Lien avec d'autres chapitres

Exercice 1. *Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Correction.

- *Soit* $P = a_{2p+1}X^{2p+1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_{2p+1} \neq 0$. *On note f sa fonction polynomiale associée. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer* $a_{2p+1} > 0$, *donc* $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et* $0 \in]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$ *donc d'après le TVIG, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire* $\boxed{P \text{ admet (au moins) une racine réelle}}$.

Exercice 2. *On considère le polynôme* $P = X^3 + 3X + 1$.

1. *Montrer que P a une unique racine dans $\mathbb{R}$, que l'on notera ω.*
2. *Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.*

Correction.

1. *Soit $f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$ la fonction polynomiale associée à P. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 3x^2 + 3 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective donc 0 admet au plus un antécédent par f.*
   Par ailleurs, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. *Donc* $0 \in]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$, *et* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *donc d'après le TVIG, 0 admet au moins un antécédent par f.*
   Ainsi, f s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$ (en ω), donc P admet une unique racine réelle.
2. *Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\omega \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\omega = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.*
   Ainsi $\left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + 3\dfrac{p}{q} + 1 = 0$. *En multipliant par q^3, on trouve :* $p^3 + 3pq^2 + q^3 = 0$.
   D'où $p | -(p^3 + 3pq^2)$ *donc* $p | q^3$.

   Rédaction 1. *On a $p|p$ et $p|q^3$, donc $p|(p \wedge q^3)$.*
   Or, $p \wedge q = 1$, donc $p \wedge q^3 = 1$, d'où $p|1$.

   Rédaction 2. *$p|(p \times p^2)$ et $p \wedge q = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $p|q^2$.*
   De même, $p|(q \times q)$ et $p \wedge q = 1$ donc, encore d'après le lemme de Gauss, $p|q$ et comme $p \wedge q = 1$, on en déduit que $p|1$ (soit encore par lemme de Gauss, soit en disant que $p|p$ et $p|q$ donc $p|p \wedge q$.

   Dans tous les cas, $p|1$ donc $p \in \{\pm 1\}$.
   De même, $q|1$ donc $q \in \{\pm 1\}$.
   Ainsi, $\omega \in \{\pm 1\}$.
   Or, 1 et -1 ne sont pas racine de P donc $\boxed{\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Exercice 3. Polynômes de Tchebychev (1821-1894). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer*

$$\exists ! T_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x).$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n. Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.

Unicité. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $T_n, U_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) = \cos(nx) = U_n(\cos x)$. L'application $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ étant surjective, on a : $\forall y \in [-1,1],\ T_n(y) = U_n(y)$. Les polynômes T_n et U_n coïncident sur un ensemble infini donc sont égaux (le polynôme différence a une infinité de racines donc il est nul).*

Existence. *Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les formules de Moivre et Newton, on obtient :*

$$T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (X^2-1)^p X^{n-2p}.$$

Degré. *$\forall p,\ (X^2-1)^p X^{n-2p}$ est unitaire de degré n, donc $\deg(T_n) \leq n$ et le coefficient devant X^n de T_n est $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$. Notons $i_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$. Alors on a*

$$p_n + i_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } p_n - i_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}.$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n + i_n = 2^n$ et $p_n - i_n = 0$ donc $p_n = 2^{n-1}$, et sinon $p_0 = 1$. Dans tous les cas, $p_n \neq 0$ donc $\boxed{\deg(T_n) = n}$ et $\boxed{\text{le coefficient dominant de } T_n \text{ vaut } \begin{cases} 2^{n-1} \text{ si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}}$.

Application. *On a $\cos(0) = 1 = T_0(\cos)$, $\cos(x) = T_1(\cos)$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = T_2(\cos x)$, $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$. Pour $n = 3$, on utilise des formules trigonométriques ou bien la formule explicite où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 1$, donc $p \in \{0,1\}$ (d'où deux termes dans la somme) : $T_3 = \binom{3}{0} \times 1 \times X^3 + \binom{3}{2}(X^2-1)X = (1+3)X^3 - 3X$. D'où $\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1,\ T_3 = 4X^3 - 3X,\ T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.*

Exercice 4. Vrai ou faux : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?*

a. *l'ensemble des polynômes de degré n ;*

b. *l'ensemble des polynômes admettant 0 et 1 comme racines ;*

c. *l'ensemble des polynômes admettant au moins deux racines ;*

d. $\{PQ \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$ *;*

e. $\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists R \in \mathbb{R}[X] : QR = P\}$.

Correction.

a. ***Non.*** *Le polynôme nul n'est pas de degré n.*

b. ***Oui.*** *Vérifions les deux axiomes.*

- *Le polynôme nul admet 0 et 1 comme racines (entre autres).*
- *Soient P et Q deux polynômes possédant 0 et 1 comme racines, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors*

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0,$$

donc $\lambda P + Q$ admet 0 comme racine. On procède de la même façon pour 1.

c. ***Non.*** *Les polynômes $-X^2 + X$ et $X^2 - X - 1$ ont tous les deux exactement deux racines (0 et 1 pour le premier, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ pour le second), mais leur somme, 1, n'a pas de racine.*

d. ***Oui.*** *Vérifions les trois axiomes.*

- *On a $0 = P \times 0$, donc le polynôme nul appartient à E.*
- *Notons E l'ensemble de l'énoncé.*
  Soient $(R_1, R_2) \in E^2$et$\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc trouver $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $R_1 = PQ_1$ et $R_2 = PQ_2$. On a alors

$$\lambda R_1 + R_2 = P(\lambda Q_1 + Q_2),$$

donc $\lambda R_1 + R_2 \in E$.

e. ***Non si $P \neq 0$.*** *Il suffit de constater que, dans ce cas, le polynôme nul n'appartient pas à l'ensemble de l'énoncé.*

Oui si $P = 0$. *Il suffit de constater que*

$$\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists R \in \mathbb{R}[X] : QR = 0\} = \mathbb{R}[X]$$

(le candidat $R = 0$ convient).

Exercice 5. Bases de $\mathbb{K}_2[X]$. *Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{K}_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de $P = X^2 + X + 1$ dans cette base.*

a. $(1, X-1, (X-1))^2$; *b.* $(X^2+X, X^2+1, X+1)$; *c.* $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$.

Correction. *Il s'agit bien de trois familles de polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$.*

a. • *Cette famille de vecteurs est échelonnée au sens fort, c'est-à-dire composée de trois polynômes de degrés 0, 1 et 2, respectivement, donc il s'agit d'une famille libre. De plus, d'après la formule de Taylor en 1, cette famille est également génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$, donc une* $\boxed{\text{base de } \mathbb{K}_2[X]}$.

• *Encore d'après la formule de Taylor,* $\boxed{\text{les coordonnées du polynôme } P \text{ dans cette base sont } (P(1), P'(1), P''(1)/2), \text{ d'où } (3,3,1)}$.

b. *Notons $(P_1, P_2, P_3) = (X^2+X, X^2+1, X+1)$.*

• *Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ revient à montrer que tout polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ s'écrit de manière unique comme CL des vecteurs (P_1, P_2, P_3) ; autrement dit, que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{K}^3,\ \exists! (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \mid \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = aX^2 + bX + c$, c'est-à-dire (en utilisant la définition de (P_1, P_2, P_3) et la liberté de $(1, X, X^2)$) que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que*

$$(S)\begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda + \nu = b \\ \mu + \nu = c. \end{cases} \qquad (\star)$$

Fixons $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, et résolvons le système précédent d'inconnues (λ, μ, ν).
On a :

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda + \nu = b \\ \lambda + \mu = a \\ \mu + \nu = c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \nu = b \\ \mu - \nu = a - b \\ \mu + \nu = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \nu = b \\ \mu = \frac{1}{2}(a-b+c) \\ \nu = \frac{1}{2}(-a+b+c) \end{cases}$$

(les deux dernières équations sont un système somme/produit)

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(-a-b+c) \\ \mu = \frac{1}{2}(a-b+c) \\ \nu = \frac{1}{2}(-a+b+c). \end{cases}$$

Remarque. *En notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système, on vient de montrer que A est inversible, puisque tout système avec second membre admet une unique solution.*

En notant $\varphi_A : X \mapsto AX$ l'application linéaire canoniquement associée à A, on a aussi montré que φ_A est bijective/un isomorphisme.

- *En appliquant notre résolution de système linéaire $(\star)$ dans le cas particulier où $a = b = c = 1$ (ou en trouvant les solutions « à l'œil »), on obtient la décomposition*

$$1 + X + X^2 = \frac{1}{2}(X^2 + X) + \frac{1}{2}(X^2 + 1) + \frac{1}{2}(X + 1),$$

donc $\boxed{\text{les coordonnées de } X^2 + X + 1 \text{ dans la base } (P_1, P_2, P_3) \text{ sont } (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}$.

c. *On procède comme à la question précédente : le système $(\star)$ est remplacé par*

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = a \\ -2\lambda + 2\nu = b \\ \lambda + \nu = c, \end{cases}$$

qui admet comme unique solution

$$\begin{cases} \lambda = c/2 - b/4 \\ \mu = c - a \\ \nu = c/2 + b/4. \end{cases}$$

On en déduit que la famille $\boxed{((X-1)^2, X^2, (X+1)^2) \text{ est une base de } \mathbb{K}_2[X]}$, *et la résolution du système dans le cas particulier où $a = b = c = 1$ donne la décomposition*

$$1 + X + X^2 = \frac{3}{4}(X+1)^2 + \frac{1}{4}(X-1)^2,$$

ce qui montre que $\boxed{\text{les coordonnées de } X^2 + X + 1 \text{ forment le vecteur } (1/4, 0, 3/4)}$.

Remarque. *En notant* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on vient de montrer que* $\boxed{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$.

Exercice 6. Une base échelonnée. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Correction. *Soit $k \in [\![0, n]\!]$.*
On a

$$\begin{aligned} P_k &= (X+1)^{k+1} - X^{k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} X^\ell 1^{k+1-\ell} - X^{k+1} && \textit{(binôme de Newton)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} X^\ell + X^{k+1} - X^{k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} X^\ell. \end{aligned}$$

Cette écriture (comme combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^{k-1}, X^k$) montre déjà directement l'inégalité $\deg P_k \leq k$ et assure que $\underline{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une famille de polynômes de } \mathbb{K}_n[X]}$.
Par ailleurs, le coefficient de degré k de P_k est $\binom{k+1}{k} = \binom{k+1}{1} = k+1$, qui est non nul, donc on en déduit l'égalité $\boxed{\deg P_k = k}$.

Conclusion 1. *La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc échelonnée en degré, et vérifie $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$, donc $\underline{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une famille libre de polynômes de } \mathbb{K}_n[X]}$.*
Quand on aura fait la dimension, on conclura directement en disant que $\mathrm{Card}(P_0, P_1, \dots, P_n) = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ donc $\boxed{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X]}$.

Conclusion 2. *En attendant l'argument de dimension, on peut justifier directement que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, en procédant comme dans l'exercice précédent, i.e. en se ramenant à la résolution d'un système $(n+1) \times (n+1)$, i.e. à l'étude de l'inversibilité de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ & & 3 & & * \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & n+1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est obtenue, en remarquant que :

- *le coefficient constant de chaque P_k vaut 1 (pour $\ell = 0$), ce qui donne la première ligne de la matrice ;*
- *$\deg(P_k) = k$ et son coefficient dominant vaut k, ce qui donne la diagonale de la matrice ;*
- *le terme en X est obtenu par des contributions dans $P_2, \dots, P_n$ (pour $\ell = 1$), ce qui donne la deuxième ligne de la matrice.*

Cette matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale, donc inversible.

Cela montre que $\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X]}$.

Exercice 7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.
Notons $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

On pourra commencer par rendre plus concrète la définition du premier sous-espace vectoriel, en le réécrivant par exemple comme un sous-espace vectoriel engendré par une (petite) famille.

Correction.

- *Tout d'abord, F et G sont bien deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.*

  On commence par rendre plus concrète la définition de F, par analyse et synthèse.

  Analyse. *Soit $P \in F$, que l'on suppose non nul.*
  On a $\deg P(X^2) = \deg(P \circ X^2) = 2\deg P$ (car X^2 n'est pas constant) et $\deg(X^2P(X)) = 2 + \deg P$.
  L'égalité entre ces deux polynômes donne $2 + \deg P = 2\deg P$, donc $\deg P = 2$.
  Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

  $$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$$
  $$X^2P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2.$$

  Par liberté de la base canonique, on en déduit $c = b = 0$.
  Ainsi, $P = aX^2$.
  En réintégrant le cas du polynôme nul, on voit donc que tout élément de F est de la forme aX^2, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

  Synthèse. *Réciproquement, on vérifie directement que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, le polynôme aX^2 appartient à F.*

  On a donc montré

  $$\boxed{F = \{aX^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(X^2\right)},$$

  ce qui donne au passage une preuve immédiate du fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

- *Montrons maintenant que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.*

  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On va montrer, par analyse et synthèse, que P se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

  Analyse. *Soient $Q_F \in F$ et $Q_G \in G$ tels que $P = Q_F + Q_G$.*
  Comme $Q_F \in F = \mathrm{Vect}\left(X^2\right)$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q_F = \lambda X^2$.
  On a donc $Q_G = P - \lambda X^2$. Comme $Q_G \in G$, on doit avoir $Q_G(1) = Q_G(2)$, d'où l'on tire

  $$P(1) - \lambda = P(2) - 4\lambda \qquad \text{donc} \qquad \lambda = \frac{P(2) - P(1)}{3}.$$

Ainsi,

$$Q_F = \frac{P(2)-P(1)}{3}X^2 \qquad \text{et} \qquad Q_G = P - \frac{P(2)-P(1)}{3}X^2.$$

Synthèse. *Réciproquement, posons* $Q_F = \frac{P(2)-P(1)}{3}X^2$ *et* $Q_G = P - \frac{P(2)-P(1)}{3}X^2$.

- *Il est déjà immédiatement clair que* $P = Q_F + Q_G$.
- *L'expression de* Q_F *montre immédiatement que* $Q_F \in \mathrm{Vect}\left(X^2\right) = F$.
- *Comme* P *et* Q_F *appartiennent à* $\mathbb{R}_3[X]$, *on a* $Q_G \in \mathbb{R}_3[X]$ *par stabilité par combinaison linéaire.*
  Par ailleurs,

  $$Q_G(2) - Q_G(1) = P(2) - P(1) - \frac{P(2)-P(1)}{3}\left(2^2 - 1^2\right) = 0,$$

  donc $Q_G(1) = Q_G(2)$, *ce qui montre* $Q_G \in G$.

Cela conclut la preuve : $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]}$.

Coefficients, degré, racine

Exercice 8. Degré, coefficient dominant. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer rapidement le degré, le coefficient dominant et coefficient constant de* $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Correction. *D'après la formule du binôme, on a*

$$(X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \cdots + \cdots + nX + 1$$

et

$$(X-1)^n = X^n - nX^{n-1} + \cdots + \cdots + n(-1)^{n-1}X + (-1)^n,$$

donc

$$P = 2nX^{n-1} + \cdots + (1 - (-1)^n).$$

On en déduit donc que $\boxed{P \text{ est de degré } n-1, \text{ que son coefficient dominant est } 2n}$, *et que* $\boxed{\text{son coefficient constant vaut } 1-(-1)^n \text{ (c'est-à-dire 0 si } n \text{ est pair et 2 si } n \text{ est impair)}}$.

