Limites

Exercice 1. *Étudier l'existence des limites suivantes. En cas d'existence, les déterminer.*

1. $\dfrac{2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ *en* 3.
2. $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos(x)}$ *en* $+\infty$.
3. $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$ *en* 1.
4. $\dfrac{1+x^2}{\sin(x)}$ *en* 0.
5. $\dfrac{\sin(1/x)}{e^{1/x}+1}$ *en* 0.
6. $\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)$ *en* $+\infty$.

Correction.

1. *FI. Soit* $x \in [2,3[\cup]3,4]$. *Par quantité conjuguée,* $\dfrac{2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{x-3}$.
Donc $\dfrac{2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} \xrightarrow[x\to 3^+]{} +\infty$ *et* $\dfrac{2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} \xrightarrow[x\to 3^-]{} -\infty$. *Puisque* $-\infty \neq +\infty$, *on en déduit que* $\boxed{f \text{ n'a pas de limite en 3}}$.

2. *Par composition,* $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ *et que la fonction* exp *est croissante sur* $\mathbb{R}$, $e^{-1} \leq e^{\cos(x)} \leq e^1$ *donc* $x \mapsto e^{\cos(x)}$ *est bornée.*
Ainsi, le produit a pour limite 0 : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos(x)} = 0}$.

3. *FI. Soit* $x \in]0,1[\cup]1,\sqrt{2}[$. *En utilisant la quantité conjuguée,*
$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)} = \frac{1-x^2}{\ln(x)(\sqrt{2-x^2}+1)} = \frac{(1-x)(1+x)}{\ln(x)(\sqrt{2-x^2}+1)} = \frac{-(1+x)}{\frac{\ln(x)}{x-1}(\sqrt{2-x^2}+1)}.$$
Or, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ *(T.A.) donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)} = -1}$. *Vérif OK avec équivalents.*

4. $(1+x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ *et* $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^-$. *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+x^2}{\sin(x)} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+x^2}{\sin(x)} = -\infty$. *Les deux limites étant différentes,* $\boxed{x \mapsto \dfrac{1+x^2}{\sin(x)} \text{ n'a pas de limite en 0}}$.

5.
   - $0 \leq \left|\dfrac{\sin(1/x)}{e^{1/x}+1}\right| \leq \dfrac{1}{e^{1/x}+1}$. *Or,* $\dfrac{1}{e^{1/x}+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ *donc par encadrement,* $\dfrac{\sin(1/x)}{e^{1/x}+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
   - $(e^{1/x}+1) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$.

   De plus, $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$, *et* sin *n'a pas de limite en* $-\infty$ *donc on conjecture que* $f : x \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}+1}$ *n'a pas de limite en* 0^-.
   En effet, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{-2\pi n}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{-2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ *on a* $\sin(u_n) = 0$ *et*

$\sin(v_n) = 1$, donc $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = \dfrac{1}{e^{1/v_n}+1}$, où $1/v_n \to -\infty$ donc $f(v_n) \to 1$.
Puisque $1 \neq 0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } 0}$.

6. *FI. On multiplie par la quantité conjuguée et on factorise par $\sqrt{x}$ en haut et en bas. Le numérateur tend alors vers 1 et le dénominateur vers 2. Le quotient tend donc vers $\dfrac{1}{2}$.*
En effet, pour $x > 1$:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^2}}}+1} \to \boxed{\frac{1}{2}}.$$

On ne peut pas permuter n'importe comment les limites :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{m}{n} = +\infty$ mais $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{m}{n} = 0$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} ae^{-x} = 0$ mais $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{a\to+\infty} ae^{-x} = +\infty$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} x^n = 1$ mais $\forall x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

Exercice 2. *Soient* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ *et* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \sin \dfrac{1}{x} \end{array}$.

En cas d'existence, déterminer successivement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} (g\circ f)(x)$.

- *Pour $x \neq 0$, $|f(x)| \leq |x| \to 0$ donc par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} f(x) = 0}$; on prolonge f par continuité en posant $\underline{f(0) = 0}$.*
- *$\forall x \neq 0$, $g(x) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} g(x) = 0}$.*
- *Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} (g\circ f)(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (*).*
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \frac{1}{(n+1)\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}$. Alors $(x_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $\lim x_n = \lim y_n = 0$, donc d'après (*), on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (g\circ f)(y_n)$.
  Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, donc $(g\circ f)(x_n) = 1$, et $f(y_n) \neq 0$, donc $(g\circ f)(y_n) = 0$.
  Par unicité des limites de $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$, on trouve $\ell = 0$ et $\ell = 1$. Contradiction.
  Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} (g\circ f)(x) \text{ n'existe pas.}}$

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$ et admettant une limite finie en $+\infty$. Que dire de l'application f ?*

Notons $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Première preuve. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (x_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $\underline{x_n = x + nT}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(x)$ car f est T-périodique. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.*
Comme $x_n \to +\infty$, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.
Par unicité de la limite, $f(x) = \ell$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est constante, égale à } \ell}$.

Deuxième preuve. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.*
Par définition de la limite, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 + nT \geq B$ (par exemple $n := \left\lfloor \frac{B-x_0}{T} \right\rfloor + 1$).
En particulier, $|f(x_0 + nT) - \ell| \leq \varepsilon$, et puisque f est T-périodique, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ |f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cette assertion assure que $f(x_0) = \ell$ (par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$), cela pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On a donc montré que $\boxed{f \text{ est constante, égale à } \ell}$.

Remarque. *De la même manière, on peut montrer qu'une fonction périodique n'a pas de limite infinie en $+\infty$. En effet, si c'était le cas, en utilisant la première preuve, on aurait $f(x) = \pm\infty$: absurde ! et en utilisant la deuxième preuve en supposant que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on aurait : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq A$, ce qui est absurde pour $A = f(12) + 1$ et $x = 12$.*
$\boxed{\text{Ainsi, une fonction périodique n'a pas de limite infinie en } \pm\infty}$.

Conclusion. *Une fonction périodique est constante ou n'a pas de limite en $\pm\infty$.*
En particulier, on retrouve le fait que $\sin$ (qui est périodique et non constante) n'a pas de limite (ni $\underline{\text{finie}}$ ni infinie) en $\pm\infty$.

Exercice 4. *Pour $x \geq 1$, on pose $f(x) = \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, quelle est sa valeur ?*

- *Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite.*
- *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = n$ et $v_n = n + 1/2$. On a $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$.*
  De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = 1 \to 1$ et $f(v_n) = \dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n}$.
  Méthode 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \geq n^{n+\frac{1}{2}} = n^n\sqrt{n}$ donc $f(v_n) \geq \sqrt{n} \to +\infty$.*

Méthode 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$f(v_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n}\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}_{=\exp\left(n\ln(1+\frac{1}{2n})\right)\to e^{1/2}} \times \underbrace{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}_{\to+\infty} \to +\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$ *et (u_n) et (v_n) tendent toutes les deux vers $+\infty$ donc* $\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$.

Exercice 5. *Pour tout réel x, pour tous entiers p et q, établir la formule*

$$\lim_{p\to+\infty}\lim_{q\to+\infty}[\cos(p!\pi x)]^{2q} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x),$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $f_{p,q}(x) = [\cos(p!\pi x)]^{2q} = [\cos^2(p!\pi x)]^q$. Distinguons les cas.

Premier cas. *Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Alors on écrit $x = \dfrac{r}{s}$, avec $(r,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $f_{p,q}(x) = [\cos^2(p!\pi\frac{r}{s})]^q$.*

Pour tout $p \geq s$, $\frac{p!}{s} \in \mathbb{N}$ donc $p!\pi\frac{r}{s} \in \pi\mathbb{Z}$ donc $\cos^2(p!\pi\frac{r}{s}) = 1$ puis $f_{p,q}(x) = 1$.
Ainsi,

$$\forall p \geq s,\ \forall q \in \mathbb{N},\ f_{p,q}(x) = 1.$$

$\forall p \geq s,\ \lim\limits_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 1$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty}\lim\limits_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)}$.

