^{-a} + n!(1 - e^{-a}).$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{a\to+\infty} e^{-a}a^k = 0$ (croissances comparées des fonctions $a \mapsto e^{-a}$ et $a \mapsto a^k$) et $\lim_{a\to+\infty} e^{-a} = 0$. Donc, par opérations sur les limites de fonctions, on obtient

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} I_n(a) = n!}$$

Exercice 22. *On considère la suite (I_n) définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \mathrm{d}x.$$

1. *Établir la formule de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+2)(n+1)I_n.$$

Double intégration par parties.

2. *En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.*

Correction. *Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 1., on a :*

$$\begin{aligned} I_{2p} &= 2p\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - 2p(2p-1)I_{2p-2} \\ &= 2p\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - 2p(2p-1)\left[(2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} - (2p-2)(2p-3)I_{2p-4}\right] \\ &= \frac{(2p)!}{(2p-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - \frac{(2p)!}{(2p-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + \frac{(2p)!}{(2p-4)!}I_{2p-4}. \end{aligned}$$

En itérant, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= (-1)^0\frac{(2p)!}{(2p-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} + (-1)^1\frac{(2p)!}{(2p-3)!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{(2p)!}{1!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{(2p)!}{0!}I_0 \\ I_{2p} &= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\frac{(2p)!}{(2p-(2i+1))!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-(2i+1)} + (2p)! \times 1. \end{aligned}$$

Exercice 23. Wallis, première version. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \int_0^{\pi/2} \cos^n t \;\mathrm{d}t$$

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.*
2. *Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{2n}, puis u_{2n+1} en fonction de n.*

Correction.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties avec* $\left\{\begin{array}{l} u : t \mapsto \sin t \\ v : t \mapsto (\cos t)^{n+1} \end{array}\right.$ *qui sont $\mathscr{C}^1$*

On obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \times \cos t \ \mathrm{d}t \\
&= \Big[\sin t(\cos t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} \ - \ \int_0^{\pi/2} \sin t \times (n+1)(-1)(\sin t)(\cos t)^n \ \mathrm{d}t \\
&= 0 \ + \ (n+1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin t)^2}_{1-\cos^2 t}(\cos t)^n \ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\Big(\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{d}t \ - \ \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \ \mathrm{d}t\Big) \\
&= (n+1)(u_n - u_{n+2})
\end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)u_n = (n+1)u_n$*, d'où*

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}u_n}.$$

Autre solution.

On peut aussi écrire

$$u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} \ \mathrm{d}t$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$u_{n+2} \ = \ u_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n t \times \sin^2 t \ \mathrm{d}t$$

Dans l'intégrale de droite, la fonction intégrée est encore égale à $\sin t \cos^n t \times \sin t$*.*

$$u_{n+2} \ = \ u_n - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^n t \times \sin t \ \mathrm{d}t$$

Effectuons une intégration par parties pour calculer l'intégrale de droite en posant $\begin{cases} u : t \mapsto \dfrac{-1}{n+1}\cos^{n+1} t \\ v : t \mapsto \sin t \end{cases}$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin t \cos^n t}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin t}_{v(t)} \ \mathrm{d}t \ &= \ \left[\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1} t \times \sin t\right]_0^{\pi/2} \ - \ \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{n+1}\cos^{n+1} t \times \cos t \ \mathrm{d}t \\
&= \ \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t \ \mathrm{d}t \\
&= \ \frac{1}{n+1}u_{n+2}
\end{aligned}$$

Résumons. On a l'égalité

$$u_{n+2} \ = \ u_n - \frac{1}{n+1}u_{n+2}$$

D'où

$$\boxed{\frac{n+2}{n+1}u_{n+2} \;=\; u_n}.$$

2. *D'après la question précédente, on a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$$

D'où, en multipliant par u_{n+1}, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1},$$

ce qui montre que la suite $\Big((n+1)u_n u_{n+1}\Big)$ est constante. Son premier terme vaut $(0+1)u_0u_1 = \frac{\pi}{2}$ (car $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$).

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}}.$$

3. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

- *D'après la question 1., on a*

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad u_{2k} \;=\; \frac{2k-1}{2k}u_{2k-2}.$$

Or $\forall\, i,\ u_i \neq 0$ (raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente). D'où

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{u_{2k}}{u_{2k-2}} \;=\; \frac{2k-1}{2k}.$$

Par produit pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a par télescopie :

$$\frac{u_{2n}}{u_0} \;=\; \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Le membre gauche vaut $\dfrac{u_{2n}}{\frac{\pi}{2}}$. Le membre droit vaut $\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

Ainsi,

$$\boxed{u_{2n} \;=\; \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2}} \qquad \textit{ou encore} \qquad \boxed{u_{2n} \;=\; \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\,\frac{\pi}{2}}.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
D'après la question précédente, on a $(2n+1)u_{2n}u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
En remplaçant u_{2n} par l'expression précédente, on trouve

$$\boxed{u_{2n+1} \;=\; \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

Exercice 24. Wallis, deuxième version. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.*

1. *Calculer I_0 et I_1.*
2. *Lorsque $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}.*
   En déduire la valeur de $I_n I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. *Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire I_{2p+1}.*

Correction.

1. *On a :*

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x \;=\; [-\cos x]_0^{\pi/2} \;=\; 1}.$$

2. *Soit $n \geq 2$.*
   Les fonctions $u : x \mapsto -\cos x$ et $v : x \mapsto \sin^{n-1} x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$u' : x \mapsto \sin(x) \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto (n-1)\cos(x)\, \sin^{n-2}(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_{v(x)} \mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \Big]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 2$, on a $-\cos(0)\sin^{n-1}(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2})\sin^{n-1}(\frac{\pi}{2}) = 0$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) \mathrm{d}x \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) \mathrm{d}x \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
En multipliant par I_{n-1}, on a :

$$nI_n\, I_{n-1} = (n-1)\, I_{n-1}\, I_{n-2}.$$

On en déduit que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
Or $1 \times I_1 \times I_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0.$$

Par ailleurs,

$$(2p)(2p-2)\cdots 2 = 2^p\, p(p-1)\cdots 1 = 2^p\, p!$$

Pour le produit des impairs, il est classique de multiplier et diviser par le produit des pairs, pour obtenir :

$$(2p-1)(2p-3)\cdots 1 = \frac{\mathbf{(2p)} \times (2p-1) \times \mathbf{(2p-2)} \times (2p-3) \times \cdots \times \mathbf{2} \times 1}{\mathbf{(2p)} \times \mathbf{(2p-2)} \times \cdots \times \mathbf{2}} = \frac{(2p)!}{2^p\, p!}.$$

Ainsi $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Avec la relation $(2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = \frac{\pi}{2}$, *on obtient :*

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\,I_{2p}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 25. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.*

1. *Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.*
2. *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.*

Correction.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_n - 1 = -\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$ donc $|I_n - 1| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.*
   Puisque $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, on obtient $\boxed{I_n \to 1}$.
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
   - *On écrit : $I_n - 1 = -\displaystyle\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times \frac{x}{n}\mathrm{d}x$. Une IPP donne :*

   $$\begin{aligned} I_n - 1 &= -\left[\frac{x}{n}\ln|1+x^n|\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n}\ln|1+x^n|\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

   - *Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = 0$.*
   Par inégalité de convexité, on a : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient :

   $$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient $\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \to 0$*, d'où* $\underline{\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{n}\right)}$.
Ainsi, on a bien :

$$\boxed{I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$