Exercice 9. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En considérant* $(X^2-1)^{2n}$, *montrer que*

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Correction. *On a l'égalité* $(X^2-1)^{2n} = (X-1)^{2n}(X+1)^{2n}$.
D'une part, le coefficient en X^{2n} *du polynôme* $(X^2-1)^{2n}$ *est*

$$\binom{2n}{n}(-1)^n.$$

D'autre part, le coefficient en X^{2n} du polynôme $(X-1)^{2n}(X+1)^{2n}$ est

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=2n}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}(-1)^j \\
&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-k}(-1)^k \\
&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}^2(-1)^k && \text{par symétrie du coefficient binomial.}
\end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 10. Fonction non polynomiale. *Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=\overline{z}$.*

Correction. *Supposons qu'il existe un tel polynôme P.*
Méthode 1. *En particulier : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=x$. Donc $P=X$ (puisque le polynôme $P-X$ admet une infinité de racines). Or le polynôme X n'est pas solution du problème (car par exemple $P(i)=i\neq\overline{i}$), donc $\boxed{\text{il n'existe pas de tel polynôme}}$.*
Méthode 2. *On remarque que 0 est la seule racine de P et que $P\neq 0$ car $P(1)=1$, donc P est scindé sous la forme $P=\lambda X^n$, avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.*
$P(1)=1$ implique $\lambda=1$, donc $P=X^n$, et $P(2)=2$ implique $n=1$, donc $P=X$.
Ainsi, $P(i)=i$, ce qui contredit l'hypothèse ($P(i)=-i$).

Exercice 11. Fonctions non polynomiales. *Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,*

(i) $P(k)=\frac{1}{k}$ *(ii)* $P(k)=\sqrt{k^2+1}$

Correction.

(i) *Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(k)=\dfrac{1}{k}$.*
Le polynôme $\underline{Q=XP}$ vérifie alors $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ Q(k)=1$.
Autrement dit, les polynômes Q et 1 coïncident en une infinité de points. D'où $Q=1$.
On a donc montré $XP=1$, ce qui est absurde (par exemple, en évaluant en 0, on trouve $1=0$).

(ii) *Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(k)=\sqrt{k^2+1}$.*
Le polynôme $\underline{Q=P^2}$ vérifie alors

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ Q(k)=k^2+1.$$

Autrement dit, les polynômes Q et X^2+1 coïncident en une infinité de points.
D'où $Q=X^2+1$.

On a donc montré $P^2 = X^2 + 1$.
Montrons que cela est absurde.
Méthode 1. *En passant au degré, on obtient $2 \deg P = 2$, donc $\deg P = 1$.*
Comme tout polynôme réel de degré 1 possède une racine réelle, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 1$. En évaluant en x_0 l'égalité $P^2 = X^2 + 1$, on trouve

$$\underbrace{P(x_0)^2}_{=0} = x_0^2 + 1.$$

Or $x_0^2 + 1 > 0$ donc est non nul, d'où la contradiction.
Méthode 2. *$X^2 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$, donc P^2 aussi. Or, $P^2 = P \times P$ donc $P \in \mathbb{K}^*$. Or, les polynômes constants ne vérifient pas $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(k) = \sqrt{k^2+1}$. Il n'existe donc pas de solution.*

Exercice 12. Le logarithme n'est pas un polynôme. *Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que* $\quad \exists\, A > 0,\ \forall\, x \geq A,\ P(x) = \ln(x)$.

Correction. *Supposons qu'un tel polynôme P existe.*
Ainsi, il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geq A,\ P(x) = \ln(x)$.
La clé de la preuve est de constater que le logarithme vérifie l'équation différentielle $xy' = 1$.
En particulier,

$$\forall\, x \geq A,\ x \ln'(x) = 1$$

Ainsi,

$$\forall\, x \geq A,\ xP'(x) = 1$$

On en déduit que les polynômes XP' et 1 coïncident sur un ensemble infini à savoir $[A, +\infty[$.
Donc ils sont égaux.
À cet instant, on a donc $XP' = 1$. En passant au degré, on en déduit que nécessairement $1 + \deg P' = 0$.
Or l'équation $1 + d = 0$ n'a pas de solution $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. D'où l'absurdité.

Autre solution. *Exploiter le fait que $\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour obtenir $P(X^2) = 2P(X)$, d'où $2 \deg P = \deg P$, d'où P est constant. Mais la fonction $\ln$ n'est pas constante !*

Exercice 13. Coefficients complexes ou réels ? *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel. Montrer que P est à coefficients réels.*

Considérer le polynôme $\overline{P}$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P.

Correction. *On écrit le polynôme sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où a priori, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Cela permet de définir le polynôme conjugué $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X]$.*
On voit directement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} t^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} = \overline{P(t)}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$, on a automatiquement $P(\alpha) = \overline{P}(\alpha)$. L'hypothèse de l'énoncé *entraîne donc que P et $\overline{P}$ coïncident sur un ensemble infini (c'est-à-dire que leur différence $P - \overline{P}$ possède une infinité de racines, donc est nul), c'est-à-dire que $P = \overline{P}$. Par unicité des coefficients de P, on obtient $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \overline{a_k} = a_k$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R}$, d'où $\boxed{P \in \mathbb{R}[X]}$.*

Exercice 14. Polynômes pairs et impairs. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est pair si $P(-X) = P(X)$, et que P est impair, si $P(-X) = -P(X)$.*

1. *Montrer que P est pair ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q(X^2)$.*
2. *Trouver une condition similaire pour caractériser les polynômes impairs.*

Correction.

1. *Si $P = 0$ alors $Q = 0$ convient. Supposons désormais $P \neq 0$ et écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et $\forall k,\ a_k \in \mathbb{K}$.*

$$\begin{aligned} P \text{ pair} &\iff P(-X) = P(X) \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k \\ &\iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ k \text{ impair} \Rightarrow a_k = 0. \end{aligned}$$

   Si P est pair, alors $P = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} X^{2i} = Q(X^2)$, avec $Q = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} X^i$.
   Réciproquement, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$, alors il est clair que $P(-X) = P(X)$, donc P est pair.

2. *On conjecture et on montrerait de même que P est impair ssi tous ses coefficients d'indices pairs sont nuls ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = XQ(X^2)$.*
   Remarque : le polynôme nul est impair.

Exercice 15. Une factorisation guidée. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$, que l'on souhaite factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.*

1. *Déterminer le degré et le coefficient dominant de P.*
2. *Déterminer toutes les racines de P.*
3. *Justifier que P possède $n-1$ racines distinctes.*
4. *Déduire de ce qui précède la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.*

Correction.

1. *D'après la formule du binôme, on a*

$$\begin{aligned}(X+i)^n - (X-i)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^{n-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} \left(1 - (-1)^{n-k}\right) X^k.\end{aligned}$$

Le coefficient devant X^n est $\binom{n}{n} i^{n-n} \left(1 - (-1)^{n-n}\right) = 0$ donc P est de degré au plus $n-1$.

De plus, le coefficient devant X^{n-1} est $\binom{n}{n-1} i^{n-(n-1)} \left(1 - (-1)^{n-(n-1)}\right) = 2ni \neq 0$. On en déduit donc que $\boxed{P \text{ est de degré } n-1 \text{ et que son coefficient dominant est } 2ni}$.

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a :*

$$\begin{aligned}
P(\alpha) = 0 &\iff (\alpha+i)^n = (\alpha-i)^n \\
&\iff \left(\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\right)^n = 1 && \alpha \neq i \text{ car } P(i) \neq 0 \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid (\alpha+i) = (\alpha-i)\, e^{\frac{2ik\pi}{n}} && \alpha \neq i \text{ car } 2i \neq 0 \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \mid \alpha\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \alpha = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} && \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1 \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \alpha = -i\frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = -i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \alpha = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Attention *: ici, $0 < k < n$ donc $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$ mais $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = \frac{n}{2}$, donc ne pas utiliser $\tan$!*

3. *Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, notons $\alpha_k := \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ les racines de P et vérifions qu'elles sont distinctes.*
   Méthode 1. *Soit $(k, \ell) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tel que $\alpha_k = \alpha_\ell$.*
   Alors $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$ d'où $\sin\left(\frac{(k-\ell)\pi}{n}\right) = 0$ d'où $\frac{(k-\ell)\pi}{n} \in \pi\mathbb{Z}$ puis $\frac{k-\ell}{n} \in \mathbb{Z}$.
   Puisque $0 < k, \ell < n$, on a : $-1 < \frac{k-\ell}{n} < 1$. Or, le seul entier dans $]-1, 1[$ est 0 donc $k = \ell$.
   Ainsi, $\boxed{\text{les } (\alpha_k)_{1 \leq k \leq n-1} \text{ sont deux à deux distincts}}$.
   Méthode 2. *Lorsque k décrit l'intervalle d'entiers $[\![1, n-1]\!]$ les réels $\dfrac{k\pi}{n}$ sont $n-1$ nombres deux à deux distincts de l'intervalle $]0, \pi[$.*
   La fonction cotan est dérivable sur $]0, \pi[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{cotan}'(x) = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} < 0$. Par suite la fonction cotan est strictement décroissante, donc injective, sur cet intervalle et les réels $\operatorname{cotan} \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ sont deux à deux distincts.

4. *Le polynôme P est de degré $n-1$ et possède $n-1$ racines distinctes, donc $\underline{P \text{ est scindé à racines simples}}$ et sa factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est : $\boxed{P = 2ni \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.*

Exercice 16. Polynômes de Lagrange (1736-1813). *Dans tout l'exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et n scalaires $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ <u>distincts</u>.*

Étant donnés des réels $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ quelconques, un problème de l'interpolation consiste à construire des fonctions $f : [x_1, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il existe bien sûr beaucoup de telles fonctions f, on peut par exemple en construire une en reliant linéairement les points de coordonnées $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. La méthode d'interpolation de Lagrange étudiée dans ce paragraphe est une autre approche du même problème.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$. Rq : L_i est scindé à racines simples.

Les polynômes $L_1, \ldots, L_n$ sont appelés les **polynômes de Lagrange** *de $x_1, \ldots, x_n$.*

Par exemple, pour $n = 3$: $L_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $L_2 = \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$ et $L_3 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

1. *Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, préciser le degré, le coefficient dominant et les racines de L_i.*
2. *Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $L_i(x_j)$.*
3. *Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ quelconque.*
   (a) *Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ prenant la valeur y_i en x_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

(b) *En déduire que* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$ *est un isomorphisme et préciser sa bijection réciproque.*

(c) *Montrer que les polynômes* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tels que pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ *sont exactement tous les polynômes de la forme* $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i + \left(\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)\right) Q$, *avec* $Q \in \mathbb{K}[X]$.

4. **Application.** *Soit* $f : x \mapsto \sin \frac{x\pi}{2}$. *Déterminer l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de* f *(de degré ...) aux points* $0, 1, 2, 3, 4$.

Correction.

1. *Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, L_i *étant écrit sous forme factorisée, on lit immédiatement que son degré est* $n-1$, *son coefficient dominant est* $\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{1}{x_i - x_k}$, *et ses racines sont* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *(sauf* x_i*).*

2. *Pour tout* $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

3. (a) **Existence.** *Posons* $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$. *Par définition,* $L_1, \ldots, L_n$ *sont de degrés* $n-1$, *donc* P *est de degré inférieur ou égal à* $n-1$.
Ensuite, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{i,j} = y_j$, *donc* P *convient.*
Unicité. *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *tels que pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i) = y_i$.
Le polynôme $P - Q$ *admet* $x_1, \ldots, x_n$ *pour racines, donc au moins* n *racines comptées avec multiplicité. Comme* $\deg(P - Q) \leqslant n - 1$, *on a* $P - Q = 0$ *donc* $P = Q$.

(b) φ *est clairement linéaire. La question précédente montre exactement que tout* $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ *admet un unique antécédent par* φ, *qui est* $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$. *Ainsi,* φ *est bijective, donc un isomorphisme, et* $\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} y_i L_i \end{array}$.

(c) *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$, *on a*

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, n]\!],\ P(x_j) = y_j &\iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ P(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i L_i\right)(x_j) \\ &\iff P - \sum_{i=1}^{n} y_i L_i \text{ admet } x_1, \ldots, x_n \text{ pour racines distinctes} \\ &\iff \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \text{ divise } \left(P - \sum_{i=1}^{n} y_i L_i\right) \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid P - \sum_{i=1}^{n} y_i L_i = \left(\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)\right) Q. \end{aligned}$$

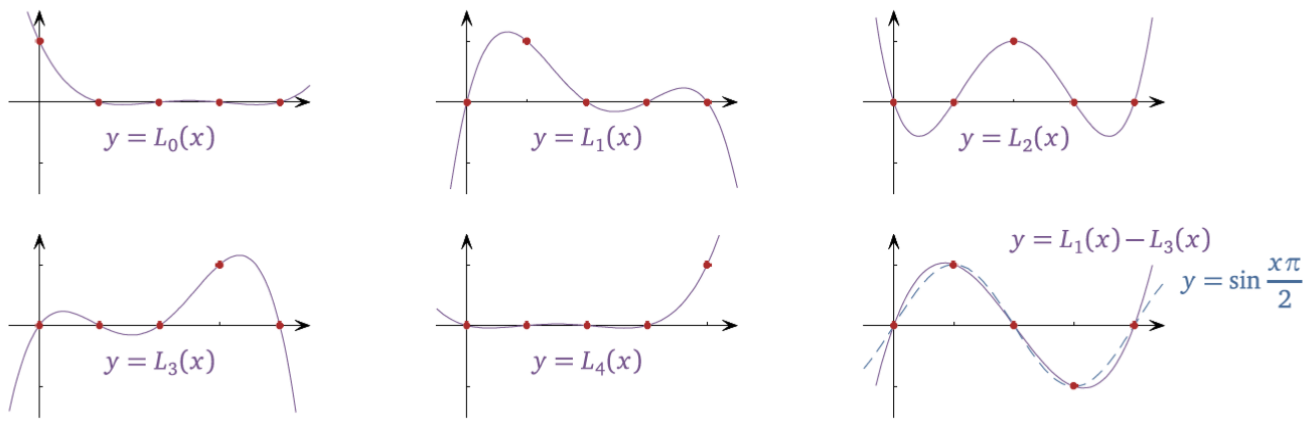
4. **Application.** $f : x \mapsto \sin \frac{x\pi}{2}$. *Remarquons que* $f(0) = f(2) = f(4) = 0$, $f(1) = 1$ *et* $f(3) = -1$. *Notons ensuite* $L_0, \ldots, L_4$ *les cinq polynômes de Lagrange de* $0, \ldots, 4$. *L'unique polynôme de degré* ≤ 4 *qui interpole* f *aux points* $0, \ldots, 4$, *est alors en vertu du théorème précédent le polynôme* $R = \sum_{i=0}^{4} f(i) L_i = L_1 - L_3$. *Or,*

$$L_1 = -\frac{X(X-2)(X-3)(X-4)}{6} \quad \text{et} \quad L_3 = -\frac{X(X-1)(X-2)(X-4)}{6},$$

donc

$$L_1 - L_3 = -\frac{X(X-2)(X-3)(X-4)}{6} + \frac{X(X-1)(X-2)(X-4)}{6} = \boxed{\frac{X(X-2)(X-4)}{3}}.$$

Attention : interpolation $\neq$ *approximation car* f *est bornée et pourtant* $\lim_{x \to \pm\infty} R(x) = \pm\infty$.



Exercice 17. Astucieux. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est de degré $n \in \mathbb{N}$ et que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Montrer que $P(-1) = n+1$.*

Étudier le polynôme $XP - 1$.

Correction.

- *Analyse des hypothèses : Le polynôme $XP - 1$ admet $1, 2, \dots, n+1$ pour racines, soit déjà $n+1$ racines distinctes. Or, $XP - 1$ est de degré $n+1$ donc : $XP - 1 = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*
  Évaluons en 0 pour calculer le coefficient dominant de $XP-1$: $-1 = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(-k) = \lambda(-1)^{n+1}(n+1)!$ donc $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Enfin : $\boxed{XP = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)}$.