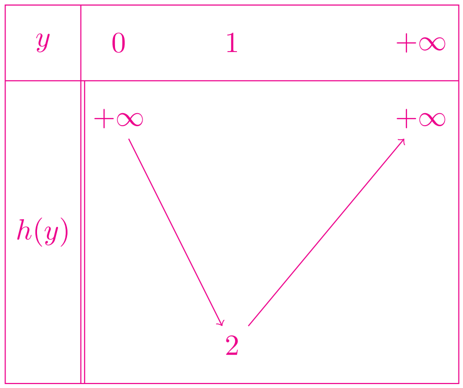
Deuxième cas. *Supposons que $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. On a toujours $0 \leq \cos^2(p!\pi x) \leq 1$.*

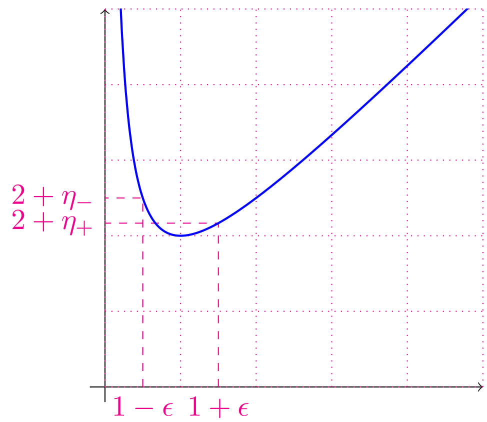
- *Si $\cos^2(p!\pi x) = 1$, alors $\sin(p!\pi x) = 0$ donc $p!x \in \mathbb{Z}$, i.e. $x \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde dans ce cas.*
- *Donc $0 \leq \cos^2(p!\pi x) < 1$ puis $\lim\limits_{q\to+\infty}[\cos^2(p!\pi x)]^q = 0$ puis* $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty}\lim\limits_{q\to+\infty} f_{p,q}(x) = 0}$.

Conclusion. *Dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty}\lim\limits_{q\to+\infty}[\cos(p!\pi x)]^{2q} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).}$

Exercice 6. Niveaux de fonctions. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.*

Correction. *Une brève étude de fonction montre que les variations de $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y+\frac{1}{y} \end{array}$ sont données par le tableau suivant.*





- *L'idée est de justifier que si un nombre y est tel que $y+\frac{1}{y}$ est suffisamment proche de 2, alors y lui-même est suffisamment proche de 1.*
  Plus précisément, soit $\epsilon > 0$. Soit $\eta_- = h(1-\epsilon)-2$ et $\eta_+ = h(1+\epsilon)-2$. Vu le tableau de variations, il s'agit bien de deux nombres strictement positifs. Le tableau de variations entraîne également que si $\eta = \min(\eta_-, \eta_+)$, alors $h(y) \leq 2+\eta$ entraîne $y \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]$.

- *On peut maintenant écrire formellement la preuve.*
  Soit $\epsilon > 0$.
  Soit $\eta = \min(h(1-\epsilon), h(1+\epsilon)) - 2 > 0$.
  Puisque $f(x) + \frac{1}{f(x)} = h\left(f(x)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 2$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in [-\delta, \delta] \Longrightarrow |h\left(f(x)\right) - 2| \leq \eta \Longrightarrow h\left(f(x)\right) \leq 2+\eta \Longrightarrow f(x) \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]\,,$$

  d'après la discussion précédente.
  On a donc bien montré $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \longrightarrow |f(x)-1| \leq \epsilon$, c'est-à-dire que

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1}.$$

Exercice 7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*

Correction.

- *Commençons par montrer que la fonction <u>f n'est pas majorée</u>, c'est-à-dire que*

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > A.$$

  Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Comme f est surjective, le réel $A+1$ admet un antécédent, donc on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = A+1$.
  On a donc trouvé un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > A$.

- *Comme la fonction f est croissante et non majorée, le théorème de la limite monotone donne directement (pour l'extrémité droite $+\infty$ de l'intervalle $\mathbb{R}$), que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$.*

Exercice 8. Une condition suffisante de continuité. *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que la fonction $g : x \mapsto f(x)/x$ soit décroissante. Montrer que f continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Correction. *Les fonctions f et g sont monotones sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le corollaire du théorème de la limite monotone, elles admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.*
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Toujours d'après le corollaire du théorème de la limite monotone, puisque f est croissante, on a l'encadrement

$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+), \tag{1}$$

où $f(a^-)$ et $f(a^+)$ sont respectivement les limites à gauche et à droite de f en a, et puisque g décroissante, on a

$$g(a^-) \geq g(a) \geq g(a^+). \tag{2}$$

La fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite à gauche en a qui vaut $g(a^-)$ et $\frac{f(a^-)}{a}$ donc par unicité de la limite, il vient : $\boxed{\dfrac{f(a^-)}{a} = g(a^-)}$.

De même, l'unicité de la limite de $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en a^+ implique que $\boxed{\dfrac{f(a^+)}{a} = g(a^+)}$.

L'équation (2) devient alors :

$$\frac{f(a^-)}{a} \geq \frac{f(a)}{a} \geq \frac{f(a^+)}{a}.$$

Puisque $a > 0$, on en déduit que

$$f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+). \tag{3}$$

Les inégalités (1) et (3) impliquent que $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$ donc f est continue en a.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Continuité

Exercice 9. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})^2$.*
Montrer la fonction $\max(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est continue sur I.

Correction. *On a l'égalité fonctionnelle*

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

Or, $f - g$ est continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition $|f - g|$ est continue sur I.
Puis, par opération sur les fonctions continues, $\boxed{\max(f, g) \text{ est continue sur } I.}$

Exercice 10. Prolongements par continuité. *Déterminer les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes. Étudier les éventuels prolongements par continuité.*

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$.
3. $f(x) : x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$.

Correction.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^*$. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \tilde{f}(0) = 1}$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$ *est définie et continue sur* $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

   D'une part, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f(x) = 1$.

   Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } \tilde{f}(1) = 1}$.

   D'autre part, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x-1} = 0$ *(par croissance comparée), donc*

   $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \tilde{f}(0) = 0}$.

3. $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x$ *donc* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
   $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ *donc* $\underline{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$. *Étudions la continuité de* f *en* k.
   Si $x \to k^+$, *alors* $\lfloor x \rfloor \to k$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to k^+]{} k = f(k)$.
   Si $x \to k^-$, *alors* $\lfloor x \rfloor \to k - 1$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to k^+]{} 1 + (k-1) = k = f(k)$.
   Ainsi, f *admet une limite en* k *qui est* $f(k)$ *donc* $\underline{f \text{ est continue en } k}$. *Finalement,* $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 11. Continuité et partie entière. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor) \end{array}$.

Montrer que f *est paire et continue sur* $\mathbb{R}$.

Correction.

- **Parité.**
  Soit $x \in \mathbb{Z}$. *Alors* $-x \in \mathbb{Z}$ *et* $\lfloor -x \rfloor = -x$. *Dans ce cas,* $f(x) = x^2$ *et* $f(-x) = x^2 = f(x)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. *Alors* $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$. *Dans ce cas,*

  $$f(-x) = (\lfloor x \rfloor + 1)^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor - 1) = f(x).$$

  Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x), \text{ donc } f \text{ est paire}}$.

- **Continuité.**

  ▷ *Soit* $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. *La fonction* $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ *est continue en* a *donc par opérations,* f *est continue en* a.

▷ *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors d'après un calcul précédent, $f(k) = k^2$. Et :*
$\lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$ *donc par opérations,* $\lim_{x \to k^+} f(x) = k^2 + (2k+1) \times 0 = k^2 = f(k)$, *donc* <u>*$f$ est continue à droite en k.*</u>
$\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1$ *donc par opérations,* $\lim_{x \to k^-} f(x) = (k-1)^2 + (2k-1) \times 1 = k^2 = f(k)$, *donc* <u>*$f$ est continue à gauche en k.*</u>
Ainsi, f est continue en k.

Finalement, $\boxed{f \text{ est continue en tout réel } x, \text{ donc } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 12. Discontinuité. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

<u>**Correction.**</u> *Soit $a \in \mathbb{R}$.*
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telles que

$$u_n \to a \qquad \text{et} \qquad v_n \to a.$$

Par définitions de f et des suites (u_n) et (v_n), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$ donc

$$(f(u_n)) \to 1 \qquad \text{et} \qquad (f(v_n)) \to 0.$$

On en déduit que f n'a pas de limite en a (sinon...). Donc, $\boxed{f \text{ est discontinue en tout point } a \in \mathbb{R}}$.

Exercice 13. Fonctions lipschitziennes. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est **k-lipschitzienne** sur I (pour $k \in \mathbb{R}_+$) si $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*
- *f est **lipschitzienne** sur I s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne sur I.*

1. *Montrer que la fonction* cos *est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que la fonction valeur absolue est* 1*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.*

<u>**Correction.**</u>

1. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.*
   Première preuve.

$$\begin{aligned} |\cos y - \cos x| &= \left| -2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \right| \\ &\leq |y - x| && \text{car } \forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|. \end{aligned}$$

Deuxième preuve. *On a* $\cos y - \cos x = -\int_x^y \sin(t)\mathrm{d}t$. *Donc*

$$\begin{aligned}|\cos y - \cos x| &= \left|-\int_x^y \sin t\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_x^y |\sin t|\mathrm{d}t && \text{d'après la propriété de l'intégrale} \\ &\leq \int_x^y 1\mathrm{d}t \\ &\leq y - x = |y-x|.\end{aligned}$$

Cela montre que $\boxed{\cos \text{ est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$. *En particulier, on peut en déduire que* $\cos$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *Par IT, on a :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x|-|y|| \leq |x-y|$ *donc la fonction valeur absolue est* 1*-lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$.

3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction* k*-lipschitzienne, pour un certain* $k \geq 0$.
Première preuve.
Si k *est nul, la fonction* f *est constante donc continue.*
Supposons que $k > 0$. *Soit* $x_0 \in I$. *Montrons que* f *est continue en* x_0.
Soient $\varepsilon > 0$ *et* $x \in I$ *tel que* $|x - x_0| \leq \varepsilon/k$. *On a alors* $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| \leq \varepsilon$, *ce qui conclut.*
Deuxième preuve.
Soit $a \in I$. $\forall x \in I,\ 0 \leq |f(x) - f(a)| \leq k \underbrace{|x-a|}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$ *d'où* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ *i.e.* f *est continue en* a.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

Exercice 14. *On considère la fonction* $f_{a,b,c} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$.
Déterminer tous les réels a, b, c *pour lesquels* $f_{a,b,c}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Correction. *Soit* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

- $f_{a,b,c}$ *est clairement continue sur* $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.
Donc $f_{a,b,c}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *ssi alors* $f_{a,b,c}$ *est continue en 1 et* -1.

- *On a :* $\lim\limits_{x\to 1^-} f_{a,b,c}(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-x^2} = 0$, *et* $\lim\limits_{x\to 1^+} f_{a,b,c}(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+c) = a+b+c = f_{a,b,c}(1)$.
Donc $\underline{f_{a,b,c} \text{ est continue en 1 ssi } a+b+c = 0}$.

- *De plus, on a :* $\lim\limits_{x\to -1^-} f_{a,b,c}(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax^2+bx+c) = a - b + c = f_{a,b,c}(-1)$ *et* $\lim\limits_{x\to -1^+} f_{a,b,c}(x) = \lim\limits_{x\to -1} \sqrt{1-x^2} = 0$. *Donc* $\underline{f_{a,b,c} \text{ est continue en } -1 \text{ ssi } a-b+c = 0}$.

- *Ainsi,* $f_{a,b,c}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *ssi* $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=0 \end{cases}$
En conclusion, $\boxed{\text{les fonctions de ce type continues sur } \mathbb{R} \text{ sont } \{f_{a,0,-a} \mid a \in \mathbb{R}\}}$, *où pour tout* $a \in$

$\mathbb{R}$, $f_{a,0,-a} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ a(x^2-1) & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$

Remarque : *on peut aussi procéder par analyse-synthèse, mais les équivalences sont simples ici.*

Exercice 15. De $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$: inégalités.

1. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que* $\quad \forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) *Montrer que* $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$.
   (b) *Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant* $\quad \forall\,(r,s) \in \mathbb{Q}^2, \quad r < s \Longrightarrow f(r) < f(s)$.
   Montrer que f est strictement croissante.

On pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

1. (a) *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
   Il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
   On a

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

   De même $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$.
   Comme $u_n \in \mathbb{Q}$, l'énoncé fournit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(u_n) < g(u_n)$$

   Par passage à la limite dans les inégalités larges (ici qui sont strictes !), c'est licite car les limites sont finies, on obtient $f(x) \leq g(x)$.

   (b) *Prenons $f = 0$ et $g : x \mapsto |x - \sqrt{2}|$. La fonction g est la fonction « distance à $\sqrt{2}$ ».*
   Comme on a $\forall\, x \neq \sqrt{2},\ f(x) < g(x)$, on a bien $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   Pourtant, en prenant $x = \sqrt{2}$, on a égalité.

2. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Montrons que $f(x) < f(y)$.*
   Méthode 1. *Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver deux rationnels $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que*

$$x < r < s < y.$$

   Par ailleurs, en utilisant les approximations décimales (par défaut pour x et par excès pour y), on peut trouver deux suites de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers x et y et telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq x \quad \text{et} \quad y \leq y_n.$$

   On a donc par transitivité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq r < s \leq y_n.$$

D'après l'énoncé (appliqué trois fois), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) < f(r) < f(s) < f(y_n). \qquad (\clubsuit)$$

On a

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

De même, $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(y)$.
Par passage à la limite dans les inégalités de $(\clubsuit)$*, on obtient :*

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y).$$

D'où $\boxed{f(x) < f(y)}$.
Variante. • *Poser* $x < y$ *et les mêmes approximations décimales* (x_n) *et* (y_n).
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < y_n$ *et* $(x_n, y_n) \in \mathbb{Q}^2$*, donc par hypothèse sur* f*, on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) < f(y_n)$.
Par continuité de f*, et passage à la limite quand* n *tend vers* $+\infty$*, on obtient* $f(x) \leq f(y)$*, ce qui montre que* $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$.
• *Il reste à montrer que la croissance est stricte, i.e.* $f(x) < f(y)$.
Pour cela, par densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on dispose de* $r, s \in \mathbb{Q}$ *tels que* $x < r < s < y$.
Par croissance de f *(appliquée à* (x, r) *et* (s, y)*) et par hypothèse sur* f *(appliquée à* $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$*), on a*

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y),$$

d'où $f(x) < f(y)$.

Exercice 16. Une équation fonctionnelle. *Déterminer toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues en* 0 *et en* 1 *qui vérifient*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2).$$

Correction. *Procédons par analyse-synthèse.*

Analyse. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue en* 0 *et en* 1 *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.
L'équation fonctionnelle vérifiée par f *assure que f est paire.*
On peut montrer par récurrence que $\boxed{\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{1/2^n})}$.
Rappel. *Pour* $a > 0$*, on a défini* $0^a = 0$ *(prolongement par continuité en* 0 *de la fonction* $f_a : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$*). Distinguons.*

- *Soit* $x > 0$*. Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n = x^{1/2^n} = e^{\frac{1}{2^n} \ln x}$.
Comme $\frac{1}{2^n} \to 0$ *et* $\exp$ *est continue en* 0*, on sait que* $x_n \to 1$.
D'une part, f *est continue en 1 donc* $f(x_n) \to f(1)$.
D'autre part, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante égale à* $f(x)$*, donc tend vers* $f(x)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.
Par unicité de la limite de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$*, on a :* $f(x) = f(1)$*, cela pour tout* $x > 0$.
- *Pour* $x < 0$*, on a* $f(x) = f(1)$ *par parité de* f.

- *Pour $x = 0$. Comme f est continue en 0, on a* $f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(1)$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)$, donc f est constante.

Synthèse. *Réciproquement, les fonctions constantes sont continues en 0 et 1 et vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.*

Conclusion. $\boxed{\text{Les fonctions recherchées sont les fonctions constantes}}$.

Exercice 17. Continue en un point, continue partout ! *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{$\spadesuit$}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction. *Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue x_1.*
Montrons que $f(x_1 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_1)$.
Avec ($\spadesuit$), on a l'égalité

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad f\big((x_1 + h) + (x_0 - h)\big) \;=\; f(x_1 + h) + f(x_0 - h).$$

On a donc en isolant le terme qui nous intéresse :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad f(x_1 + h) \;=\; f(x_1 + x_0) \;-\; f(x_0 - h)$$

Comme f est continue en x_0, on a $f(x_0 - h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$, on a donc par passage à la limite :

$$f(x_1 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_1 + x_0) - f(x_0)$$

Or d'après ($\spadesuit$), on a $f(x_1 + x_0) - f(x_0) = f(x_1)$.
D'où $f(x_1 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_1)$.
Donc $\boxed{f \text{ est continue en } x_1}$.

Exercice 18. Une équation fonctionnelle, bis. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Correction. *On procède par analyse-synthèse.*

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. On montre classiquement :*
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$.
  - $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = kf(1)$.
  - $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout réel est limite d'une suite de rationnels donc on peut trouver $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que

$r_n \to x$. Donc $f(x) = f(\lim r_n)$. Par continuité de f, on a $\lim f(r_n) = f(\lim r_n)$, donc

$$f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n f(1)$ et $r_n \to x$ donc

$$f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xf(1).$$

Par unicité de la limite de $(f(r_n))$, on a $f(x) = xf(1)$.
Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, i.e. f est une fonction linéaire.