- *Calcul de $P(-1)$: en évaluant la relation précédente en -1, il vient : $-P(-1) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(-(k+1)) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(-1)^{n+1}(n+2)! = 1-(n+2) = -(n+1)$ donc $\boxed{P(-1) = n+1}$.*

Équations

Exercice 18. Équations. *Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :*

1. $P(2X) = P(X) - 1$
2. $\exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q^2 = XP^2$
3. $P \circ P = P$
4. $P' = P$
5. $(P')^2 = 4P$.

Correction.

1. *Soit P tel que $P(2X) = P(X) - 1$. En évaluant en 0, on obtient $P(0) = P(0) - 1$, d'où $0 = -1$. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc vide}}$.*

2. • *Le polynôme nul satisfait la condition.*
   • *Soit P un polynôme non nul vérifiant la condition de l'énoncé. On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ (nécessairement non nul, car P l'est) tel que $Q^2 = XP^2$. En passant au degré, on obtient $2\deg Q = 1 + 2\deg P$. On obtient une égalité entre un nombre pair et un nombre impair, ce qui est contradictoire. Ainsi, les polynômes non nuls ne sont pas solution.*
   Ainsi $\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ Q^2 = XP^2\} = \{0\}}$.

3. *Procédons par analyse et synthèse.*

   Analyse. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \circ P = P$.*
   Si P n'est pas constant, on a $\deg P = \deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, ce qui entraîne $\deg P = 0$ ou $\deg P = 1$. Dans tous les cas, on a donc $\deg P \leq 1$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}$ tel que $P = aX+b$. On a alors $P \circ P = a(aX+b)+b = a^2X+ab+b$.
L'égalité $P \circ P = P$ entraîne donc $\begin{cases} a^2 = a \\ ab+b = b \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$, donc P est constant ou $P = X$.

Synthèse. *Réciproquement, il est clair que les polynômes constants et le polynôme X satisfont aux hypothèses.*

Bilan. $\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P \circ P = P\} = \mathbb{K}_0[X] \cup \{X\}}$.

4. *Si $\deg P \geq 1$, on sait que $\deg P' = \deg P - 1$, ce qui entraîne $P \neq P'$.*
Si $\deg P \leq 0$, on a $P' = 0$, donc P ne peut être égal à P' que si $P = 0$.
Ainsi, $\boxed{\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P = P'\right\} = \{0\}}$.

5.
- *Soit P un polynôme solution.*
Si P est non constant, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$, et en passant au degré dans $(P')^2 = 4P$, on obtient : $2(\deg(P)-1) = \deg(P)$, donc $\boxed{\deg(P) = 2}$.
Ainsi, les polynômes solutions sont parmi les polynômes constants ou les polynômes de degré 2 dans $\mathbb{K}_2[X]$, i.e. $\mathscr{S} \subset \mathbb{K}_2[X]$.
- *Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{K}_2[X]$.*
Alors : $(P')^2 = (2aX+b)^2 = 4a^2X^2+4abX+b^2$ et $4P = 4aX^2+4bX+4c$.
Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a :

$$P \in \mathscr{S} \iff \begin{cases} 4a(a-1) = 0 \\ 4b(a-1) = 0 \\ b^2 = 4c \end{cases} \iff (P = 0 \text{ ou } P = X^2+bX+\frac{b^2}{4},\ b \in \mathbb{K}).$$

- *Ainsi,* $\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup \left\{X^2+bX+\frac{b^2}{4} \,\middle|\, b \in \mathbb{K}\right\}}$.

Exercice 19. Une relation fonctionnelle polynomiale, non linéaire.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Correction. *Le polynôme nul est solution.*
Soit P non nul vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$. Notons $n = \deg P$.
Si $n < 2$, alors $P'' = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Avec la relation, on trouve $P = 0$ ce que l'on a exclu. Ainsi, $n \geq 2$ et alors $\deg P'' = n-2$ et $\deg P = n-1$.
Par passage au degré dans la relation, on trouve $n = (n-1)+(n-2)$, d'où $n = 3$.
On peut l'écrire avec ses coefficients et traduire l'égalité $P(2X) = P'(X)P''(X)$ à l'aide des coefficients.
On trouve $P = \frac{4}{9}X^3$.
Réciproquement, ce polynôme est bien solution.

$\boxed{\textit{L'ensemble des solutions est donc le doubleton } \left\{0_{\mathbb{K}[X]},\ \frac{4}{9}X^3\right\}}$.

Exercice 20. Une relation fonctionnelle polynomiale, linéaire.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

Remarque. *Cette équation est « linéaire en P ».*
En effet, on cherche le noyau de $P \mapsto X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$ qui est une application linéaire.
Ainsi, la solution doit être également « linéaire en P ».
Une famille génératrice permettra donc de décrire l'ensemble des solutions !

- *Parmi les polynômes constants, la seule solution est $P = 0$.*
- *Supposons désormais P non constant. Alors il existe $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$ tel que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.*
  Si $d \geq 2$, alors $P = adX^d + \dots$, $P' = da_d X^{d-1} + \dots$ et $P'' = d(d-1)a_d X^{d-2} + \dots$ donc le coefficient de degré d de $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$ est
  $$d(d-1)a_d + da_d - a_d.$$
  Si P est solution, alors $d(d-1)a_d + da_d - a_d = 0$, et, comme $a_d \neq 0$, il vient $(d+1)(d-1) = 0$, donc $d \in \{\pm 1\}$, ce qui est absurde car $d \geq 2$.
  Ainsi, aucun polynôme de degré ≥ 2 n'est solution.
- *Soit $P = aX + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On a*
  $$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = a(X+2) - aX - b,$$
  donc
  $$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0 \iff b = 2a.$$
  Ainsi, les polynômes de degré 1 solution sont les $a(X+2)$, avec $a \in \mathbb{C}^*$.
- **Bilan.** $\boxed{\textit{L'ensemble des solutions est } \mathrm{Vect}\,(X+2)}$.

Exercice 21. P' divise P. *Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.*

Correction.

- **Analyse.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P. Distinguons trois cas.*
  - *Si $P = 0$ alors $P' = 0$ et on a bien $P'|P$. Donc $0 \in \mathscr{S}$.*
  - *Si P est constant non nul, alors $P' = 0$ et $P \neq 0$, donc P' ne divise pas P.*
  - *Supposons P non constant, et notons $n = \deg P \in \mathbb{N}^*$.*
    Alors $\deg P' = n-1$. Comme $P' \in \mathbb{C}[X]$ et $P' \neq 0$, P' est scindé sur $\mathbb{C}$, donc on peut trouver des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ de P' de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que
    $$P' = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1} ... (X-\alpha_r)^{m_r} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{r} m_i = n-1.$$
    Comme $P'|P$, toute racine de P' est encore racine de P. En particulier, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est racine de P de multiplicité $m_i + 1$.
    On a donc trouvé $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}(m_i+1)$, c'est-à-dire $n-1+r$ racines de P (comptées avec multiplicité).

Or $P \neq 0$ donc le nombre de ses racines est majoré par son degré, ce qui impose

$$n-1+r \leq n \qquad \text{d'où} \qquad r \leq 1.$$

Ainsi, P' est de la forme $\lambda(X-\alpha)^{n-1}$, donc $P = \Lambda(X-\alpha)^n$ avec $\Lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

En conclusion de l'analyse $\mathscr{S} \subset \{\Lambda(X-\alpha)^n \mid \Lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}\}$.

- *L'inclusion réciproque est claire, donc on a l'égalité*

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\Lambda(X-\alpha)^n \mid \Lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}\}}.$$

Exercice 22. *Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.*

1. *Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q(X+1) = Q(X)$.*
2. *Montrer que si $P \in E$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = X\,(X+1)\,(X+2)\,Q(X)$ et établir une relation entre $Q(X)$ et $Q(X+1)$.*
3. *Conclure.*

Correction.

1. **Analyse.** *Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X+1) = Q(X)$.*
 Méthode 1. *Q est 1-périodique, donc par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) = Q(0)$. Le polynôme $Q(X)-Q(0)$ admet donc une infinité de racines, donc est nul, d'où $Q(X) = Q(0)$, donc Q est un polynôme constant.*
 Méthode 2. *Raisonnons par l'absurde en supposant que Q n'est pas un polynôme constant. Alors d'après le théorème de d'Alembert, il existerait $a \in \mathbb{C}$ tel que $Q(a) = 0$. Comme $Q(X+1) = Q(X)$, on aurait que $\forall k \in \mathbb{Z},\ Q(a+k) = 0$ i.e. Q possèderait une infinité de racines, donc Q serait le polynôme nul et cela contredirait notre supposition. Ainsi, Q est un polynôme constant.*
 Méthode 3. *Écrivons $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors $Q(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$, et*

$$0 = Q(X+1) - Q(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k((X+1)^k - X^k).$$

 Or, la famille $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre (car formée de polynômes non nuls et échelonnés en degré), donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 0$. Ainsi, $Q = a_0$, donc $\boxed{Q \text{ est constant}}$.
 Méthode 4. *En notant $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$ on a :*

$$Q(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} a_k \binom{k}{\ell} X^\ell = \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} a_k \binom{k}{\ell} X^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} a_k \right) X^\ell.$$

 Le coefficient de $Q(X+1)$ devant X^{n-1} est donc $a_{n-1} + na_n$.

De plus, le coefficient de Q devant X^{n-1} est a_{n-1}.
L'égalité des deux mène à $na_n = 0$, et comme $a_n \neq 0$, on a $n = 0$, donc Q est constant.

Synthèse. *Réciproquement, si Q est un polynôme constant alors $Q(X+1) = Q(X)$.*

Conclusion. $\boxed{\text{Les polynômes 1-périodique sont les polynômes constants}}$, *ce qui s'écrit* $\boxed{\{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(X+1) = Q(X)\} = \mathbb{K}_0[X] = \mathrm{Vect}\,(1)}$.

2. *Soit $P \in E$. Alors il vérifie $(X+3)P(X) = XP(X+1)$. On en déduit d'abord que $P(0) = 0$, puis $P(-1) = 0$ puis $P(-2) = 0$. Ainsi, $0, -1, -2$ sont des racines distinctes du polynôme P, donc par théorème $\underline{X(X+1)(X+2)|P}$ d'où* $\boxed{\text{il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(X) = X(X+1)(X+2)Q(X)}$.
La condition $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ implique que $X(X+1)(X+2)(X+3)[Q(X)-Q(X+1)] = 0$. Or, $X(X+1)(X+2)(X+3) \neq 0$, donc par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, on en déduit que $Q(X)-Q(X+1) = 0$ donc d'après la question 1 $\boxed{Q \text{ est constant}}$.

3. *A la question 2., on a montré que $E \subset \{aX(X+1)(X+2) \mid a \in \mathbb{K}\}$.*
L'inclusion réciproque est immédiate.
D'où l'égalité $\boxed{E = \{aX(X+1)(X+2) \mid a \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\,(X(X+1)(X+2))}$, *qui est une droite vectorielle.*

Exercice 23. Racines d'un polynôme vérifiant une équation fonctionnelle. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)\,P(X-1)$.*

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont aussi racines de P.*
2. *Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P. Montrer que a est une racine de l'unité.*
3. *Montrer que, ni 0, ni -1, ne sont racines de P.*
4. *Soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\beta \in \{j, j^2\}$.*
5. *Conclure.*

Correction.

1. *Presque facile !*
2. *Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P.*
Par récurrence, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a^{2^n} \text{ est une racine de } P.}$$

Comme le polynôme P est non nul, il n'a qu'un nombre fini de racines.

Ainsi, l'ensemble $\{a^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

On peut donc trouver deux entiers $n \neq m$ tels que $a^{2^n} = a^{2^m}$.

Quitte à échanger n et m, on peut supposer $n > m$.

En divisant de part et d'autre par a^{2^n} (ce qui est licite car $a \neq 0$), on obtient $a^{2^n - 2^m} = 1$.

On a trouvé $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p = 1$.

Donc $\boxed{a \text{ est une racine de l'unité}}$.

3. • *Par l'absurde, supposons* 0 *racine de* P.

   Alors d'après la question 1*, le scalaire* $(0+1)^2 = 1$ *est aussi racine de* P.

   Puis, à nouveau avec la question 1*, le scalaire* $(1+1)^2 = 4$ *est aussi racine de* P.

   La question 2 implique alors que 4 *est une racine de l'unité, d'où la contradiction !*

   • *Par l'absurde, supposons* -1 *racine de* P.

   Alors d'après la question 1*, le scalaire* $(-1+1)^2 = 0$ *est aussi racine de* P.

   Contradiction avec le point précédent.

4. *On va montrer que* $\begin{cases} |\beta| = 1 \\ |\beta+1| = 1 \end{cases}$ *ce qui fournira que* $\beta \in \{j, j^2\}$ *(faire un dessin).*

   • *Par hypothèse,* β *est racine de* P.

   D'après la question 3, β *n'est pas nul.*

   D'après la question 2, β *est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module* 1.

   Cela montre la première égalité $\boxed{|\beta| = 1}$.

   • *Par hypothèse,* β *est racine de* P.

   D'après la question 1, le scalaire $(\beta+1)^2$ *est racine de* P*, et est non nul d'après la question 3.*

   D'après la question 2, $(\beta+1)^2$ *est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module* 1.

   D'où la deuxième égalité $\boxed{|\beta+1| = 1}$.

   Justification. *Montrons* $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \implies z \in \{j, j^2\}$

   Par le dessin.

   L'ensemble des complexes z *tels que* $|z| = 1$ *est le cercle trigonométrique.*

   L'ensemble des complexes z *tels que* $|z+1| = 1$ *est le cercle de centre* $(-1, 0)$ *et de rayon* 1.

   Ces deux cercles s'intersectent en deux points qui sont équidistants des points $O = (0,0)$ *et* $\Omega = (-1,0)$ *et donc sont sur la médiatrice du segment* $[O\Omega]$ *qui est la droite d'équation* $x = -\frac{1}{2}$.

   Ainsi, ces deux points ont une abscisse égale à $-\frac{1}{2}$ *et comme ils sont sur le cercle trigonométrique leur ordonnée vaut* $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ces deux points ont donc pour affixe j *et* j^2.

   Par le calcul.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z+1|^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 1 + 2\mathrm{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(z)^2 = \dfrac{3}{4} \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(z) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff z \in \{j, j^2\}
\end{aligned}$$

5. *On a montré que les seules racines possibles de P sont j et j^2. Comme $P \in \mathbb{C}[X]$, il est scindé, de la forme $\lambda(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Puisque $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, l'égalité des termes de plus haut degré assure que $\lambda = \lambda^2$, et puisque $\lambda \neq 0$, il vient $\boxed{\lambda = 1}$.*

   Ainsi, $\boxed{\text{les polynômes } P \in \mathbb{C}[X], \text{ non nuls, tels que } P(X^2) = P(X)P(X-1), \text{ sont parmi les } (X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta, \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2}$.

   Dès lors, d'une part,

$$\begin{aligned}
P(X^2) &= (X^2 - j)^\alpha (X^2 - j^2)^\beta && (j = j^4 \textit{ et id. remarquable}) \\
&= (X - j^2)^\alpha (X + j^2)^\alpha (X - j)^\beta (X + j)^\beta.
\end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned}
P(X)P(X-1) &= (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta (X-1-j)^\alpha (X-1-j^2)^\beta && \textit{car } (1 + j + j^2 = 0) \\
&= (X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta (X+j^2)^\beta (X+j)^\beta.
\end{aligned}$$

   Par unicité de la multiplicité de j dans $P(X^2)$, qui vaut donc d'une part β et d'autre part α, on a $\boxed{\alpha = \beta}$.

   Ainsi, P est de la forme $(X^2 + X + 1)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

   Réciproquement, les calculs précédents assurent que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $(X^2 + X + 1)^\alpha$ est solution.