- *Réciproquement, les fonctions linéaires sont continues et vérifient l'équation fonctionnelle.*
- $\boxed{\textit{Les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions linéaires.}}$

Exercice 19. Une équation fonctionnelle, ter. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Indication : *étant donnée une telle application, on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ et se ramener à l'exercice précédent.*

Correction. *Par analyse-synthèse.*

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \quad (*)$.*
  Suivons l'indication :
  - *g est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est.*
  - $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = f(x+y) - f(0) = f\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2y) - f(0)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(0)$ *donc* $\underline{\frac{1}{2}f(2x) = f(x) - \frac{1}{2}f(0)}$.
  - *Ainsi,* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = f(x) + f(y) - 2f(0) = g(x) + g(y)$.
  - *D'après l'exercice précédent, $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$.*
    $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + f(0)$ donc $\underline{f \text{ est une fonction affine}}$.
- *Réciproquement, les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$ et vérifient $(*)$.*
- *Conclusion :* $\boxed{\textit{les fonctions cherchées sont les fonctions affines.}}$

Remarque : *on se doute que les fonctions affines sont solutions, pour se ramener aux fonctions linéaires, il faut soustraire l'ordonnée à l'origine.*

Exercice 20. Une équation fonctionnelle, quater.

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(2^{-n}\, x\right)}$.
   En déduire la limite quand n tend vers l'infini de ce produit.
2. *Trouver toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2\,x) = f(x)\,\cos(x).$$

Correction.

1. *Soient $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right),$$

donc en itérant

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}.$$

Comme $x \neq 0$, quand $n \to +\infty$, on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$, puis

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(2^{-n}\,x\right)} = \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Or, $\frac{x}{2^n} \to 0$ et $\displaystyle\frac{\sin u}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc par composition de limites, $\displaystyle\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \to 1$, et $\boxed{\dfrac{\sin(x)}{2^n\sin(2^{-n}\,x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sin(x)}{x}}$.

2. **Analyse.** *Soit f solution. Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cdots = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Or, d'après la question 1.,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n},$$

donc

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f(x) = \frac{\sin x}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

On sait déjà que $f(0) = 1$.
Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $n \to +\infty$, on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$, donc pour n assez grand on a

$$\boxed{\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Or, $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* f *est continue en 0 donc* $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 1$.
Et, d'après la question 1., $\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(x)}{x}$. *Ainsi,*

$$f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin x}{x} \times 1.$$

Par unicité de la limite,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ et } f(0) = 1}.$$

Synthèse. *Réciproquement cette fonction est continue sur* $\mathbb{R}$ *(elle a été prolongée par continuité en 0) et vérifie l'équation fonctionnelle.*

Conclusion. *il y a une unique solution au problème :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ et } f(0) = 1}.$$

Exercice 21. *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $|f| = |g|$ *et* g *ne s'annule pas sur* $[a,b]$.
Montrer que $f = g$ *ou* $f = -g$.

Correction. *Puisque* g *ne s'annule pas, on peut considérer la fonction* $\varphi = \frac{f}{g}$, *qui est définie sur* $[a,b]$.
Par hypothèse, $|\varphi| = 1$ *donc pour tout* $x \in [a,b]$, *on a* $\varphi(x) \in \{-1,1\}$.
Montrons que φ *est constante égale à 1 ou* -1, *ce qui permettra de conclure.*
Par l'absurde, si φ *n'était pas constante égale à 1 ni à* -1 *alors il existerait* $(x,y) \in [a,b]^2$ *tel que* $\varphi(x) = 1$ *et* $\varphi(y) = -1$.
Puisque $0 \in [-1,1] = [\varphi(y), \varphi(x)]$, *et* φ *est continue sur l'intervalle* $[a,b]$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaires,* φ *s'annulerait, ce qui contredit la condition sur la valeur absolue. Donc* $\varphi = 1$ *ou* $\varphi = -1$ *i.e.* $\boxed{f = g \text{ ou } f = -g}$.

Exercice 22. Une fonction non continue satisfaisant la propriété des valeurs intermédiaires. *Soit* $f : \begin{array}{ccl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \textit{si } x>0 \\ 0 & \textit{si } x=0 \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a<b$ et pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.

Remarque. *La fonction f n'est pas continue en 0 (car f n'a pas de limite en 0^+ vu que $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$).*

Correction. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

- *Cas $a>0$. Alors la fonction est continue sur $[a,b]$, donc le TVI s'applique.*
- *Cas $a=0$. On va se ramener à un intervalle du type $[a',b]$ avec $a'>0$ et $f(a')=f(a)$ i.e. $f(a')=0$.*
  Il faut bien sûr imposer $a'<b$.
  Comme $0<b$, on peut trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \dfrac{1}{n_0\pi} < b$.
  Posons $a' = \dfrac{1}{n_0\pi}$. Alors $f(a')=0=f(a)$, et y est compris entre $f(a')$ et $f(b)$.
  Comme f est continue sur l'intervalle $[a',b]$, le TVI fournit un $c \in [a',b]$ tel que $f(c)=y$.
  A fortiori, ce c appartient à $[a,b]$, donc répond à la question.

Exercice 23. Fonction propre. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Correction. *Puisque $|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe un $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M,\ |f(x)|>0$. En particulier,*

$$\forall x \geq M,\ f(x) \neq 0. \qquad (✠)$$

On en déduit que f est de signe constant sur $[M,+\infty[$: si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $x_\pm \in [M,+\infty[$ tel que $\pm f(x_\pm)>0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à la fonction continue f sur le segment joignant x_- à x_+), on pourrait trouver x_0 dans ce segment (et donc a fortiori dans $[M,+\infty[$) tel que $f(x_0)=0$, ce qui contredit (✠).
On en déduit donc que soit $f>0$ sur $[M,+\infty[$, soit $f<0$ sur $[M,+\infty[$.
Dans le premier cas, l'hypothèse se réécrit

$$f(x) = |f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\ ;$$

dans le second,

$$-f(x) = |f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,$$

ce qui conclut.

Exercice 24. Théorème du point fixe pour les fonctions croissantes.
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante. Montrer que f possède un point fixe.
Indication : *on pourra considérer $m = \inf\{x \in [a,b] \mid x \geq f(x)\}$ ou bien $M = \sup\{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\}$.*

Correction. *Déjà fait dans le DM sur les réels. On montre que $f(m) = m$ ou $f(M) = M$ (au choix). Pour rappel :*

- *Soit $E = \{x \in [a,b] \mid x \geq f(x)\}$. E est une partie non vide (car $b \in E$) et minorée (par a, car $E \subset [a,b]$) de $\mathbb{R}$ donc $\inf E$ existe. On note $\boxed{m = \inf E \in \mathbb{R}}$.*
- ***On observe que $m \in E$.** En effet, tout d'abord a est un minorant de E et $m = \inf E$ est le plus grand des minorants de E, donc $m \geq a$.*
  De plus, $b \in E$ et m est un minorant de E donc $m \leq b$. Ainsi, $\boxed{m \in [a,b]}$.
  Vérifions que $f(m) \leq m$. Pour cela, il suffit de montrer que $f(m)$ est un minorant de E.
  Soit $x \in E$. m étant un minorant de E, on a $m \leq x$. De plus, m et x appartiennent à $[a,b]$ et f est croissante sur $[a,b]$ donc $f(m) \leq f(x)$. Mais $x \in E$, donc $f(x) \leq x$.
  Par transitivité, on obtient $f(m) \leq x$, cela pour tout $x \in E$, ce qui signifie que $f(m)$ est un minorant de E.
  Or, $m = \inf E$ donc m est le plus grand des minorants de E donc $\boxed{f(m) \leq m}$. Ainsi, $\boxed{m \in E}$.
- ***Montrons que $m \leq f(m)$.** Pour cela, il suffit de montrer que $f(m) \in E$.*
  Tout d'abord, $m \in [a,b]$ et $[a,b]$ est stable par f, donc $f(m) \in [a,b]$.
  Ensuite, on vient de montrer que $f(m) \leq m$, d'où par croissance de f sur $[a,b]$, on a $f(f(m)) \leq f(m)$. On a donc montré que $f(m) \in E$. Or, m est un minorant de E donc $m \leq f(m)$.
- *On a $f(m) \leq m$ et $f(m) \geq m$ donc, par antisymétrie de la relation $\leq$, $f(m) = m$, avec $m \in [a,b]$, ce qui implique que $\boxed{f \text{ possède un point fixe dans } [a,b]}$.*
- **Remarque :** *si l'on remplace l'hypothèse « f croissante » par « f décroissante » le résultat n'est plus vrai (il suffit de considérer une application décroissante non continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ sans point fixe).*

Exercice 25. Plusieurs théorèmes de point fixe concernant des applications continues.

1. **Théorème du point fixe pour une application continue.**
   Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b],[a,b])$. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. *Montrer que l'équation $x^{17} = x^{12} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.*
3. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $(f \circ f)(a) = a$.*
   Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.
4. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $\ell \in [0,1[$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.*
   Montrer que f possède au moins un point fixe.

Correction.

1. *On introduit la fonction $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$.*

On a : $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc $0 \in [g(b), g(a)]$. De plus, g est continue sur l'intervalle $[a, b]$.
Donc d'après le TVI, il existe au moins un $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ donc $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe}}$.