   Finalement, $\boxed{\{P \in \mathbb{C}[X] \neq \{0\} \mid P(X^2) = P(X)P(X-1)\} = \{(X^2 + X + 1)^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}\}}$.

Dérivation

Exercice 24. Itération de l'opérateur d'Euler. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$P_0 = X^k \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = XP_n'.$$

Donner une expression simple pour la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction. *En calculant les premières valeurs, on conjecture rapidement que* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = k^n\, X^k}$. *On montre alors facilement cette propriété par récurrence.*

Exercice 25. Dérivée d'un produit. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+X)(1+2X)\dots(1+nX)$. Combien vaut $P'(0)$? $P''(0)$?*

Correction. $P = \prod_{k=1}^{n}(1+kX)$ *donc* $P' = \sum_{k=1}^{n} k \prod_{\ell\neq k}(1+\ell X)$ *d'où* $\boxed{P'(0) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

De plus, $P'' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell\neq k} k\ell \prod_{p\neq \ell,k}(1+pX)$ *d'où*

$$\begin{aligned}
P''(0) &= \sum_{1\leq k\neq \ell\leq n} k\ell = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} k\ell - \sum_{1\leq k\leq n} k^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}[3n(n+1) - 2(2n+1)] \\
&= \frac{n(n+1)}{2}(3n^2 - n - 2) \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}}.
\end{aligned}$$

Exercice 26. Des supplémentaires. *On considère $E = \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $H = \mathbb{K}_n[X]$ et $D = \mathrm{Vect}\left((X-12)^{n+1}\right)$. À l'aide de la formule de Taylor, montrer sans effort que $E = H \oplus D$.*

Correction. • *Grâce à la formule de Taylor en 12, on a*

$$\forall P \in E,\ P = \underbrace{\frac{P^{(n+1)}(12)}{(n+1)!}(X-12)^{n+1}}_{\in D} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(12)}{(k)!}(X-12)^k}_{\in H},$$

ce qui montre que $E \subset H + D$.
Par ailleurs, H et D sont deux ssev de E, donc $H + D \subset E$, d'où $\boxed{E = H + D}$.
• *Vérifions que la somme est directe. Si $P \in H \cap D$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda(X-12)^{n+1}$ et* $\deg(P) \leq n$, *donc $\lambda = 0$, d'où $P = 0$.*
Ceci montre que $H \cap D \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant claire, on a $\boxed{H \cap D = \{0_E\}}$.
Par caractérisation, on obtient $\boxed{E = H \oplus D}$.
Remarque. *Si on ne nous avait pas imposé d'utiliser la formule de Taylor, on aurait pu utiliser un*

résultat sur les hyperplans. En effet, E est un ssev, $H = \mathrm{Ker}\varphi$ où $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array}$ et $(X-12)^{n+1} \in E \setminus H$. Un résultat de cours assure que $\boxed{E = H \oplus D}$.

Exercice 27. Dérivées positives en un point. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geq 0$.*
Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Correction. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un majorant du degré de P.*
D'après la formule de Taylor, on a

$$P \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \;=\; P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On a donc

$$\boxed{\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}.$$

On a $\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x - a \geq 0$, d'où $(x-a)^k \geq 0$.
De plus, par hypothèse, on a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P^{(k)}(a) \geq 0$.
Donc tous les termes de la somme de droite sont ≥ 0, ce qui montre que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) \geq P(a) > 0.$$

On en déduit que $\boxed{P \text{ ne possède pas de racines dans } [a, +\infty[}$.

Exercice 28. Dérivée itérée. *Soient $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \dfrac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$.*
Montrer $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Correction.

- **Remarque 1.** *$X^n | P$ donc 0 est racine de P de multiplicité au moins n, ce qui assure que $P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n-1)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.*
  Remarque 2. *$\deg(P) = 2n$, donc $\forall k > 2n,\ P^{(k)} = 0$ et en particulier, $P^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.*

- **Méthode 1 (Newton et Taylor).**
  En décomposant $P(X)$ à l'aide du binôme de Newton et en faisant un changement de variable, on obtient :

$$P(X) = \sum_{\ell=n}^{2n} \frac{1}{n!} \binom{n}{\ell - n} (-b)^{\ell - n} a^{2n-\ell} X^{\ell}. \qquad (*)$$

  Par ailleurs, d'après la formule de Taylor on a $P(X) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{P^{(\ell)}(0)}{\ell!} X^{\ell}$.
  Par unicité des coefficients d'un polynôme, on trouve que :

- $\forall \ell \in [\![n, 2n]\!],\ P^{(\ell)}(0) = (-b)^{\ell-n} a^{2n-\ell} \underbrace{\frac{\ell!}{n!}}_{\in\mathbb{N} \text{ car } n\leq \ell} \binom{n}{\ell-n} \in \mathbb{Z}$.
- $\forall \ell \notin [\![n, 2n]\!],\ P^{(\ell)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Dans tous les cas, $\boxed{\forall \ell \in \mathbb{N}, P^{(\ell)}(0) \in \mathbb{Z}}$.

- **Méthode 2 (Leibniz).** *Soit $k \in [\![n, 2n]\!]$. D'après la formule de Leibniz, on a :*

$$P^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} [X^n]^{(\ell)} [(a - bX)^n]^{(k-\ell)}.$$

Or, $[X^n]^{(\ell)}(0) = \begin{cases} n!, & si\ \ell = n \\ 0, & sinon. \end{cases}$ *Donc*

$$P^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! [(a - bX)^n]^{(k-n)}(0).$$

Et, $[(a-bX)^n]' = (-b)n(a-bX)^{n-1}$, $[(a-bX)^n]'' = (-b)^2 n(n-1)(a-bX)^{n-2}$, *donc on conjecture que*

$$[(a - bX)^n]^{(p)} = \begin{cases} (-b)^p n(n-1)...(n-p+1)(a-bX)^{n-p} & si\ p \in [\![0, n]\!] \\ 0\ sinon. \end{cases}$$

Puisque $k - n \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$[(a - bX)^n]^{(k-n)}(0) = (-b)^{k-n} n(n-1)...(2n-k+1) a^{2n-k},$$

donc finalement

$$\boxed{P^{(k)}(0) = \binom{k}{n} (-b)^{k-n} n(n-1)...(2n-k+1) a^{2n-k} \in \mathbb{Z}}.$$

Remarque. *Les deux formules concordent !*

Exercice 29. Interpolation de Taylor. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Considérons*

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(a), P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)). \end{array}$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme. Que vaut Ψ^{-1} ?

Correction.

- *La linéarité résulte de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation.*
- *Montrons que Ψ est bijective.*

Méthode 1 (Ψ envoie une base sur une base). *La famille* $\left(\frac{(X-a)^k}{k!}\right)_{0\leq k\leq n}$ *est une base de*

$\mathbb{K}_n[X]$. En effet, il s'agit d'une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, libre (car constituée de polynômes non nuls et à degrés échelonnés) et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ d'après la formule de Taylor. On remarque que

$$\forall (k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2,\ [(X-a)^k]^{(\ell)} = \begin{cases} 0 & si\ \ell \neq k \\ k! & si\ \ell = k, \end{cases}$$

ce qui assure que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\quad \Psi\left(\frac{(X-a)^k}{k!}\right) \begin{array}{l} = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \\ = \varepsilon_{k+1}, \end{array}$$

où $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Ainsi, Ψ est une application linéaire qui transforme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ donc Ψ est un isomorphisme.

Méthode 2 (bijectivité à l'ancienne).

- *Montrons l'injectivité de Ψ. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On a*

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\Psi &\iff P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n)}(a) = 0 \\ &\iff P \text{ admet } a \text{ comme racine de multiplicité au moins } n+1 \\ &\iff P = 0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré et $\deg P \leq n$, ou bien la formule de Taylor car $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Dans tous les cas, on a $\mathrm{Ker}\Psi = \{0\}$.

- *Montrons la surjectivité. Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.*

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k$.

On a $P \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après la formule de Taylor, on a aussi $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Puisque la famille $\Big((X-a)^k\Big)_{0\leq k\leq n}$ est libre et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$, on en déduit que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{\lambda_k}{k!} = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$ d'où $\lambda_k = P^{(k)}(a)$. Ainsi, $\Psi(P) = (\lambda_0,\dots,\lambda_n)$, ce qui assure la surjectivité de Psi.

Remarque. *Quasiment les mêmes arguments permettraient de montrer directement la bijectivité de Ψ en exploitant la formule de Taylor : soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, qui s'écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ d'après la formule de Taylor. On a :*

$$\begin{aligned} \Psi(P) = (\lambda_0,\dots,\lambda_n) &\iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ P^{(k)}(a) = \lambda_k \\ &\iff P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k, \end{aligned}$$

d'où l'unicité en cas d'existence d'un antécédent de $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ par Ψ et l'existence car $\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k$ est bien défini et appartient à $\mathbb{K}_n[X]$.

Méthode 3 (idem, en devinant la bijection réciproque).

On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k \end{array}$ *et on vérifie que* $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ *et* $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$.

– *On a, pour tout* $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *:*

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(\lambda_0, \dots, \lambda_n)) &= \Psi\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Psi\left(\frac{(X-a)^k}{k!}\right) && \textit{(linéarité de } \Phi\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) && \textit{(d'après un calcul précédent)} \\ &= (\lambda_0, \dots, \lambda_n) && \textit{(opérations dans } \mathbb{K}^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}}$.

– *On a, pour tout* $P \in \mathbb{K}_n[X]$ *:*

$$\begin{aligned} \Phi(\Psi(P)) &= \Phi(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)) && \textit{(définition de } \Psi\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k && \textit{(définition de } \Phi\textit{)} \\ &= P && \textit{(d'après la formule de Taylor).} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}}$.

- **Conclusion.** *L'application Ψ est linéaire et bijective, donc un isomorphisme et sa bijection réciproque est*

$$\boxed{\Psi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k. \end{array}}$$

Exercice 30. Dérivées de la fonction tangente. *Montrer que la fonction* tan *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n+1$ et $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$.*

Correction. *On convient de noter Π (ce n'est pas une notation standard) l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$. Notons pour plus tard que les formules définissant le produit et la dérivée de deux polynômes montrent directement que cet ensemble est stable par ces deux opérations. Autrement dit, on a*

$$\forall (P, Q) \in \Pi^2, \quad (PQ \in \Pi \quad \textit{et} \quad P' \in \Pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A(n)$ l'assertion

$$\tan \text{ est } n \text{ fois dérivable et } \exists P \in \Pi : \tan^{(n)} = P(\tan).$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)$ par récurrence.

Initialisation. *La condition de « dérivabilité 0 fois » est vide, et on a évidemment*

$$\tan^{(0)} = \tan = X(\tan),$$

ce qui démontre $A(0)$ (le polynôme $X \in \Pi$ convient).

Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$. D'après $A(n)$, on peut trouver $P \in \Pi$ tel que $\tan^{(n)} = P(\tan) = P \circ \tan$.*
Les polynômes et la fonction tangente étant dérivables, on en déduit que $\tan^{(n)}$ est dérivable, c'est-à-dire que $\tan$ est $(n+1)$ fois dérivable, et que sa dérivée $(n+1)$-ième est

$$\begin{aligned}
\tan^{(n+1)} &= \left(\tan^{(n)}\right)' \\
&= (P \circ \tan)' \\
&= (P' \circ \tan) \times \tan' \\
&= (P' \circ \tan) \times (1 + \tan^2) \\
&= (P' \circ \tan) \times \Big((X^2+1) \circ (\tan)\Big) \\
&= \Big((X^2+1)P'\Big) \circ (\tan),
\end{aligned}$$

ce qui démontre $A(n+1)$, car $(X^2+1)P' \in \Pi$ d'après les propriétés de stabilité énoncées au début de l'exercice.

Remarquons qu'on a en fait obtenu une définition par récurrence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demandée : on a

$$P_0 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (X^2+1)P_n'.$$

On peut obtenir beaucoup de renseignements sur cette suite (terme dominant, parité, etc.) à partir de cette définition par récurrence.

Exercice 31. Polynômes de Legendre (1752-1833). *On définit le* **n^e polynôme de Legendre** *par :*

$$L_n = \frac{1}{n!\ 2^n}\ [(X^2-1)^n]^{(n)}.$$

1. *Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.*
2. *On pose $P_n = (X^2-1)^n$. Trouver une relation entre P_n' et P_n.*
3. *Établir l'assertion : $\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0$.*

Correction.

1. *Écrivons $P_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n\ (X+1)^n$. Dès lors, $L_n = \dfrac{1}{n!2^n}P_n^{(n)}$.*

   D'après la formule de Leibniz, $P_n^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ [(X-1)^n]^{(k)}\ [(X+1)^n]^{(n-k)}$.

   Or, $\boxed{\forall a \in \mathbb{C},\ [(X-a)^n]^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\ (X-a)^{n-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq n\ ;\ [(X-a)^n]^{(k)} = 0 \text{ si } k > n}$.

   Donc

$$\begin{aligned} P_n^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!n!}{(n-k)!k!}(X-1)^{n-k}\ (X+1)^k \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}\ (X+1)^k, \end{aligned}$$

   puis $\boxed{L_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}\ (X+1)^k}$. On en déduit que $\boxed{L_n(1) = 1}$ et $\boxed{L_n(-1) = (-1)^n}$.

2. *$P_n' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$ puis $\boxed{(X^2-1)P_n' = 2nXP_n}$ (*).*

3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant (*) (n+1) fois à l'aide de la formule de Leibniz, on obtient :*

$$\binom{n+1}{0}(X^2-1)P_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}2XP_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}2P_n^{(n)} = 2n\left(\binom{n+1}{0}XP_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}P_n^{(n)}\right).$$

   En remarquant que $L_n = \dfrac{1}{n!2^n}P_n^{(n)}$ et en calculant les coefficients binomiaux, l'égalité devient :

$$(X^2-1)n!2^nL_n'' + (n+1)2Xn!2^nL_n' + \frac{n(n+1)}{2}2n!2^nL_n = 2n\left(Xn!2^nL_n' + (n+1)n!2^nL_n\right).$$

   En divisant par $n!2^n \neq 0$, il vient :

$$(X^2-1)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n = 2nXL_n' + 2n(n+1)L_n,$$

   puis en simplifiant $\boxed{\text{on obtient l'égalité demandée}}$.

Exercice 32. Polynômes de Hermite.

1. *Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto e^{-x^2}$ soit n fois dérivable, de dérivée n-ième $g^{(n)} : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré, le terme dominant, et la parité de H_n.*
3. *Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ H'_{n+1} = -2(n+1)H_n$.*
4. *En déduire une expression de la suite $(g^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Correction.

1. **Dérivabilité.** *Commençons par remarquer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition. On ne se préoccupera donc plus dans l'exercice de questions de dérivabilité.*

   Unicité. *Soient $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux[a] suites de polynômes vérifiant la condition de l'énoncé.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc $H_n(x)e^{-x^2} = g^{(n)}(x) = C_n(x)e^{-x^2}$. En multipliant par e^{x^2}, on en déduit $H_n(x) = C_n(x)$.
   On a donc montré $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = C_n(x)$. Par rigidité des polynômes (ou identification entre un polynôme et la fonction polynomiale associée), on en déduit $H_n = C_n$.

   Existence. *Nous allons montrer l'existence[b] de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion « il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g^{(n)} : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$ ». Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.