2. *On considère la fonction $h : x \mapsto x^{17} - x^{12} - 1$ (polynomiale à coefficients réels et de degré impair).*
   h est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
   De plus, $h(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, donc $0 \in]h(0), \lim\limits_{+\infty} h[$.
   Donc d'après le TVI généralisé, il existe au moins un $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(x_0) = 0$ i.e.
   $\boxed{x_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ est une solution de l'équation}}$.

3. *Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
   On a : $g(f(a)) = f^2(a) - f(a) = a - f(a) = -g(a)$, donc $g(a)g(f(a)) = -g(a)^2 \leq 0$.
   De plus, $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de recherche de zéro, g s'annule entre a et $f(a)$, donc sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ a un point fixe sur } \mathbb{R}}$.
   Variante. *On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x$.*
   La fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et comme elle est continue, elle garde un signe constant (conséquence du TVI).

   - *Si g est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$, donc en particulier (pour $x = f(a)$ puis a), on a $(f \circ f)(a) = f(f(a)) > f(a) > a$, ce qui contredit l'hypothèse sur f.*
   - *Si g est strictement négative, on obtient de même $(f \circ f)(a) < a$ et encore une contradiction.*

   On en déduit l'existence d'un point fixe pour f.

4. **Première méthode.** *Posons $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.*
   La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
   $g(0) = f(0) \in [0, +\infty[$ *et pour $x > 0$,* $g(x) = x \underbrace{\left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)}_{\to \ell - 1 < 0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

   $0 \in] \lim\limits_{+\infty} g, g(0)]$ *et g est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc d'après le TVI généralisé, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(c) = 0$ donc $\boxed{c \text{ est un point fixe de } f}$.*
   Deuxième méthode. *Posons $h = \dfrac{f}{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   Si $f(0) = 0$, alors 0 est point fixe de f.
   Sinon, $f(0) \neq 0$. Alors par continuité de f en 0, on a $\lim\limits_0 f = f(0) \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\lim\limits_0 h = +\infty$. (N.B. : on distingue le cas où le numérateur aurait une limite nulle car sinon on aurait une forme indéterminée). De plus, par hypo, $\lim\limits_{+\infty} h = \ell < 1$ donc $1 \in] \lim\limits_{+\infty} h, \lim\limits_0 h[$. D'après le TVIG, on en déduit que 1 admet au moins un antécédent par h dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f admet au moins un point fixe dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 26. Équation. *Montrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ possède une infinité de solutions dans $]0, +\infty[$.*

Correction. *Soit $f : x \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.*
La fonction f est continue.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2k\pi} \geq 0 \quad \text{et} \quad f(2k\pi + \pi) = -1 - \frac{1}{2k\pi + \pi} < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi[$ tel que $f(x_k) = 0$.
On vient de construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \Big(f(x_k) = 0 \quad \text{et} \quad x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi[\Big).$$

Reste à montrer que la suite prend une infinité de valeurs.
Comme les intervalles $[2k\pi, 2k\pi + \pi[$ sont disjoints deux à deux, on a

$$\forall\, (k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad k \neq \ell \Longrightarrow x_k \neq x_\ell.$$

Ainsi, f s'annule une infinité de fois.
Donc $\boxed{\text{l'équation admet une infinité de solutions}}$.

Exercice 27. Encore un théorème de point fixe ! *Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application vérifiant*

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction.

- *Montrer que f est continue sur I. On a $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, donc f est 1-liptchitzienne donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.*

- *Existence du point fixe. I est un segment donc $I = [a, b]$. Soit $h : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & [a-b, a+b] \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Alors $h(a) = f(a) - a \geq 0$ et $h(b) = f(b) - b \leq 0$. De plus, h est continue sur $[a, b]$ donc d'après le TVI, h s'annule sur $[a, b]$ i.e. $\boxed{f \text{ a au moins un point fixe sur } [a, b]}$.*

- *Unicité du point fixe. Supposons que f a deux points fixes α et β distincts. Alors par hypothèse, $|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|$ i.e. $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{f \text{ a au plus un point fixe}}$.*

- *Conclusion. f a un unique point fixe, que l'on notera α.*

Exercice 28. *Montrer qu'il n'existe pas d'application $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que tout réel ait exactement deux antécédents par f.*

Correction. *Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'une telle application existe. Notons $a < b$ les deux antécédents de 0.*
Sur l'intervalle $]a, b[$, la fonction f ne s'annule pas, donc elle garde un signe constant, puisqu'elle est continue (TVI).
Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f est strictement positive sur $]a, b[$.
On note $M = \max\limits_{[a,b]} f = f(c)$, avec $c \in]a, b[$ (l'existence est acquise d'après le TBM et $M \neq 0$ (sinon 0 aurait une infinité d'antécédents...) donc $c \in]a, b[$.

Considérons le réel $\frac{M}{2} \in]0, M[$. D'après le TVI, il existe $x_1 \in]a, c[$ et $x_2 \in]c, b[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \frac{M}{2}$.
Le réel $M+1$ est atteint par f (par hypo) et ce n'est pas sur $[a, b]$ (car $M+1 > M = \max_{[a,b]} f$ donc $M+1$ est atteint par f sur $]-\infty, a[$ ou sur $]b, +\infty[$.
Supposons par exemple qu'il existe $x \in]b, +\infty[$ tel que $M+1 = f(x)$. On a $\frac{M}{2} \in]0, M+1[=]f(b), f(x)[$ et f est continue sur l'intervalle $]b, x[$ donc $\frac{M}{2}$ a un antécédent par f sur $]b, +\infty[$. Le réel $\frac{M}{2}$ aurait donc au moins trois antécédents par f : absurde !

Exercice 29. Théorème de la corde universelle. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.*

1. *Montrer que* $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) = f(x_0)$.

   On pourra commencer par étudier les cas $n = 1, 2, 3$.

2. **Application.** *Un marcheur fait 12 km en 1 heure, montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il fait 6 km (de même, il existe un intervalle d'un quart d'heure pendant lequel il fait 3 km).*

Correction.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varphi : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.*
   $\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ *donc*
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) &= f(0) - f(1) && \textit{(somme télescopique} \\ &= 0 && \textit{hypothèse.} \end{aligned}$$
   On en déduit que les $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ n'ont pas tous le même signe ou bien qu'ils sont tous nuls.
   - *S'ils sont tous nuls, $x_0 = \frac{1}{n}$ vérifie $f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, donc x_0 convient.*
   - *Sinon, la fonction φ est continue et change de signe sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ donc d'après le TVI, elle s'annule en un point x_0 qui répond à la question.*

2. *Considérons la fonction $f : t \mapsto d(t) - 12t$, où d représente la distance parcourue en fonction du temps t (exprimé en heure). Ainsi, $f(0) = f(1)$ et f est continue sur $[0, 1]$. Alors d'après la question 1,*
   - *il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) = f(t_0)$ i.e. tel que $d\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) = d(t_0) + 6$ donc le marcheur parcourt 6km entre t_0 et $t_0 + \frac{1}{2}$ i.e. en une demi-heure ;*
   - *il exite $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f\left(t_1 + \frac{1}{4}\right) = f(t_1)$ i.e. tel que $d\left(t_1 + \frac{1}{4}\right) = d(t_1) + 3$ donc le marcheur parcourt 3km entre t_1 et $t_1 + \frac{1}{4}$ i.e. en un quart d'heure.*

Exercice 30. Fonctions coïncidant en un point : composée.
Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],[0,1])^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. On pose $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$.

1. *Montrer que E n'est pas vide, qu'il possède un minimum a et un maximum b.*
2. *Montrer que, pour tout $x \in E$, $g(x) \in E$. En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.*

Correction.

1. - *On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$. On a $h(0) = f(0) \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc h change de signe sur l'intervalle $[0,1]$. Comme de plus, h est continue sur $[0,1]$, on sait d'après le TVI que h s'annule sur $[0,1]$.* $\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ n'est donc pas vide}}$.
   - *En tant que partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, E possède une borne inférieure et une borne supérieure. On note $\underline{a = \inf(E) \in \mathbb{R}}$ et $b = \sup(E) \in \mathbb{R}$.*
   - *Montrons que a appartient à E.*
     - ▷ *0 est un minorant de E et a est le plus grand d'entre eux donc $0 \leq a$. De plus, $1 \in E$ et 0 minore E donc $a \leq 1$. Ainsi, $a \in [0,1]$.*
     - ▷ *Il reste à montrer que $f(a) = a$.*
       Méthode 1. *Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose d'une suite $(e_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a.*
       D'après la caractérisation epsilonesque de la borne inf, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a + \frac{1}{n} > a$ donc $a + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de E, d'où il existe $e_n \in E$ tel que $a \leq e_n < a + \frac{1}{n}$.
       Par continuité de f en a, on a $f(e_n) \to f(a)$.
       De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in E$ donc $e_n \in [0,1]$ et $f(e_n) = e_n$, donc $f(e_n) \to a$.
       Par unicité de la limite, on a $\underline{f(a) = a}$.
       Méthode 2. *Raisonnons par l'absurde, en supposant que $f(a) \neq a$.*
       On a alors $|h(a)| = |f(a) - a| > 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a} |h(x)| > 0$ (par continuité de h). On en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta] \cap [0,1]$, on ait $|h(x)| = |f(x) - x| > 0$ et donc $x \notin E$. Il n'y a donc pas d'élément de E dans l'intervalle $[a, a+\eta[$, ce qui contredit la caractérisation epsilonesque de $a = \inf(E)$. On a donc encore $f(a) = a$.

     Ainsi, $a \in E$ et $a = \sup E$ donc $\boxed{a = \min(E)}$. On démontre de même que $\boxed{b = \max(E)}$.

2. - *Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = x$, donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, d'où $\boxed{g(x) \in E}$.*
     $\underline{\text{En particulier, } g(a) \text{ et } g(b) \text{ appartiennent à } E}$.
   - *Soit $\phi = f - g$. La fonction ϕ est définie sur $[0,1]$. On a :*
     $$\phi(a) = f(a) - g(a) = a - g(a) \leq 0,$$
     car $g(a) \in E$ et $a = \min(E)$ et de même :
     $$\phi(b) = f(b) - g(b) = b - g(b) \geq 0,$$
     car $g(b) \in E$ et $b = \max(E)$.
     Donc la fonction ϕ est continue sur $[0,1]$ et change de signe sur $[0,1]$, donc d'après le TVI, ϕ s'annule sur $[0,1]$, donc $\boxed{\text{il existe } c \in [0,1] \text{ tel que } f(c) = g(c)}$.

Exercice 31. Intervalles de $\mathbb{Q}$. *Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{Q})$.*
Montrer que f est constante.

Première méthode. *f est continue sur l'intervalle I donc $f(I)$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{Q}$.*

> *Quels sont les intervalles inclus dans $\mathbb{Q}$? Réponse : $\varnothing$ et les singletons rationnels.*
> *En effet, supposons par l'absurde que, $f(I)$ contient au moins 2 éléments distincts, disons r et s tels que $r < s$.*
> *Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r < \zeta < s$ donc $\zeta \in [r, s]$.*
> *Mais $(r, s) \in f(I)^2$ et $f(I)$ est un intervalle donc $[r, s] \subset f(I)$.*
> *D'où $\zeta \in f(I)$. Or, $f(I) \subset \mathbb{Q}$ donc $\zeta \in \mathbb{Q}$, contradiction.*

Ainsi, $f(I)$ a zéro ou un élément donc $f(I) = \varnothing$ ou un singleton rationnel.
Or, $f(I) \neq \varnothing$ car $I \neq \varnothing$, donc il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $f(I) = \{r\}$. Ainsi, $\forall x \in I,\ f(x) = r$, donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Deuxième méthode. *Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$ (licite car I est non trivial). Montrons que $f(x) = f(y)$ en raisonnant par l'absurde.*
Sans perte de généralité, supposons que $f(x) < f(y)$.
$(f(x), f(y)) \in f(I)^2$ et $f(I)$ est un intervalle (conséquence du TVI) donc $[f(x), f(y)] \subset f(I)$.
Construisons un irrationnel dans le segment $[f(x), f(y)]$. Posons $z := f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{\sqrt{2}}$.
Puisque $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]0, 1[$, on a $z \in]f(x), f(y)[$ (par paramétrisation des segments).
Autre justification. *On calcule et on remarque que : $z - f(x) > 0$ et $f(y) - z > 0$.*
Donc $z \in f(I)$ et comme $f(I) \subset \mathbb{Q}$, on a $z \in \mathbb{Q}$.
De plus, $f(x) \in \mathbb{Q}$, donc leur différence $\frac{f(y)-f(x)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}^*$.
Or, $f(y) - f(x) \in \mathbb{Q}^*$ donc $\sqrt{2}$ s'écrit comme un quotient de rationnels non nuls donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est une contradiction.
Donc $f(x) = f(y)$, cela pour tout $(x, y) \in I^2$ donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Exercice 32. Existence. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) \neq f(b)$. Montrer que :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2,\ \exists c \in]a, b[, \quad \alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c).$$

Correction. *Sans perte de généralité, supposons que $f(a) < f(b)$.*
Soit $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$.
Première méthode. *Comme $\alpha + \beta > 0$, on a :*

$$\forall c \in]a, b[,\ \alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c) \iff \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}_{1-\lambda \in]0,1[} f(a) + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha + \beta}}_{\lambda \in]0,1[} f(b) = f(c).$$

Posons $z = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(a) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(b) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(a) + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) f(b)$, avec $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in]0, 1[$. Par paramétrisation des segments, on a $z \in]f(a), f(b)[$ (sinon, on calcule $z - f(a)$ et $f(b) - z$ et on montre qu'ils sont strictement positifs).
f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $z \in]f(a), f(b)[$, donc d'après le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $z = f(c)$.

Remarquons que $c \neq a$ car $f(c) \neq f(a)$ et $c \neq b$ car $f(c) \neq f(b)$.
Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } z = f(c), \text{ ce qui conclut.}}$

Deuxième méthode. *On introduit la fonction $g : x \mapsto \alpha(f(a) - f(x)) + \beta(f(b) - f(x))$.*
On a : $g(a) = \beta(f(b) - f(a)) > 0$ et $g(b) = \alpha(f(a) - f(b)) < 0$, et g est continue sur le segment $[a,b]$, donc d'après le TVI, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$.
Remarquons que $g(a) \neq 0$ et $g(b) \neq 0$ donc $\boxed{c \in]a,b[\text{ et } g(c) = 0}$.

Exercice 33. Existence. *Soient $a < b$ et $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2$. On suppose que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.*

Correction. *Soit h la fonction définie sur $[a,b]$ par :*

$$h : x \mapsto f(x)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

D'une part, la fonction h est de la forme $x \mapsto \lambda f(x) - I$ donc, comme f, $\underline{h \text{ est continue sur } [a,b]}$.
D'autre part,

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) = \int_a^b (f(x) - f(t))g(t)\mathrm{d}t.$$

Or, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Il existe alors $(x_m, x_M) \in [a,b]^2$ tels que

$$\forall t \in [a,b],\ \underbrace{f(x_m)}_{=\min f} \leq f(t) \leq \underbrace{f(x_M)}_{=\max f}.$$

Puisque g est positive sur $[a,b]$, on a

$$\forall t \in [a,b],\ (f(x_m) - f(t))\,g(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad (f(x_M) - f(t))\,g(t) \geq 0.$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale sur $[a,b]$ avec $a \leq b$, on en déduit que $\underline{h(x_m) \leq 0 \text{ et que } h(x_M) \geq 0}$.

On a donc $\begin{cases} 0 \in [h(x_m), h(x_M)] \\ x_m, x_M \in [a,b] \\ h \in \mathscr{C}^0(([a,b],\mathbb{R}) \end{cases}$ *d'où, par théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $[a,b]$,*

i.e. il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(c) = 0$ i.e. il existe $c \in [a,b]$ tel que $\boxed{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$.

Exercice 34. Fonctions périodiques. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique.*
Montrer que f est bornée.

Correction. *Notons $T > 0$ une période de f.*
f est continue sur le segment $[0,T]$ donc bornée. Fixons $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in [0,T],\ |f(y)| \leq M$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\underline{\text{il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ (par exemple } n = \lfloor x/T \rfloor) \text{ tel que } x - nT \in]0,T]}$, donc

$$|f(x - nT)| \leq M.$$

Par T-périodicité de f, on a aussi

$$f(x) = f(x - nT).$$

Ainsi, $\boxed{|f(x)| \leq M, \text{ cela pour tout } x \in \mathbb{R}}$, *donc* $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 35. Composition d'une fonction bornée et d'une fonction continue. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bornée et soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *sont bornées.*

Correction. *Par hypothèse, on peut trouver* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$.

- *Quel que soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|f(g(x))| \leq M$, *donc* $\boxed{f \circ g \text{ est bornée}}$.
- *D'après le théorème des bornes atteintes, la restriction* $g_{|[-M,M]}$ *de* g *sur le segment* $[-M, M]$ *est bornée, donc on peut trouver* $N \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall y \in [-M, M],\ |g(y)| \leq N.$$

  On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-M, M]$, *donc* $|g(f(x))| \leq N$, *ce qui montre que* $\boxed{g \circ f \text{ est bornée}}$.

Exercice 36. Minimum. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ *telle que* f *admet une limite en* $+\infty$.

1. *On suppose que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est bornée sur* $[0, +\infty[$.
2. *On suppose que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *Montrer que* f *possède un minimum sur* $[0, +\infty[$.

Correction.