   Initialisation. *Clairement $g^{(0)} = g : x \mapsto e^{-x^2}$, donc $H_0 = 1$ convient.*

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.*
   On a donc $g^{(n)} : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$. En dérivant une fois de plus,

   $$g^{(n+1)} : x \mapsto H'_n(x)\, e^{-x^2} - 2x\, H_n(x)\, e^{-x^2} = H_{n+1}(x)\, e^{-x^2},$$

   où l'on a posé $H_{n+1} = H'_n - 2X\, H_n \in \mathbb{R}[X]$.
   Cela montre $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion « $\deg H_n = n$, $\mathrm{coeff}_n(H_n) = (-2)^n$ et la fonction polynomiale $x \mapsto H_n(x)$ a la même parité que n. » Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$ par récurrence.*

   Initialisation. *On a $H_0 = 1$, polynôme unitaire de degré 0, et la fonction polynomiale associée est constante, donc paire. Cela montre $P(0)$.*

   Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.*

   Degré. *Comme $\deg H_n = n$ d'après $P(n)$, on a $\deg(-2XH_n) = n+1 > \deg H'_n$, donc*

   $$\deg H_{n+1} = \deg\left(H'_n - 2X\, H_n\right) = \max(\deg H'_n, \deg(-2X\, H_n)) = n+1.$$

   Coefficient dominant. *On a directement (en utilisant $P(n)$) :*

   $$\begin{aligned}\mathrm{coeff}_{n+1}(H_{n+1}) &= \mathrm{coeff}_{n+1}(\underbrace{H'_n}_{\deg\leq n}) - 2\mathrm{coeff}_{n+1}(X\, H_n)\\ &= -2\mathrm{coeff}_n(H_n) = (-2)\times(-2)^n = (-2)^{n+1}.\end{aligned}$$

Parité. *La dérivation « inversant » la parité d'une fonction, les fonctions polynomiales* $x \mapsto H_n'(x)$ *et* $x \mapsto x\,H_n(x)$ *sont toutes les deux de parité opposée à celle de* $x \mapsto H_n(x)$. *D'après* $P(n)$, *ces deux fonctions sont donc « de la même parité que* $n+1$ *», ce qui entraîne, par combinaison linéaire, qu'il en va de même de* $H_{n+1} = H_n' - 2X\,H_n$.

Cela montre $P(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $P(n)$ *l'assertion «* $H_{n+1}' = -2(n+1)H_n$. *»*

   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *par récurrence.* [c]

   Initialisation. $H_1' = -2$, *ce qui montre* $P(0)$.

   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$. *On a*

$$\begin{aligned}
(H_{n+2})' &= (H_{n+1}' - 2X\,H_{n+1})' && \textit{(rel. réc.)}\\
&= H_{n+1}'' - 2X\,H_{n+1}' - 2H_{n+1}\\
&= -2(n+1)H_n' + 4(n+1)X\,H_n - 2H_{n+1} && \textit{(d'après } P(n))\\
&= -2(n+1)\left[H_n' - 2X\,H_n\right] - 2H_{n+1}\\
&= -2(n+1)H_{n+1} - 2H_{n+1} && \textit{(rel. réc)}\\
&= -2(n+2)H_{n+1},
\end{aligned}$$

   ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

4. *La question précédente permet de réécrire la récurrence sous la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2} = -2(n+1)H_n - 2X\,H_{n+1},$$

   d'où l'on tire

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2}(0) = -2(n+1)H_n(0).$$

   Notons également que $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = H_n(0)\,e^{-0^2} = H_n(0)$.

   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$.

   - *Si* n *est impair, la fonction* $x \mapsto H_n(x)$ *est impaire, donc* $H_n(0) = 0$.
   - *Si* n *est pair, on peut trouver* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k$. *La relation obtenue plus haut permet de voir que*

$$\begin{aligned}
&H_0(0) = 1\\
&H_2(0) = (-2) \times 1 \times H_0(0) = (-2) \times 1\\
&H_4(0) = (-2) \times 3 \times H_2(0) = (-2)^2 \times 1 \cdot 3\\
&H_6(0) = (-2) \times 5 \times H_4(0) = (-2)^3 \times 1 \cdot 3 \cdot 5,
\end{aligned}$$

et une récurrence raisonnablement immédiate permet d'en déduire

$$\begin{aligned} H_n(0) = H_{2k}(0) &= (-2)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) \\ &= (-2)^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-1) \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \\ &= (-2)^k \frac{(2k)!}{2^k \times 1 \cdot 2 \cdots k} \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \end{aligned}$$

In fine,

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k \frac{n!}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ pair ;} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

a. Les polynômes de cet exercice sont les polynômes d'Hermite (ou plutôt l'une des versions des polynômes d'Hermite). Je choisis $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme deuxième nom, car Hermite (1822-1901) se prénommait Charles.

b. Une possibilité alternative (sans doute meilleure a posteriori) est de définir une suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en demandant $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = H_n' - 2X\,H_n$ puis de montrer par récurrence que cette suite de polynômes vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = H_n(x)\,e^{-x^2}$.

c. Notons qu'il est rarissime de montrer une relation de récurrence par récurrence...

Divisibilité

Exercice 33. Divisibilité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
Montrer que le polynôme $P = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $Q = X^2 - 3X + 2$.

Correction. *On écrit : $Q = (X-1)(X-2)$.*
On a : $P(1) = (-1)^{2n} + 0^n - 1 = 0$ et $P(2) = 0 + 1^n - 1 = 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$) donc 1 et 2 sont des racines distinctes de P.
Par théorème de factorisation, on en déduit que $\boxed{Q \text{ divise } P}$.

Exercice 34. Divisibilité. *Justifier* $\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3,\ 1 + X + X^2 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.

Correction. *Notons $Q := 1 + X + X^2 = (X-j)(X-j^2) = (X-j)(X-\overline{j})$ et $P = X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$.*
Comme $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$, on a $P(j) = j^{3n} + j^{3p+1} + j^{3q+2} = 1 + j + j^2 = 0$.
Comme $P(j) = 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on a aussi $P(\overline{j}) = 0$.
Ainsi, j et $\overline{j}$ sont des racines distinctes de P donc par théorème de factorisation, $Q|P$ i.e.
$\boxed{1 + X + X^2 \mid PX^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}}$.

Exercice 35. Des entiers aux polynômes. *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.*
On note r le reste de la division euclidienne de a par b.
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r.

Correction. *Le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r si et seulement si* $\begin{cases} X^b - 1 \mid X^a - X^r \\ \deg(X^r) < \deg(X^b - 1) \end{cases}$
Comme $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, la deuxième condition sur le degré est vérifiée.
Reste à montrer la divisibilité.

On a

$$X^a - X^r = X^{bq+r} - X^r = X^r((X^b)^q - 1)$$

L'égalité de Bernoulli assure que $X^b - 1$ divise $(X^b)^q - 1$, donc divise a fortiori $X^r((X^b)^q - 1)$, donc divise $X^a - X^r$.

Exercice 36. Un critère de divisibilité. *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer $b \mid a \iff X^b - 1 \mid X^a - 1$.*

Correction.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $a = bq$.*
Alors $X^a - 1 = (X^b)^q - 1^q$. Ce dernier polynôme est divisible par $X^b - 1$ (merci Bernoulli).

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que $X^b - 1 \mid X^a - 1$. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^a - 1 = (X^b - 1)Q$.*
Distinguons les cas.

- *Si $b = 0$, alors $X^b - 1 = 0$ et $0 \mid X^a - 1$, donc $X^a - 1 = 0$, donc $a = 0$, d'où $\boxed{b \text{ divise } a}$.*
- *Supposons $b \neq 0$. Alors $e^{i\frac{2\pi}{b}}$ est racine de $X^b - 1$, donc a fortiori, $e^{i\frac{2\pi}{b}}$ est racine de $X^a - 1$, d'où $e^{i\frac{2a\pi}{b}} = 1$, donc $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ donc $a \in b\mathbb{Z}$, donc $\boxed{b \text{ divise } a}$.*

Exercice 37. Un classique, avec une jolie application ! *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.*

1. *Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.*
2. *En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.*
3. *En déduire les solutions de l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.*

Correction.

1. *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P \circ P - P = \sum_{k=0}^{n} a_k (P(X)^k - X^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (P^k - X^k)$.*
   Or, d'après la formule de Bernoulli, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P^k - X^k = (P - X) \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} X^j P^{k-1-j}}_{\in \mathbb{K}[X]}$ donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P - X$ divise $P^k - X^k$ puis $\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - P}$.
2. *On écrit $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$. D'après 1., $P - X$ divise $P \circ P - P$ et bien sûr, $P - X$ divise $P - X$ donc $\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - X}$.*
3. *Posons $P = X^2 + 3X + 1$.*
   On a

$$\begin{aligned} P \circ P - X &= (X^2 + 3X + 1)^2 + 3(X^2 + 3X + 1) + 1 - X \\ &= (X^2 + 3X + 1)^2 + 3X^2 + 8X + 4, \end{aligned}$$

et on a

$$P - X = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2.$$

On cherche les racines complexes de $P \circ P - X$.
D'après la question 2., on sait que $(X+1)^2$ divise $(X^2+3X+1)^2+3X^2+8X+4$. En développant, on trouve

$$\begin{aligned} P \circ P - X &= (X^4 + 9X^2 + 1 + 6X^3 + 2X^2 + 6X) + 3X^2 + 8X + 4 \\ &= X^4 + 6X^3 + 14X^2 + 14X + 5, \end{aligned}$$

et en factorisant par $X^2 + 2X + 1$, on trouve comme quotient

$$Q = X^2 + 4X + 5.$$

On a donc

$$P \circ P - X = (X+1)^2 Q.$$

Les racines de Q sont $-2-i$ et $-2+i$, donc les racines de $P \circ P - X$ sont -1, $-2-i$ et $-2+i$.
$\boxed{\textit{Les solutions de l'équation } (z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=0 \textit{ sont donc } -1,\ -2-i \textit{ et } -2+i}$.

Exercice 38. Une CNS de divisibilité. *A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?*

Correction.

Méthode 1. $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$ *où on rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $j \neq \overline{j}$. Ainsi, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :*

$$\begin{aligned} (X^2+X+1)|(X^4+aX^2+bX+c) &\iff \begin{cases} j^4 + aj^2 + bj + c = 0 \\ \overline{j}^4 + a\overline{j}^2 + b\overline{j} + c = 0 \end{cases} \\ &\iff j^4 + aj^2 + bj + c = 0 && \text{car } \overline{0} = 0 \\ &\iff j + a(-1-j) + bj + c = 0 && \text{car } j^3 = 1 \text{ et } 1 + j + j^2 = 0 \\ &\iff (-a+b+1)j + c - a = 0 \\ &\iff b = a - 1 \quad \text{et} \quad c = a && \text{par unicité des parties imaginaires} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{X^4 + aX^2 + bX + c \text{ est-il divisible par } X^2 + X + 1 \text{ ssi } (b = a-1 \quad \text{et} \quad c = a)}.$$

De plus, $\underline{X^4 + aX^2 + (a-1)X + a = (X^2+X+1)(X^2 - X + a)}$.

Méthode 2. *On effectue la division euclidienne de $X^4 + aX^2 + bX + c$ par $X^2 + X + 1$, qui est non nul. On trouve comme quotient $X^2 - X + a$ et comme reste $R := (b-a+1)X + (c-a)$. D'après le cours, on sait que*

$$\begin{aligned} (X^2+X+1) \mid (X^4+aX^2+bX+c) &\iff R = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\iff (b - a + 1 = 0 \text{ et } c - a = 0) \\ (X^2+X+1) \mid (X^4+aX^2+bX+c) &\iff \boxed{b = a - 1 \text{ et } c = a}. \end{aligned}$$

Exercice 39. Division euclidienne. *Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants.*

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ *et* $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ *et* $B = X^2 - 5X + 4$.

Correction.

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$. *Vérif OK*
2. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9 = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) + (-268X + 261)$. *Vérif OK*

Exercice 40. Restes. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :*

(i) $A = X^n$ *et* $B = X^2 - 3X + 2$

(ii) $A = X^n$ *et* $B = (X-1)^2$

(iii) $A = (X \sin t + \cos t)^n$ *et* $B = X^2 + 1$, *où t est un réel.*

Correction. *Dans chacun des cas, on peut effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $B \in \mathbb{R}[X]$, qui est de degré 2.*
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $A = BQ + R$.
En notant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les coefficients de R, on obtient donc l'égalité

$$A = BQ + \alpha X + \beta, \qquad (*)$$

et il s'agit de déterminer α et β.

(i) *On évalue $(*)$ en 1 et en 2, qui sont les racines de B. On obtient ainsi*

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{et} \qquad 2^n = \alpha \times 2 + \beta.$$

D'où $\underline{\alpha = 2^n - 1}$ et $\underline{\beta = 2 - 2^n}$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est $\boxed{(2^n - 1)X + (2 - 2^n)}$.

(ii) *On évalue $(*)$ en 1, qui est l'unique racine de B. On obtient ainsi*

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Pour exploiter le fait que 1 est racine double de B, on va également dériver la relation $(*)$, puis évaluer la relation dérivée en 1. Ainsi, $nX^{n-1} = A' = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + \alpha$, puis, en évaluant 1, on trouve $\underline{n = \alpha}$. On en déduit $\boxed{\beta = 1 - \alpha = 1 - n}$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est $\boxed{nX + (1 - n)}$.

(iii) *Le polynôme B possède deux racines qui sont cette fois-ci non réelles : il s'agit de $\pm i$.*
En évaluant $(*)$ en i, on obtient

$$(i \sin t + \cos t)^n = \alpha i + \beta \qquad \text{donc} \qquad e^{int} = \alpha i + \beta.$$

(On pourrait également évaluer en $-i$, mais on n'obtiendrait alors rien d'autre que la relation conjuguée, ce qui ne nous apporterait pas de nouvelle information).
Puisque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et par unicité de l'écriture algébrique d'un complexe, on obtient

$$\underline{\alpha = \mathrm{Im}(e^{int}) = \sin(nt)}$$
$$\underline{\beta = \mathrm{Re}(e^{int}) = \cos(nt)}.$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $(X \sin t + \cos t)^n$ par $(X-1)^2$ est $\boxed{\sin(nt)X + \cos(nt)}$.

Exercice 41. Un classique. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ deux scalaires distincts.*

1. *Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.*
2. *Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.*

<u>Correction.</u> *Par DE, il existe (α, β) tel que $P = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$.*

1. *En évaluant en a puis b, on a $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P(b) = \alpha b + \beta$, d'où $\underline{\alpha = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}}$ et $\underline{\beta = \dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}}$. Ainsi, $\boxed{R = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}X + \dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}}$.*
2. *D'une part en évaluant en a, d'autre part en dérivant puis en évaluant en a, on a $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P'(a) = \alpha$, donc $\underline{\alpha = P'(a)}$ et $\underline{\beta = P(a) - aP'(a)}$. Ainsi, $\boxed{R = P'(a)X + P(a) - aP'(a)}$.*

Exercice 42. *Soit $n \geq 2$. On considère les polynômes $A = X^n + 2X - 2$, $B = X(X-1)$ et $C = (X-1)^2$.*

1. *Déterminer le reste R_1 de la division euclidienne de A par B et le reste R_2 de A par C.*
2. *Déterminer les quotients Q_1 et Q_2 de ces divisions.*

<u>Correction.</u>

1. $\deg B = \deg C = 2$ *donc* $\deg(R_1) \leq 1$ *et* $\deg(R_2) \leq 1$ *donc* $R_1 = aX + b$ *et* $R_2 = cX + d$.
   - *$A = BQ_1 + R_1$ implique que $X^n + 2X - 2 = X(X-1)Q_1 + aX + b$.*
     En évaluant en 0, on trouve que $b = -2$.
     En évaluant en 1, on trouve que $a = 3$. Ainsi, $\boxed{R_1 = 3X - 2.}$
   - *$A = BQ_2 + R_2$ implique que $X^n + 2X - 2 = (X-1)^2Q_2 + cX + d$.*
     En dérivant il vient, $nX^{n-1} + 2 = 2(X-1)Q_2 + (X-1)^2Q_2' + c$.
     En évaluant ces deux relations en 1, on obtient : $\begin{cases} c + d = 1 \\ c = n+2 \end{cases}$ donc $c = n+2$ et $d = -(n+1)$.
     Ainsi, $\boxed{R_2 = (n+2)X - (n+1)}$.
2. - *$A - R_1 = X^n - X = X(X^{n-1} - 1) = X(X-1)(X^{n-2} + \cdots + X^2 + X + 1)$. D'autre part, $A - R_1 = X(X-1)Q_1$. Par unicité du quotient dans la DE,* $\boxed{Q_1 = X^{n-2} + \cdots + X^2 + X + 1}$.
   - *$A - R_2 = X^n - nX + (n-1)$.*

Méthode 1. *En commençant la DE de $X^n - nX + (n-1)$ par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, on conjecture que* $Q_2 = X^{n-2} + 2X^{n-3} + 3X^{n-4} + 4X^{n-5} + \cdots + (n-3)X^2 + (n-2)X + (n-1)$. *Autrement dit,*

$$Q_2 = \sum_{k=2}^{n}(k-1)X^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell}.$$

Vérifions notre conjecture !

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell}\right)(X^2-2X+1) &= \sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell+2} - 2\sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell+1} + \sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell} \\ &= \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)X^k - 2\sum_{k=1}^{n+1}(n-k)X^k + \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)X^k \\ &= \sum_{k=2}^{n-2}\underbrace{(n-k+1\ldots)}_{=0}X^k + X^n + 2X^{n-1} - 2X^{n-1} - 2(n-1)X + (n-1) + (n-2)X \\ &= X^n - nX + (n-1) \\ &= A - R_2,\end{aligned}$$

ainsi, $\boxed{Q_2 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-2}(n-\ell-1)X^{\ell}.}$

Méthode 2. *On écrit :*

$$\begin{aligned}A - R_2 = X^n - nX + (n-1) &= (X^n - 1) - n(X-1) \\ &= (X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k\right) - n(X-1) \\ &= (X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k - n\right) \\ &= (X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(X^k-1)\right) = (X-1)\left(\sum_{k=1}^{n-1}(X^k-1)\right) \\ &= (X-1)^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k-1}X^{\ell}\right) \\ &= (X-1)^2 Q_2,\end{aligned}$$

où

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k-1}X^{\ell} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{k}X^{\ell-1} = \sum_{1\le\ell\le k\le n-1}X^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell}^{n-1}X^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)X^{\ell-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)X^k.$$

Factorisation, irréductibilité

Rappels de cours :

- Les associés de P sont les polynômes de la forme αP avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ (P multiplié par un inversible)
- On rappelle la définition d'un polynôme irréductible :

  P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ ssi $\begin{cases} \text{P est non nul, P est non inversible} \\ \text{ses seuls diviseurs sont ceux qu'on ne peut pas éviter} \\ (\textit{i.e.} \text{ les inversibles et les associés de P}). \end{cases}$
- P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ ssi $\begin{cases} \text{P n'est pas constant} \\ \text{si } D|P \text{ alors deg(D) = 0 ou deg(D)=deg(P)} \end{cases}$
- Si $D|P$ avec $0 < \deg(D) < \deg(P)$ alors P n'est pas irréductible.

Exercice 43. Multiplicité et factorisation. *Considérons* $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$.

1. *Montrer que* 1 *est racine de* P *et déterminer son ordre de multiplicité.*
2. *Donner la factorisation de* P *dans* $\mathbb{R}[X]$*, puis dans* $\mathbb{C}[X]$.

Correction.

1. *On a* $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$*, donc* $P(1) = 0$
   Puis $P' = 5X^4 - 16X^3 + 21X^2 - 14X + 4$*, donc* $P'(1) = 0$.
   On a $P'' = 20X^3 - 48X^2 + 42X - 14$*, d'où* $P''(1) = 0$.
   On a $P''' = 60X^2 - 96X + 42$*, d'où* $P'''(1) \neq 0$.
   Ainsi $\boxed{1 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } 3}$.

2. *On déduit de la question précédente l'existence de* $Q \in \mathbb{K}_2[X]$ *tel que* $P = (X-1)^3 Q$.
   En factorisant directement; on obtient $Q = X^2 - X + 1$*. Sinon, en examinant les coefficients dominant et constant, on peut dire que* Q *est de la forme* $X^2 + bX + 1$*, avec* b *à déterminer.*
   On a l'égalité
   $$P = (X-1)^3(X^2 + bX + 1).$$
   Le coefficient en X *du polynôme à droite vaut* $3 - b$.
   Comme le coefficient en X *de* P *vaut* 4*, on a* $4 = 3 - b$*, d'où* $b = -1$.
   Comme le discriminant de $X^2 - X + 1$ *est strictement négatif (ou ses racines sont* $-j$ *et* $-\bar{j}$*, qui sont dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*), ce polynôme est irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$*, donc la factorisation de* P *dans* $\mathbb{R}[X]$ *est*
   $$\boxed{P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)},$$
   sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ *est*
   $$\boxed{P = (X-1)^3(X+j)(X+j^2)}.$$

Exercice 44. Une divisibilité en deux preuves. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$. On pourra proposer deux preuves différentes (l'une qui explicite le quotient, l'autre avec un critère sur la multiplicité d'une racine).*

Première preuve. *On utilise la formule du binôme de Newton :*

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in \mathbb{K}[X]},\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{ce polynôme est divisible par } X^2}$.

Deuxième preuve. *Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On a*

- ⋆ $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, *donc* 0 *est racine de* P ;
- ⋆ $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, *donc* $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

Donc $\underline{0 \text{ est racine de multiplicité au moins } 2}$, d'où $\boxed{X^2 \text{ divise } P}$.

Exercice 45. Factorisations. *Décomposer en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.*

1. $P_1 = X^3 - 3$.
2. $P_2 = X^6 + 1$.
3. $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.
4. $P_4 = X^n - 1$, $n \geq 2$

Correction.

1. *Soit $a \in \mathbb{C}$.*

$$\begin{aligned} a \text{ est racine de } P_1 &\Leftrightarrow a^3 = 3 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{3}} \in \mathbb{U}_3 = \left\{1, j, \bar{j}\right\} \\ &\Leftrightarrow a \in \left\{\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}j,\ \sqrt[3]{3}\ \bar{j}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, la factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_1 est :

$$\underline{P_1 = (X - \sqrt[3]{3})(X - \sqrt[3]{3}j)(X - \sqrt[3]{3}\ \bar{j})},$$

et la factorisation dans $\mathbb{R}$ de P_1 est : $P_1 = (X - \sqrt[3]{3})\left(X^2 - 2\sqrt[3]{3}\mathrm{Re}(j)X + 3^{2/3}\right)$, *où* $\mathrm{Re}(j) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, *donc*

$$\boxed{P_1 = (X - \sqrt[3]{3})\left(X^2 + \sqrt[3]{3}X + 3^{2/3}\right).}$$

Ou bien : *on remarque que* $\sqrt[3]{3}$ *est racine évidente et on factorise à l'aide de la formule de Bernoulli.*

2. *Soit* $a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} a \text{ est racine de } P_2 &\Leftrightarrow a^6 = -1 \\ &\Leftrightarrow a \in \left\{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \mid k \in [\![0,5]\!]\right\} \\ &\Leftrightarrow a \in \left\{e^{\frac{i\pi}{6}},\ i,\ e^{\frac{i5\pi}{6}},\ e^{\frac{-i5\pi}{6}},\ -i,\ e^{\frac{-i\pi}{6}}\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, la factorisation dans $\mathbb{C}$ *de* P_2 *est :*

$$\underline{P_2 = (X-i)(X+i)(X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{-i\pi}{6}})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X - e^{\frac{-5i\pi}{6}})},$$

et la factorisation dans $\mathbb{R}$ *de* P_2 *est :* $P_2 = (X^2+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)X + 1\right)$, *où* $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc*

$$\boxed{P_2 = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)}.$$

3. *On a* $P_3 = Q(X^3)$, *avec* $Q := X^3 + X^2 + X + 1$.
Or, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z^4 = 1 \text{ et } z \neq 1\right) \Leftrightarrow z \in \{-1, i, -i\},$$

donc $Q = (X+1)(X-i)(X+i)$ *d'où*

$$\underline{P_3 = (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i) = (X^3+1)(X^6+1) = (X^3+1)P_2}.$$

Or, $\underline{X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)}$ *et d'après la question précédente,* $\underline{P_2 = (X^2+1)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)}$ *donc finalement :*

$$\boxed{P_3 = (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)}.$$

4. *Notons* $z_0, \dots, z_{n-1}$ *les* n *racines de l'unité, avec* $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. *Dans* $\mathbb{C}[X]$, *on a donc la factorisation*

$$\underline{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}.$$

Remarquons que :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \overline{z_k} = \overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\left(-\frac{2k\pi+2n\pi}{n}\right)} = z_{n-k}}.$$

- *Si $n = 2p+1$, on a :*

$$X^{2p+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2p} (X - z_k) = (X-1) \prod_{k=1}^{p} (X - z_k) \prod_{k=p+1}^{2p} (X - z_k).$$

Avec le changement d'indice $\ell = 2p+1-k$ dans le 2ème produit et la remarque précédente, on obtient :

$$\prod_{k=p+1}^{2p} (X - z_k) = \prod_{\ell=1}^{p} (X - z_{2p+1-\ell}) = \prod_{\ell=1}^{p} (X - \overline{z_\ell}).$$

Finalement,

$$\boxed{X^{2p+1} - 1} = (X-1) \prod_{k=1}^{p} \left[(X - z_k)\left(X - \overline{z_k}\right)\right] = \boxed{(X-1) \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) X + 1\right)}.$$

- *Si $n = 2p$, on a :*

$$X^{2p} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)(X+1) \prod_{k=p+1}^{2p-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right).$$

Le changement d'indice $\ell = 2p-k$ dans le deuxième produit donne :

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)\left(X - e^{-i\frac{k\pi}{p}}\right),$$

donc :

$$\boxed{X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) X + 1\right).}$$

Exercice 46. Dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. *Est-ce qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{R}$ est irréductible ?*
2. *Montrer que $X^2 - 2$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*
3. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 3, sans racine dans $\mathbb{Q}$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*

Correction.

1. *Non, $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)\underbrace{(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}_{\in\mathbb{R}[X]}$, est sans racine réelle, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.*

2. - *$X^2-2=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, avec $X+\sqrt{2}$ et $X-\sqrt{2}\in\mathbb{R}[X]$ non constants, donc* $\boxed{X^2-2 \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{R}[X]}$.
   - $\boxed{X^2-2 \text{ est irréductible dans } \mathbb{Q}[X]}$ *car de degré 2 sans racine dans $\mathbb{Q}$ (en effet, X^2-2 a deux racines dans $\mathbb{R}$ et elles sont dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

3. - *P est non constant, car $\deg(P)=3$.*
   - *Soient $A,B\in\mathbb{Q}[X]$ tels que $P=AB$.*
     En passant au degré : $3=\deg(P)=\deg(A)+\deg(B)$ donc $\deg(A)\in\{0,1,2,3\}$.
     - *Si $\deg(A)=1$, alors A possède une racine dans $\mathbb{Q}$ et P aussi, ce qui est absurde, donc $\deg(A)\neq 1$.*
     - *Si $\deg(A)=2$, alors $\deg(B)=1$ et de même B et P aurait une racine dans $\mathbb{Q}$, ce qui est exclu, donc $\deg(A)\neq 2$.*
     - *Ainsi $\deg(A)\in\{0,3\}$, i.e. $A\in\mathbb{Q}^*$ ou $B\in\mathbb{Q}^*$.*

   En conclusion, $\boxed{P \text{ est irréductible dans } \mathbb{Q}[X]}$.

Exercice 47. Factorisation.

1. *Décomposer $P=X^5-1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Donner une expression algébrique de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.*
3. *Montrer que $Q=X^4+X^3+X^2+X+1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*

Correction.

1. *La décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de P est :*

$$P=X^5-1=(X-1)(X-e^{i2\pi/5})(X-e^{i4\pi/5})(X-e^{-i4\pi/5})(X-e^{-i2\pi/5}),$$

   donc celle dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{P=(X-1)\ (X^2-2\cos(2\pi/5)X+1)\ (X^2-2\cos(4\pi/5)X+1)}.$$

2. *On a aussi :*

$$P=X^5-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1).$$

   Par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, et puisque $X-1\neq 0$, on en déduit que

$$Q=X^4+X^3+X^2+X+1=(X^2-2\cos(2\pi/5)X+1)\ (X^2-2\cos(4\pi/5)X+1).$$

   Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on a alors :

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}\quad \text{et}\quad \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}.$$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ sont donc les deux racines de $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$ i.e. $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Or, $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ donc $\boxed{\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$ puis $\boxed{\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}}$.

3. *Déjà $Q=X^4+X^3+X^2+X+1$ est <u>non constant</u>.*
   Ensuite, soit $(A,B)\in\mathbb{Q}[X]^2$ tel que $Q=AB$.
   En passant au degré, on obtient : $4=\deg(A)+\deg(B)$.
   On remarque que $\deg(A)\in[\![0,4]\!]$.
   D'après les questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X-e^{i2\pi/5})(X-e^{i4\pi/5})(X-e^{-i4\pi/5})(X-e^{-i2\pi/5}) \quad \textit{décompo en irréductibles de } \mathbb{C}[X] \\ &= (X^2-2\cos(2\pi/5)X+1)\ (X^2-2\cos(4\pi/5)X+1) \quad \textit{décompo en irréductibles de } \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

- *Si $\deg(A)=1$ ou $\deg(A)=3$, alors A ou B est un polynôme de degré 1 et P aurait une racine dans $\mathbb{Q}$, ce qui est absurde (car les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont $e^{i2\pi/5}$, $e^{i4\pi/5}$, $e^{-i4\pi/5}$ et $e^{i2\pi/5}$ et aucune n'est réelle, et encore moins rationnelle).*
- *Si $\deg(A)=2$, alors $\deg(B)=2$. De plus, A et B sont sans racine réelle (sinon, Q aurait une racine réelle, ce qui n'est pas), donc A et B sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc deux décompositions de Q en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:*

  $$Q=AB=(X^2-2\cos(2\pi/5)X+1)\ (X^2-2\cos(4\pi/5)X+1).$$

  L'unicité de la décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (à l'ordre près des facteurs et à une multiplication par une constante non nulle près), nous indique qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^*$ tel que :

  $$A=\alpha(X^2-2\cos(2\pi/5)X+1) \text{ et } B=\beta(X^2-2\cos(4\pi/5)X+1).$$

  SPG, on peut supposer que A est unitaire. Alors $\alpha=1$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient $-2\cos(2\pi/5)\in\mathbb{Q}$.
  Donc, d'après la question 2., $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{Q}$. Or, $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est stable par différence donc $\frac{\sqrt{5}}{2}\in\mathbb{Q}$, puis $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$, ce qui est absurde (exercice classique).
- *Finalement, $\deg(A)=0$ ou $\deg(A)=4$, donc <u>$A\in\mathbb{Q}^*$ ou bien $B\in\mathbb{Q}^*$</u>.*

Ainsi, $\boxed{Q \text{ est irréductible dans } \mathbb{Q}[X]}$.

Relation coefficient-racine

Exercice 48. Système non linéaire. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *le système* $(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4xy+3y & = & -5 \\ x-2xy+y & = & 5 \end{array}\right.$.