1. **Méthode efficace.** f *admet une limite finie en* $+\infty$, *donc* f *est bornée au voisinage de* $+\infty$. *On dispose donc de* $M_1 \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R}_+$ *(on rappelle que les assertions avec* $B \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R}_+$ *sont équivalentes) tels que*

$$\forall x \in [B, +\infty[,\ |f(x)| \leq M_1.$$

   Par ailleurs, f *est continue sur le segment* $[0, B]$, *donc bornée (d'après le TBA). On dispose donc de* $M_2 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in [0, B],\ |f(x)| \leq M_2.$$

   En posant $M = \max(M_1, M_2)$, *on a donc* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq M$, *ce qui signifie que* $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+}$.

   Méthode « à la main ». *Soit* $\varepsilon = 1 > 0$. *Par définition de la limite, il existe* $B \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq 1 \Longrightarrow |f(x)| \leq 1 + |\ell|,$$

   par IT ou ITR, d'où f *est bornée sur* $[B, +\infty[$.

   - *Si* $B \leq 0$, *alors* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq 1 + |\ell|$ *donc* $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+}$.
   - *Supposons que* $B > 0$. *Alors* $\forall x \in [B, +\infty[,\ |f(x)| \leq 1 + |\ell|$. *On pourrait poser* $M_1 = 1 + |\ell| (= \max(\ell + 1, -(\ell - 1)))$.
     Par ailleurs, sur le segment $[0, B]$, f *est continue donc* f *est bornée (d'après le TBA), donc on peut trouver* $M_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in [0, B],\ |f(x)| \leq M_2$.
     Posons $\underline{M = \max(M_1, M_2)}$. *Alors* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq M$ *i.e.* $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+}$.

2. Posons $A = f(0) \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq B, \quad f(x) \geq f(0).$$

De plus, sur le segment $[0, B]$, f est continue donc bornée et atteint ses bornes (TBA). En particulier, il existe $\alpha \in [0, B]$ tel que $f(\alpha) = \min\limits_{[0,B]} f$. Ainsi,

$$\forall x \in [0, B], \ f(x) \geq f(\alpha).$$

En particulier, comme $0 \in [0, B]$, on a $f(0) \geq f(\alpha)$.
On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \geq f(\alpha),$$

ce qui prouve que $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } [0, +\infty[\text{, qui vaut } f(\alpha) \text{ (minorant atteint)}}$.
Remarque : *si on prend $A = f(12)$, on aura $\underline{\min f = \min(f(12), f(\alpha)) \in f(\mathbb{R}_+)}$.*

Exercice 37. Fonction continue surjective. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que f prend toute valeur une infinité de fois.*

Correction.

- *Le point clé est que f ne peut être ni minorée ni majorée sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, car elle serait sinon minorée ou majorée sur $\mathbb{R}_+$ tout entier (car f est bornée sur le segment $[0, A]$), ce qui contredirait la surjectivité de f.*

- *Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Puisque f est surjective, y admet au moins un antécédent par f sur $\mathbb{R}_+$.*
  Montrons que y admet une infinité d'antécédents par f.
  Supposons (par l'absurde) que f ne prenne la valeur y qu'un nombre fini de fois. On peut donc trouver $A \in \mathbb{R}_+$ tel que
  $$\forall x \in [A, +\infty[, \ f(x) \neq y \qquad (\star)$$
  (il suffit de considérer A strictement supérieur au plus grand des antécédents de y par f).
  Par le théorème des valeurs intermédiaires, cela entraîne que
  $$\left(\forall x \in [A, +\infty[, \ f(x) < y\right) \qquad ou \qquad \left(\forall x \in [A, +\infty[, \ f(x) > y\right),$$
  (en effet, le contraire assurerait l'existence de $\alpha, \beta \geq A$ tels que $f(\alpha) \leq y$ et $f(\beta) \geq y$, donc y appartiendrait à $[f(\alpha), f(\beta)]$ et aurait donc un antécédent par f entre α et β donc sur $[A, +\infty[$, ce qui contredit $(\star)$).
  Ainsi, f est soit minorée soit majorée par y sur $[A, +\infty[$, et entraîne la contradiction souhaitée.
  On en déduit que $\boxed{f \text{ prend toute valeur une infinité de fois}}$.

Exercice 38. Continuité et injectivité impliquent stricte monotonie. *Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.*
Montrer que si f est injective, alors f est strictement monotone sur I.
Indication : *on propose de raisonner par contraposée. Justifier qu'il existe alors $x_0, x_1, y_0, y_1 \in I$ tels que*

$$x_0 < y_0 \text{ et } x_1 < y_1 \text{ et } f(x_0) \leq f(y_0) \text{ et } f(x_1) \geq f(y_1),$$

et étudier la fonction

$$h: \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x_t) - f(y_t), \end{array}$$

où x_y et y_t sont des réels à définir.

Correction. *Procédons par contraposée. Supposons f non strictement monotone, et démontrons f non injective.*
Puisque f n'est pas strictement monotone, f n'est pas strictement croissante ni strictement décroissante. On peut donc trouver $x_0, x_1, y_0, y_1 \in I$ tels que

$$x_0 < y_0 \quad \text{et} \quad x_1 < y_1 \quad \text{et} \quad f(x_0) \leq f(y_0) \quad \text{et} \quad f(x_1) \geq f(y_1).$$

Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, le réel $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ appartient à $[x_0, x_1]$ (ou $[x_1, x_0]$) donc appartient à I vu que I est un intervalle. De même, pour tout $t \in [0,1]$, $y_t = (1-t)y_0 + ty_1 \in I$.
Considérons la fonction

$$h: \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x_t) - f(y_t). \end{array}$$

Par opérations, h est continue sur $[0,1]$ et vérifie $h(0) = f(x_0) - f(y_0) \leq 0$ et $h(1) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $\lambda \in [0,1]$ tel que $h(\lambda) = 0$, donc $f(x_\lambda) = f(y_\lambda)$.
De plus, $x_\lambda \neq y_\lambda$. Sinon, on aurait $\underbrace{(1-\lambda)(x_0 - y_0)}_{\leq 0} = \underbrace{\lambda(y_1 - x_1)}_{\geq 0}$, donc

$$(1-\lambda)\underbrace{(x_0 - y_0)}_{<0} = 0 = \lambda\underbrace{(y_1 - x_1)}_{>0}$$

donc $\lambda = 0 = 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $f(x_\lambda) = f(y_\lambda)$ avec $x_\lambda \neq y_\lambda$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
Remarque. *Pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue, on a l'équivalence : f injective, si et seulement si, f strictement monotone (le sens indirect étant toujours vrai, même sans l'hypothèse de continuité).*

Exercice 39. Involutions continues. *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}.$$

on pourra utiliser le résultat de l'exercice 38.

Correction. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Alors f est bijective et $f^{-1} = f$.*
La fonction f est injective et continue sur un intervalle, « donc » f est strictement monotone d'après l'exercice 38.

D'après le TBM, $f([0,+\infty[) = \begin{cases} [f(0), \lim\limits_{+\infty} f[& \text{si } f \text{ est strictement croissante} \\ ]\lim\limits_{+\infty} f, f(0)] & \text{si } f \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Par ailleurs, f est surjective donc $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.
Puisque $f(0) \in [0,+\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante.
S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) < x_0$ alors $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$: contradiction.
S'il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_1) > x_1$ alors $x_1 = f(f(x_1)) > f(x_1) > x_1$: contradiction.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, c'est-à-dire $\boxed{f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}}$.

Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ *convient, donc* $\boxed{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+} \text{ est la seule fonction solution}}$.

Exercice 40. Bijection. *Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq a|x-y|.$$

1. *Montrer que f est injective.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{+\infty} |f| = \lim\limits_{-\infty} |f| = +\infty$.*
3. *Montrer que f est bijective.*

Correction.

1. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, par hypothèse, $0 \geq a|x-y| \geq 0$ donc $a|x-y| = 0$ et comme $a \neq 0$, on en déduit que $x = y$.*
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est injective}}$.
2. *D'après l'IT et l'hypothèse appliquée à $y = 0$, on a*
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| + |f(0)| \geq |f(x) - f(0)| \geq a|x|.$$
   Ainsi, $|f(x)| \geq a|x| - |f(0)|$. Or, $|f(0)| \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (a|x| - |f(0)|) = +\infty$. Par théorème de minoration, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty}$.
3. *On sait déjà que f est injective, donc il suffit de montrer que f est surjective.*
   f est injective et continue sur un intervalle donc d'après l'exercice 38, f est (strictement) monotone sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet alors des limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   D'après la question précédente, on a que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
   Supposons par exemple que f soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le TVI généralisé, $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

Exercice 41. Fonction ayant des limites égales. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell$. Montrer que f ne peut pas être injective.*

Correction. *Supposons par l'absurde f injective. On va donner deux façons d'obtenir une contradiction.*

Première méthode. *A fortiori, f ne peut pas être constante. On peut donc trouver $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq \ell$.*

Prenons un nombre réel m compris strictement entre $f(x_0)$ et ℓ (si $\ell \in \mathbb{R}$, on peut choisir simplement $m = \frac{f(x_0)+\ell}{2}$, et si $\ell = \pm\infty$, on peut prendre $m = f(x_0) \pm 1$).