Correction. *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. On a :*

$$\begin{aligned}(S) &\underset{L_1\leftarrow L_1-3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 10xy=-20 \\ x-2xy+y=5 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+\frac{1}{5}L_1 \\ L_1\leftarrow L_1/10}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont les racines du polynôme } X^2-X-2=(X+1)(X-2).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de } (S) \text{ sont } (-1,2) \text{ et } (2,-1)}$.

Exercice 49. Les sommes de Newton. *Soit* $P=aX^3+bX^2+cX+d$ *un polynôme de degré 3 à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *(donc* $a\neq 0$*).*
On suppose que P *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et on note* x,y *et* z *ses racines.*
On pose

$$\sigma_1=x+y+z \qquad \sigma_2=xy+xz+yz \qquad \sigma_3=xyz$$

1. *Exprimer les quantités* σ_1, σ_2 *et* σ_3 *en fonction de* a,b,c *et* d.
2. *Exprimer les quantités* $x^2+y^2+z^2$ *et* $x^3+y^3+z^3$ *en fonction de* σ_1, σ_2 *et* σ_3.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{C}^3$ *le système* $(S) : \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20. \end{cases}$

Correction.

1. *D'après le cours (relation coefficients-racines), on a* $\sigma_1=\dfrac{-b}{a}$*, puis* $\sigma_2=\dfrac{c}{a}$ *et* $\sigma_3=\dfrac{-d}{a}$.
2. *Vous devez trouver* $x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ *et* $x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.
3. *On doit trouver* 6 *solutions. L'une d'entre elles est* $(1,-2,3)$*, je vous laisse deviner les 5 autres.*

Exercice 50. Système hautement non linéaire. *Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système* (S) : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases}$.

Correction. *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ yz+xz+xy=-4 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \text{x, y, z sont racines de } X^3-X^2-4X+4$$

Le polynôme X^3-X^2-4X+4 admet 1 comme racine évidente, donc est factorisable par $X-1$.
En factorisant directement, on trouve que

$$X^3-X^2-4X+4 \;=\; (X-1)(X^2-4).$$

Donc les racines de ce polynôme sont $1, 2, -2$.
Il y a donc 6 triplets solutions :

$$(1,2,-2) \quad ; \quad (1,-2,2) \quad ; \quad (2,-2,1) \quad ; \quad (2,1,-2) \quad ; \quad (-2,2,1) \quad ; \quad (-2,1,2).$$

Exercice 51. *Soit $P = X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Notons x_1, x_2, x_3 les racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$. Caractériser à l'aide de p et q la condition $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -3$.*

Correction.

- *P est unitaire, de degré 3, et a pour racines simples x_1, x_2, x_3 donc*

$$P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3,$$

avec

$$\sigma_1 := x_1 + x_2 + x_3, \quad \sigma_2 := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad \sigma_3 := x_1x_2x_3.$$

On a aussi $P = X^33 + pX + q$. Par unicité des coefficients du polynôme P, on a

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = p \qquad \sigma_3 = -q.$$

- *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $P(x_i) = 0$ donc $x_i^3 = -px_i - q$ puis $\underline{x_i^4 = -px_i^2 - qx_i}$.*
Donc

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3) = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q\sigma_1 \\ &= -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \end{aligned}$$

Or, classiquement, $\sigma_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\sigma_2$, donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2p$.
Ainsi, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -p(-2p) = 2p^2$, d'où

$$\boxed{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -3 \iff p^2 = \frac{-3}{2} \iff p \in \left\{\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}}.$$

Exercice 52. Un système non linéaire. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, le système* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$.

Correction. *Procédons par analyse-synthèse.*

- *Supposons qu'il existe un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ solution du système.*
Posons

$$P := (X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3,$$

avec

$$\sigma_1 = x + y + z = 3, \quad \sigma_2 = xy + xz + yz = 2, \quad \sigma_3 = xyz.$$

Déterminons σ_3.

Méthode 1. *Pour cela, trouvons une relation entre $x^3 + y^3 + z^3$, σ_1, σ_2 et σ_3. On a :*

$$\sigma_1^3 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz.$$

Or,

$$\begin{aligned}x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y &= xy\left[(x+y+z)-z\right]+xz\left[(x+y+z)-y\right]+yz\left[(x+y+z)-x\right]\\ &= xy\left[\sigma_1-z\right]+xz\left[\sigma_1-y\right]+yz\left[\sigma_1-x\right]\\ &= (xy+xz+yz)\sigma_1-3xyz\\ &= \sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.\end{aligned}$$

Donc $\sigma_1^3=(x^3+y^3+z^3)+3\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$ *puis* $\underline{3\sigma_3=(x^3+y^3+z^3)-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2=0}$ *d'où* $\boxed{\sigma_3=0}$.

Méthode 2. *On peut aussi partir de* $P(x)=P(y)=P(z)=0$ *pour en déduire une expression de* $x^3+y^3+z^3$ *à l'aide des fonctions symétriques élémentaires.*
En effet,

$$x^3=\sigma_1x^2-\sigma_2x+\sigma_3,\ \ y^3=\sigma_1y^2-\sigma_2y+\sigma_3\ \ \text{et}\ \ z^3=\sigma_1z^2-\sigma_2z+\sigma_3.$$

En sommant, on obtient :

$$x^3+y^3+z^3=\sigma_1(x^2+y^2+z^2)-\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Or, classiquement, $x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ *donc*

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\\ x^3+y^3+z^3&=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.\end{aligned}$$

D'où

$$3\sigma_3=(x^3+y^3+z^3)-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2=0.$$

Ainsi,

$$P=X^3-3X^2+2X=X(X^2-3X+2)=X(X-1)(X-2),$$

et x,y,z *sont les trois racines de* P *donc* $\underline{\{x,y,z\}=\{0,1,2\}\text{ avec les 6 combinaisons possibles.}}$

- *Réciproquement, les 6 triplets* $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ *tels que* $\{x,y,z\}=\{0,1,2\}$ *sont solutions du système.*
- *En conclusion, le système possède 6 triplets solutions :*

$$\boxed{\{(0,1,2),(0,2,1),(1,0,2),(1,2,0),(2,0,1),(2,1,0)\}}.$$

Exercice 53. Relation coefficients-racines.
Trouver toutes les racines complexes du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant que deux de ses racines ont une somme égale à 2.

Comme le coefficient de X^3 est nul, la somme des quatre racines vaut 0 ; si la somme de deux racines vaut 2, la somme des deux autres vaut -2 et le polynôme s'écrit sous la forme :

$$P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4) = (X^2 - 2X + p)(X^2 + 2X + q),$$

avec $(p, q) \in \mathbb{C}^2$.
L'unicité des coefficients constant, de degré 1 et 2 donnent : $pq = -5$, $p - q = 6$ et $p + q - 4 = 0$. Ainsi, $\underline{(p = 5 \text{ et } q = -1)}$, si bien que

$$P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1).$$

Il reste ensuite deux équations du second degré à résoudre.
$\boxed{\text{On trouve que les quatre racines complexes de } P \text{ sont } -1 + \sqrt{2},\ -1 - \sqrt{2},\ 1 + 2i \text{ et } 1 - 2i}$.
Remarque. *Les deux dernières racines de P sont complexes conjuguées car $P \in \mathbb{R}[X]$.*

Décomposition en éléments simples

Exercice 54. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Calculer la dérivée n-ième de f_n.*

- *f_n est une fonction rationnelle à pôles simples définie sur $\mathbb{R} \setminus [\![-n, 0]\!]$. Il existe donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \notin [\![-n, 0]\!]$,*
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x + k}.$$
- *D'une part, pour tout $k \in [\![-n, 0]\!]$, $a_k = \dfrac{1}{(-k)(-k+1)\dots(-1)(1)(2)\dots(n-k)} = \dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$.*
- *D'autre part, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{x+k}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+k)^{n+1}}$*
- *Ainsi* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![-n, 0]\!],\ f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{(x+k)^{n+1}}}$.

Exercice 55. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k-1}{k(k+2)} 3^{k-1}.$$

Correction.

- $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$ *est une fonction rationnelle à pôles simples, de partie entière nulle, donc il existe* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

On trouve $a = 1/2$, $b = -1$ *et* $c = 1/2$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) && \text{par télescopages} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)}}.$$

- *La fonction rationnelle à pôles simples* $x \mapsto \dfrac{4x-1}{x(x+2)}$ *a une partie entière nulle donc s'écrit sous la forme* $x \mapsto \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2}$, *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *On trouve* $\underline{a = -1/2}$ *et* $\underline{b = 9/2}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1/2}{k} + \frac{9/2}{k+2}\right)3^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3^{k-1}}{k} + \frac{3^{k+1}}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{3}{2} + \frac{3^n}{n+1} + \frac{3^{n+1}}{n+2}\right) && \text{télescopage à 2 crans} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} + \frac{3^n}{n+1} + \frac{3^{n+1}}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{T_n = -\frac{5}{4} + \frac{3^n}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{3}{n+2}\right)}$.

Exercice 56. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé dont les racines distinctes sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et leurs multiplicités respectives sont $m_1, \dots, m_n$. Pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, donner une expression simplifiée de $\frac{P'(x)}{P(x)}$.* **Indication :** *ne chercher pas à appliquer un théorème de décomposition en éléments simples, mais exprimer simplement P' à partir de la forme factorisée de P.*

Correction. *En notant $\lambda \in \mathbb{K}^*$ le coefficient dominant de P, on dispose de l'expression factorisée suivante :*

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

En utilisant la règle de dérivée d'un produit, on obtient :

$$P' = \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(m_k (X - \alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{\ell \neq k} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell} \right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, on obtient alors : $\boxed{\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{x - \alpha_k}}$.

Exercice 57. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^n - 1}$.*

1. *Décomposer F_n en éléments simples sur $\mathbb{C}$.*

   Correction. *F_n est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_n$. Posons $P_n : z \mapsto 1$ et $Q_n : z \mapsto z^n - 1$ de sorte que $F_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.*

   F_n est une fonction rationnelle à pôles simples dans $\mathbb{C}$ (ses racines sont les $\omega_k := e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$), et de partie entière nulle. Par théorème, on sait qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

   $$F_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z - \omega_k},$$

   où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

   $$a_k = \frac{P_n(\omega_k)}{Q_n'(\omega_k)} = \frac{1}{n\,(\omega_k)^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\,(\omega_k)^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

   Donc

   $$\boxed{F_n : z \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \text{ (D.E.S. sur } \mathbb{C})}.$$

2. *En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F_{2n}.*

Correction. *Nous avons déjà calculé la décomposition en éléments simples de F_{2n} sur $\mathbb{C}$. La fonction rationnelle F_{2n} admet -1 et 1 pour seuls pôles réels, les autres peuvent être regroupés par paires de conjugués.*
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. D'après 1., on a :

$$\begin{aligned}
F_{2n}(x) &= \frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n}}}{x-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n}}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}}{x-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}} \\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}}{x-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}}{x-\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2n(x-1)} - \frac{1}{2n(x+1)} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{\left(x-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(x-\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)} \\
&= \frac{1}{2n(x-1)} - \frac{1}{2n(x+1)} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}x-2}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1} \\
&= \frac{1}{2n(x-1)} - \frac{1}{2n(x+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}x-1}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples de F_{2n} sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{F_{2n} : x \mapsto \frac{1}{2n(x-1)} - \frac{1}{2n(x+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}x-1}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1}}.$$

Exercice 58. Dérivées d'arctan**.**

1. *Justifier que la fonction* arctan *est dérivable et rappeler comment on obtient l'ex- pression de sa dérivée. En déduire que* arctan *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n de degré au plus n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer P_{n+1} à l'aide de P_n et P_n'.*
3. *Via une décomposition en éléments simples de $\arctan'(x)$, obtenir, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $P_n(x)$.*

Correction.

1. *La restriction de la fonction* tan *à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est (continue), strictement croissante, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi sa fonction réciproque est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Méthode 1. *Comme la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$*

qui ne s'annule pas. Comme cette dernière est la dérivée de arctan, *on en déduit que* arctan *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
Méthode 2. *Étant donné que la restriction de la fonction* tan *à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *est* $\mathscr{C}^\infty$ *et que sa dérivée ne s'annule pas, sa fonction réciproque,* arctan, *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. **Unicité.** *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si un polynôme* P_n *vérifie la propriété précédente, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)^{n+1} \arctan^{(n+1)}(x) = P_n(x).$$

Cela prouve l'unicité de la fonction polynomiale $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P_n(x) \end{array}$ *, donc l'unicité du polynôme* P_n.

Existence. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$.

- *La propriété est vraie pour* $n = 0$ *puisque* $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *et ainsi le polynôme* $P_0 = 1$ *répond au problème.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* H_n. *Il existe donc un polynôme* P_n *de degré au plus* n *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.
En dérivant cette relation (on sait que les fonctions sont dérivables) on obtient pour tout $x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n+2)}(x) = \dfrac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$. · *Par suite en posant* $\boxed{P_n + 1 = (1+X^2)P_n' - 2(n+1)XP_n}$, *on a* $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n+2)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$. ·
Comme par hypothèse on a $\deg(P_n) \leq n$, *on en déduit :*
  - *d'abord* $\deg(P_n') \leq n-1$ *et donc* $\deg((1+X^2)P_n') \leq n+1$ *;*
  - *puis* $\deg(2(n+1)XP_n) \leq n+1$ *;*

  On a alors $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$, *ce qui termine la démonstration de l'hérédité, et conclut la récurrence.*

3. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right).$$

En utilisant alors le résultat de la question précédente (avec $a = -i$ *et* $a = i$*), on obtient, pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\begin{aligned} \arctan^{(n+1)}(x) &= \frac{i}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{i(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{i(-1)^n n!}{2}\left(\frac{(x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P_n = \dfrac{i(-1)^n n!}{2}\left((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}\right)}$.

Gros exercices

Exercice 59. Un classique.

1. *Soit* $G = \left\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2-1)Q' = 2XQ\right\}$.
   (a) *Soit* $Q \in G \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. *En examinant les coefficients dominants, montrer que* $\deg Q = 2$.
   (b) *Montrer que* G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$ *et en déterminer une base.*
2. *Dans la suite, on suppose que* $n \geqslant 3$. *On pose* $E = \mathbb{R}_n[X]$.
   On considère l'application $f : P \mapsto \dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$.
   (a) *Montrer que* f *est un endomorphisme de* E.
   (b) *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ *(on pourra utiliser judicieusement la question 1).*
   (c) *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker} f$.
   (d) *Ici,* $n = 3$.
      i. *En concaténant les bases précédentes, montrer que* $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker} f$.
      ii. *Déterminer un polynôme annulateur pour* f.

Correction.

1. (a) *Notons* $n = \deg Q$ *(licite, car* Q *est non nul) donc* $Q = a_nX^n + \cdots$ *avec* $a_n \neq 0$.
   En examinant le terme de degré $n+1$ *de chaque côté de l'égalité* $(X^2-1)Q' = 2XQ$, *on obtient* $na_n = 2a_n$.
   En divisant par $a_n \neq 0$, *on a* $n = 2$.
   (b) **Méthode 1.** *D'après la question précédente, il suffit de chercher* $Q \in G$ *parmi les polynômes de degré* $\leqslant 2$.
   Soit donc $Q = aX^2 + bX + c$. *Raisonnons par analyse-synthèse.*
   Analyse.

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a } (X^2-1)Q' = 2XQ \quad \text{donc} & (X^2-1)(2aX+b) & = & 2X(aX^2+bX+c) \\ \text{donc} & 2aX^3 + bX^2 - 2aX - b & = & 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX \end{array}$$

   Par unicité des coefficients/par liberté de $(1, X, X^2)$, *on a donc*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & 2a \\ b & = & 2b \\ -2a & = & 2c \\ -b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} a & & + \; c & = & 0 \\ & b & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \quad Q = aX^2 - a$$

$$\text{donc} \quad Q \text{ est de la forme } a(X^2-1).$$

   Synthèse. *Vérifions qu'un polynôme* Q *de la forme* $a(X^2-1)$ *est solution.*
   Le membre gauche vaut $(X^2-1)Q' = (X^2-1) \times 2aX$

Le membre droit vaut $2XQ = 2X \times a(X^2 - 1)$
Les deux membres sont égaux, donc Q est solution !

Au lieu de raisonner par analyse-synthèse, on peut raisonner par équivalences, mais c'est dangereux pour un élève. Faites-moi confiance !
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(X^2-1)Q' = 2XQ &\iff (X^2-1)(2aX+b) = 2X(aX^2+bX+c)\\
&\iff 2aX^3 + bX^2 - 2aX - b = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX\\
&\iff \begin{cases} 2a &= 2a\\ b &= 2b\\ -2a &= 2c\\ -b &= 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a + \quad + c = 0\\ b = 0 \end{cases}\\
&\iff Q = aX^2 - a\\
&\iff Q \text{ est multiple de } X^2 - 1
\end{aligned}$$

Méthode 2. *Cette méthode ne passe pas par l'unicité des coefficients, mais par l'utilisation des racines des différents polynômes.*
Analyse. *Soit $Q \in G$. Alors $(X^2-1)Q' = 2XQ$.*
Evaluons cette égalité en 1 et en -1.
On obtient $Q(1) = 0$ et $Q(-1) = 0$.
Donc 1 et -1 sont racines de Q.
Comme Q est de degré au plus 2, on a $Q = \alpha(X-1)(X+1) = \alpha(X^2-1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Synthèse. *Réciproquement, on vérifie facilement qu'un multiple de $X^2 - 1$ est dans G.*

2. (2a) $\triangleright$ *On s'assure que f envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ (ce qui n'est, a priori, pas une évidence).*
Ici, ce n'est pas difficile, car chaque terme de $f(P)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$. En effet, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\deg(P) \leqslant n \qquad \deg(-XP') = 1 + \deg P' \leqslant 1 + (n-1) = n \qquad \deg\left(\frac{1}{2}(X^2-1)P''\right) = 2 + \deg P'' \leqslant 2 + (n-2) = n$$

Comme $\deg(f(P)) \leq \max($les trois degrés ci-dessus$)$, on a $\deg(f(P)) \leqslant n$.

$\triangleright$ *Linéarité de f. À vous.*

(2b) *Raisonnons par analyse-synthèse.*
Analyse. *Soit $P \in E$ vérifiant $f(P) = P$.*
On a alors $\frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = P$, d'où $\frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' = 0$ d'où $(X^2-1)P'' = 2XP'$.
Ainsi, P' est dans G. D'après la question 1), on en déduit que P' s'écrit $a(X^2-1)$.
Ainsi, P s'écrit $a(\frac{1}{3}X^3 - X) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Synthèse. *Vérifions qu'un polynôme P de la forme $a(\frac{1}{3}X^3 - X) + c$ vérifie $f(P) = P$.*
Calculons $f(P)$.

Faisons un petit calcul préparatoire en calculant $f(\frac{1}{3}X^3 - X)$ et $f(X^0)$. Je vous laisse faire.
On a

$$f(P) \ = \ f\Big(a(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + c\Big) \ = \ af(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + cf(X^0) \ = \ a(\tfrac{1}{3}X^3 - X) + cX^0 \ = \ P$$

(2c)
- *Soit $P \in E$ vérifiant $\dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.*
  On peut supposer P non nul. Ainsi $P = a_d X^d + \dots$ ***avec*** *$a_d \neq 0$.*
  En examinant le terme en X^d de l'égalité, on obtient $\dfrac{1}{2}d(d-1)a_d - da_d + a_d = 0$.
  D'où $d^2 - 3d + 2 = 0$. Ainsi $d = 1$ ou $d = 2$.
  On vient de montrer que $\deg P = 1$ ou $\deg P = 2$.
  Ceci constitue une première étape. Attaquons la deuxième étape de la preuve.
  Avec la condition sur le degré, on en déduit que dans tous les cas, P est de la forme $aX^2 + bX + c$ (avec a nul si $\deg P = 1$ et $a \neq 0$ si $\deg P = 2$).
  On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad &\text{donc} \quad \frac{1}{2}(X^2-1)(2a) - X(2aX+b) + (aX^2+bX+c) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\text{donc} \quad (\tfrac{1}{2}2a - 2a + a)X^2 \ + \ (-b+b)X \ + \ (-\tfrac{1}{2}2a + c) = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

  Par unicité des coefficients, on obtient donc :

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -a+c &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{donc} \quad P = aX^2 + bX + a \\ &\text{donc} \quad P = a(X^2+1) + bX \\ &\text{donc} \quad P \text{ est combinaison linéaire de } X^2+1 \text{ et } X \end{aligned}$$

- *Réciproquement, vérifions qu'un polynôme P combinaison linéaire de X^2+1 et X est solution, c'est-à-dire vérifie $f(P) = 0$.*
  Commençons par un petit calcul préparatoire en calculant $f(X^2+1)$ et $f(X)$. Vous devez trouver 0.
  Écrivons P sous la forme $a(X^2+1) + bX$.
  On a alors

$$f(P) = f\Big(a(X^2+1) + bX\Big) \ = \ af(X^2+1) + bf(X) \ = \ a \cdot 0 + b \cdot 0 \ = \ 0.$$

Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2+1, X)}$.

(2d) *A faire.*

Exercice 60. Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. *Soit $n \geq 2$.*

Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ P_k = \dfrac{1}{k!} X(X-k)^{k-1}. \end{cases}$

1. *Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.*
2. *Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*
3. *Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Vérifier que $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.*
4. *Soit f l'application définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par $f : P \longmapsto P(X) - P'(X+1)$.*
   - *(4a) Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.*
   - *(4b) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathcal{F}$.*
   - *(4c) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.*
   - *(4d) Montrer que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.*
   - *(4e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.*
5. *En introduisant l'endomorphisme $g = \mathrm{Id} - f$, démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X], \quad f^m(P) \;=\; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i),$$

   où $P^{(i)}$ désigne le polynôme dérivé $i^{\text{ème}}$ de P.

Correction.

1. **Méthode 1.** *On veut montrer que* $\boxed{\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \mathbb{K}_n[X]}$.
   L'inclusion non évidente est $\supset$ et cette inclusion revient à montrer que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad X^k \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})\,.$$

   Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la propriété $\mathcal{H}_k$: « $X^k \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ » est vraie, par récurrence forte, finie, sur k.

   Initialisation. *La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie car X^0 vaut P_0 qui est bien dans $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.*

   Hérédité. *Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que les propriétés $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_k$ sont vraies.*
   Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.
   On a l'égalité

$$P_{k+1} \;=\; \frac{1}{(k+1)!} X(X-(k+1))^k \;=\; \frac{1}{(k+1)!}\Big[X^{k+1} + R\Big] \quad \textit{avec } R \textit{ de degré} \leq k$$

   Ainsi

$$X^{k+1} \;=\; (k+1)!\, P_{k+1} \;-\; R \qquad (\bigstar)$$

   - *Le polynôme R est de degré $\leq k$, donc est combinaison linéaire de $X^0, \ldots, X^k$.*
   D'après $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_k$, on en déduit que R est dans $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.
   - *Le polynôme P_{k+1} est un polynôme de la famille $\mathcal{F}$, donc est a fortiori dans $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.*

   L'égalité $(\bigstar)$ et les deux points • précédents montrent que X^{k+1} est dans $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.
   On a donc l'hérédité, ce qui clôt la récurrence et la question.

Méthode 2. *Pour cela, on se donne un polynôme Q quelconque de $\mathbb{K}_n[X]$.*
On cherche à montrer que Q est combinaison linéaire des polynômes $P_0, \ldots, P_n$.
Autrement dit, on cherche à montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = Q.$$

Par unicité des coefficients en $X^0, X^1, \ldots, X^n$ de cette égalité, cela revient à montrer l'existence de scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ vérifiant le système

$$\begin{cases} \lambda_0 \mathit{coeff}_{X^0}(P_0) + \lambda_1 \mathit{coeff}_{X^0}(P_1) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^0}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^0}(Q) \\ \lambda_0 \mathit{coeff}_{X^1}(P_0) + \lambda_1 \mathit{coeff}_{X^1}(P_1) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^1}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^1}(Q) \\ \vdots \\ \lambda_0 \mathit{coeff}_{X^n}(P_0) + \lambda_1 \mathit{coeff}_{X^n}(P_1) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^n}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^n}(Q) \end{cases}$$

En fait, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\deg P_k = k$, donc on obtient le système triangulaire suivant

$$\begin{cases} \lambda_0 \mathit{coeff}_{X^0}(P_0) + \lambda_1 \mathit{coeff}_{X^0}(P_1) + \lambda_2 \mathit{coeff}_{X^0}(P_2) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^0}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^0}(Q) \\ \qquad \lambda_1 \mathit{coeff}_{X^1}(P_1) + \lambda_2 \mathit{coeff}_{X^1}(P_2) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^1}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^1}(Q) \\ \qquad\qquad \lambda_2 \mathit{coeff}_{X^2}(P_2) + \cdots + \lambda_n \mathit{coeff}_{X^2}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^2}(Q) \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \lambda_n \mathit{coeff}_{X^n}(P_n) = \mathit{coeff}_{X^n}(Q) \end{cases}$$

Dans notre exercice, on a $\quad \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathit{coeff}_{X^k}(P_k) = \dfrac{1}{k!}$
Le système précédent s'écrit matriciellement :

matrice triangulaire avec une belle diagonale à dessiner : à vous de faire le dessin

La matrice qui intervient est triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible.
Donc en inversant la matrice, on obtient des λ_i en fonction des coefficients de Q tels que...

Bilan : la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
Remarque. *Avec cette méthode, on a même montré que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

2. *D'après la question précédente, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, $\mathcal{F}$ est une famille libre (en tant que famille de polynômes non nuls, à degrés échelonnés puisque $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$). Donc, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X]}$.*

3.
   - *Pour $k = 1$, on a $P_1'(X+1) = 1 = P_0(X)$.*
   - *Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a*

$$P_k'(X+1) = \frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}(X+1)(X+1-k)^{k-2} = \frac{1}{(k-1)!} X (X+1-k)^{k-2} = P_{k-1}.$$

4. (4a) *On remarque que* $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - g$ *où* $g : P \mapsto P'(X+1)$, *et* $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$.
Il suffit de montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$. *Et ce n'est pas trop dur ! A FAIRE. Ainsi, par différence,* $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$.

(4b)
- *On a* $\boxed{f(P_0) = P_0}$.
- *Pour* $k \in [\![1, n]\!]$, *on a* $f(P_k) = P_k - P_k'(X+1) = P_k - P_{k-1}$. *Donc,* $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(P_k) = P_k - P_{k-1}}$.

(4c) *Notons* $\forall k \in [\![1, n]\!],\ Q_k = P_k - P_{k-1}$ *et* $Q_0 = P_0$.
Montrons que $(Q_0, \dots, Q_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$.
On remarque que

$$P_0 = Q_0 \qquad P_1 = Q_0 + Q_1 \qquad P_2 = Q_0 + Q_1 + Q_2 \qquad \dots \qquad P_n = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n,$$

ce qui prouve que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P_k \in \mathrm{Vect}\,(Q_0, \dots, Q_n)$.
Puis que $\mathrm{Vect}\,(P_0, \dots, P_n) \subset \mathrm{Vect}\,(Q_0, \dots, Q_n)$.
Puisque $(P_0, \dots, P_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$, *on a* $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \subset \mathrm{Vect}\,(Q_0, \dots, Q_n)}$.
De plus, puisque $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg P_k = k$, *on a immédiatement* $\deg Q_k = k$, *ce qui montre que* $\boxed{(Q_0, \dots, Q_n) \text{ est une famille de polynômes de } \mathbb{K}_n[X]}$, *non nuls et échelonnés en degré donc* $\boxed{\text{libre}}$.
On conclut que $(Q_0, \dots, Q_n)$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.
Puisque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$, $(P_0, \dots, P_n)$ *et* $(f(P_0), \dots, f(P_n))$ *sont des bases de* $\mathbb{K}_n[X]$, *on sait par théorème de caractérisation des applications linéaires, que* $\boxed{f \text{ est bijective}}$, *donc* $\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}_n[X])}$.

Plus tard, on dira que : *la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{F}$ *est* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
et cette matrice étant inversible, on en déduit que $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{K}_n[X]}$.

(4d) *Montrer que* $(X-1)^{n+1}$ *est un polynôme annulateur de* f *revient à montrer que*

$$(f - \mathrm{Id})^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}.$$

$\boxed{\text{En notant } g : P \mapsto P'(X+1)}$, *on remarque que* $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - g$, *donc* $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})^{n+1} = (-1)^{n+1} g^{n+1}$.
Il suffit donc de montrer que $\boxed{g^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}}$.
Pour cela, on va calculer les itérés de g.
Par une récurrence immédiate, on montre que $\boxed{g^k : P \mapsto P^{(k)}(X+k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$.
En particulier $g^{n+1} : P \mapsto P^{(n+1)}(X+n)$.
Or, pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P^{(n+1)}$ *est le polynôme nul, donc l'endomorphisme* g^{n+1}, *défini sur* $\mathbb{K}_n[X]$, *est nul.*

(4e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Analyse. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f.*

Lemme. *De manière générale, lorsqu'on a un endomorphisme f d'un espace vectoriel E annulé par un certain polynôme Q, alors une valeur propre de f est racine de Q.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit Q un polynôme annulateur de f (i.e. $Q(f) = 0$).
Soit λ une valeur propre de f. Alors il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$. Montrons que λ es racine de Q i.e. $Q(\lambda) = 0$.
L'égalité $f(x) = \lambda x$ s'itère de la manière suivante

$$f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \lambda x = \lambda^2 x,$$

et on montre que $f^k(x) = \lambda^k x$ par récurrence immédiate.
Ainsi si $Q(f) = 0$ avec $Q = \sum b_k X^k$, alors $Q(f) = \sum b_k f^k$.
En prenant l'image de x par cet endomorphisme, on a

$$\begin{aligned} Q(f)(x) &= \sum b_k f^k(x) \\ &= \sum b_k \lambda^k x \\ &= Q(\lambda) \cdot x. \end{aligned}$$

Or, $Q(f) = 0$ donc $Q(f)(x) = 0$ d'où $Q(\lambda) \cdot x = 0$, et comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $Q(\lambda) = 0$, c qui prouve le lemme.

Comme le polynôme $Q = (X-1)^{n+1}$ est annulateur de f, et que sa seule racine vaut 1, on en déduit que la seule valeur propre possible pour f est $\lambda = 1$.

Synthèse. *Vérifions (ou pas) que 1 est valeur propre.*
*Il s'agit de voir s'il existe un polynôme P **non nul** tel que $f(P) = P$, c'est-à-dire tel que $P - P'(X+1) = P$.*
En prenant $P = 12$, on a bien $P \in \mathbb{K}_n[X]$, non nul, tel que $f(P) = P$, ce qui prouve que 1 est valeur propre de f.
Conclusion, $\boxed{\text{la seule valeur propre de } f \text{ est } 1}$.

5. *Fixons $m \in \mathbb{N}$.*

On écrit f sous la forme $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} - g$ avec $g : P \mapsto P'(X+1)$.

Comme $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}$ et g commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$f^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k$$

Appliquons cette égalité d'endomorphismes à un polynôme quelconque. On obtient :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \qquad f^m(P) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k(P).$$

Or, on a déjà remarqué que $g^k : P \mapsto P^{(k)}(X+k)$*. Donc*

$$\boxed{f^m(P) \ = \ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k P^{(k)}(X+k)}.$$