- *Comme on a (suivant les cas)*
  $$f(x_0) < m < \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x_0) > m > \ell,$$
  et que la fonction f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, x_0]$, le théorème des valeurs intermédiaires généralisé entraîne l'existence de $c_- \in]a, x_0]$ tel que $f(c_-) = m$.

Comme $f(x_0) \neq m$, on a même $c_- \in]a, x_0[$.

- *De la même façon, on obtient l'existence de $c_+ \in]x_0, b[$ tel que $f(c_+) = m$.*

Ainsi, $c_- < c_+$ et $f(c_-) = f(c_+)$, donc f n'est pas injective.

Deuxième méthode. *L'exercice 38 affirme que toute fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue et injective est nécessairement strictement monotone.*

Si l'on prend deux éléments $c < d$ appartenant à $]a, b[$, on a alors

- *si f est strictement croissante, $\lim\limits_{a} f \leq f(c) < f(d) \leq \lim\limits_{b} f$;*
- *si f est strictement décroissante, $\lim\limits_{a} f \geq f(c) > f(d) \geq \lim\limits_{b} f$,*

où les inégalités larges provenant à chaque fois du théorème de la limite monotone.
Cela contredit directement l'hypothèse $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f$, et conclut.

Exercice 42. Un exo de l'X ! *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \Longrightarrow f([a, b]) \text{ est un segment de longueur } b - a.$$

Indication : *prouver d'abord qu'une telle fonction est continue, puis injective, puis utiliser l'exercice 38, puis conclure !*

Correction. *Soit f une telle fonction.*

- *La fonction $\boxed{f \text{ est continue}}$, car f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'elle vérifie :*

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

  En effet, pour $x < y$, les réels $f(x)$ et $f(y)$ sont dans $f([x, y])$, qui est un segment de longueur $y - x$.

- *Montrons que $\boxed{f \text{ est injective}}$, par l'absurde.*

  Supposons qu'il existe $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$.

  Appliquons le théorème des bornes atteintes sur le segment $[a, b]$.

  Alors il existe x_m et x_M tel que $f([a, b]) = [f(x_m), f(x_M)]$.

  Ce même théorème appliqué sur $[\overset{\frown}{x_m, x_M}]$ fournit $f([\overset{\frown}{x_m, x_M}]) = [f(x_m), f(x_M)]$.

  Par ailleurs, le TVI fournit l'inclusion $[f(x_m), f(x_M)] \subset f([x_m, x_M])$.

  On tire $f([a, b]) = f([\overset{\frown}{x_m, x_M}])$.

  D'après l'hypothèse faite sur f, on tire

  $$b - a = |x_m - x_M|.$$

  Ainsi, $x_m \in \{a, b\}$ et x_M est alors "l'autre".

  Comme $f(a) = f(b)$, on tire $f(x_m) = f(x_M)$.

  Donc $\min f = \max f$, donc f est constante sur $[a, b]$.

  Donc $f([a, b])$ est un singleton donc un segment de longueur $0 \neq b - a > 0$: contradiction !

- *Ainsi, f est injective et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est strictement monotone}}$ (lemme/exercice 38). Distinguons deux cas.*

  Cas f strictement croissante.

  Soit $x > 0$. Par croissance et continuité, on obtient $f([0, x]) = [f(0), f(x)]$.

  Avec l'hypothèse, on a donc $f(x) - f(0) = x - 0$, donc $f(x) = x + f(0)$.

  Cela fonctionne aussi pour $x < 0$ (on fait la même chose sur le segment $[x, 0]$) et $x = 0$ (immédiat).

  Cas f strictement décroissante. *On pose $g = -f$ qui est alors strictement croissante, et vérifie la même propriété que f (pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $-I$ est un intervalle de même longueur).*

  En appliquant le cas précédent, on trouve $g : x \mapsto x + g(0)$, d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ (-f)(x) = x + (-f)(0)$.

  Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + f(0)$.

Réciproquement, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto x+\beta$ et $x \mapsto -x+\beta$ sont solutions.
Conclusion. $\boxed{\text{Les fonctions cherchées sont les } x \mapsto x+\beta \text{ et } x \mapsto -x+\beta, \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}}$.

Exercice 43. Bijection réciproque. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.*

1. *Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, P_λ a une unique racine réelle, notée $u(\lambda)$, et que $u(\lambda) \in]0,1]$.*
2. *Montrer que l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to &]0,1] \\ \lambda & \mapsto & u(\lambda) \end{array}$ est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}_+$.*

   Indication : *on pourra déterminer u^{-1}.*
3. *Calculer la limite de u en $+\infty$.*

Correction.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. La fonction P_λ est une fonction polynomiale de degré impair donc s'annule sur $\mathbb{R}$.*
La fonction P_λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc s'annule une seule fois, en $u(\lambda)$.
De plus, $P_\lambda(0) = -1 < 0$ et $P_\lambda(1) = \lambda \geq 0$, donc $\boxed{0 < u(\lambda) \leq 1}$.

2. **Méthode 1.** *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in]0,1]$. On a :*
$$u(\lambda) = x \iff P_\lambda(x) = 0 \iff x^3 + \lambda x - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1-x^3}{x} = \frac{1}{x} - x^2,$$
car $x \neq 0$. De plus, pour tout $x \in]0,1]$, $\frac{1-x^3}{x} \in \mathbb{R}_+$ donc convient.
Cela montre que tout élément $x \in]0,1]$ admet un unique antécédent par u dans $\mathbb{R}_+$ donc u est bijective et $u^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} - x^2 \end{array}$.
On observe que u^{-1} est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$ (en tant que somme de deux fonctions usuelles strictement décroissantes sur $]0,1]$) donc par théorème sa bijection réciproque $\boxed{(u^{-1})^{-1} \text{ i.e. } u \text{ est strictement décroissante et continue sur } \mathbb{R}_+}$.
Méthode 2. *Montrer que $u(\mathbb{R}_+) =]0,1]$ par double inclusion (direct d'après la question 1, et réciproque qui s'obtient en montrant que u est surjective (comme dans la méthode 1...).*
• *Par ailleurs, on peut montrer (preuve directe) que u est strictement décroissante.*
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\alpha < \beta$. Montrons que $u(\alpha) > u(\beta)$.
On a : $\forall x \in]0,1]$, $\alpha x < \beta x$, donc $P_\alpha(x) < P_\beta(x)$. En particulier, pour $x = u(\alpha)$, on a $P_\alpha(u(\alpha)) < P_\beta(u(\alpha))$. Or, $P_\alpha(u(\alpha)) = 0 = P_\beta(u(\beta))$, donc
$$P_\beta(u(\beta)) < P_\beta(u(\alpha)).$$
Puisque la fonction P_β est croissante, on en déduit que $u(\beta) < u(\alpha)$.
Ainsi, $\boxed{u \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.
• *En particulier, u est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et $u(\mathbb{R}_+)$ (qui est $]0,1]$) est un intervalle, donc d'après un lemme du cours, donc $\boxed{u \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.*
Méthode 1 bis. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*
Par définition de $u(\lambda)$, on a $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$, et par ailleurs $u(\lambda) \neq 0$ donc $\frac{1}{u(\lambda)} - u(\lambda)^2 = \lambda$.
En notant $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} - x^2 \end{array}$, on a : $f(u(\lambda)) = \lambda$, cela pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, donc $f \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ $(*)$.

Or, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$, donc f est bijective de $]0,1]$ sur $f(]0,1]) = [f(1), \lim\limits_0 f[= [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$. On dispose donc de $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to]0,1]$

En composant $(*)$ à gauche par f^{-1}, il vient $\boxed{u = f^{-1}}$.
En tant que bijection réciproque de la fonction f (continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$), on sait d'après le théorème de continuité d'une bijection réciproque, que la fonction $\boxed{u \text{ est continue et strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3. *La fonction $u = f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to]0,1]$ est une bijection continue strictement décroissante, donc d'après le TBM*

$$]0,1] = u([0,+\infty[) =]\lim_{+\infty} u, u(0)],$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = 0}$.
Sinon : *puisque u est décroissante sur $]0,1]$, on sait d'après le TLM que $\lim\limits_0 u$ existe et vaut $\inf\limits_{]0,1]} u = \inf u(]0,1])$. Or u est surjective, donc $u(]0,1]) = \mathbb{R}_+$ d'où $\boxed{\lim\limits_0 u = \inf \mathbb{R}_+ = 0}$.*