Généralités

Exercice 1. Dérivabilité : vrai ou faux. *Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.*

1. *Si f est une application dérivable en a alors* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ *pour h suffisamment petit.*
2. *Une application f n'est pas dérivable en a si et seulement si* $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$. L'application f est dérivable si et seulement $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ le sont.*
4. *Une application dérivable de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle est constante.*
5. *Il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et dont la dérivée tend vers 0.*
6. *Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ tend vers 0 en $+\infty$, alors f' tend vers 0 en $+\infty$.*

Correction.

1. ***Faux.*** *Si l'on prend $f : x \mapsto x^2$ et $a = 0$, on a, $\forall h \neq 0$,* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$ *mais $f'(a) = 2\times 0 = 0$, donc on a*
$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq f'(a),$$
ce qui montre que l'assertion proposée est fausse.

2. ***Faux.*** *Prenons $f : x \mapsto |x|$ et $a = 0$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (elle est à la fois dérivable à gauche et à droite mais $f'_{\mathrm{g}}(0) = -1 \neq 1 = f'_{\mathrm{d}}(0)$), alors que, quel que soit $x \neq a$,*
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \left|\frac{|x|}{x}\right| = 1,$$
donc il n'est pas vrai que la valeur absolue $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|$ *tende vers $+\infty$ en 0.*

3. ***Faux.*** *Prenons $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ et $f : x \mapsto |x|$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (donc pas dérivable sur $[-1,1]$). En revanche, les deux restrictions $f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ sont affines (la première est $x \mapsto -x$, la seconde $x \mapsto x$), donc dérivables.*

4. ***Faux.*** *La fonction*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$
est dérivable et de dérivée nulle (car elle coïncide, au voisinage de tout $a < 0$ avec la fonction constante -1 et au voisinage de tout $a > 0$ avec la fonction constante 1). Pourtant, cette application n'est pas constante.

5. ***Vrai.*** *La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est un exemple.*

6. ***Faux.*** *L'idée est de prendre une fonction qui oscille violemment, où la rapidité des oscillations va faire « exploser » la dérivée.*

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\sin(x^3). \end{array}$$

On a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *grâce au théorème des gendarmes et à l'encadrement* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leq \frac{1}{x}$.

En revanche, f*, qui est dérivable par opérations, vérifie, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$,

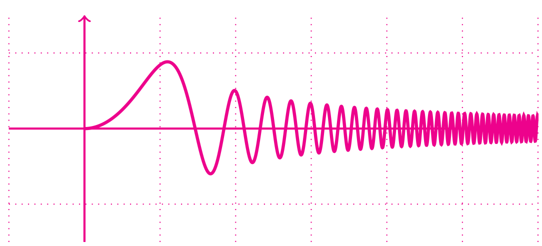
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\sin(x^3) + \frac{1}{x}\,3x^2\,\cos(x^3) \\ &= 3x\cos(x^3) - \frac{1}{x^2}\sin(x^3). \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[3]{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et*

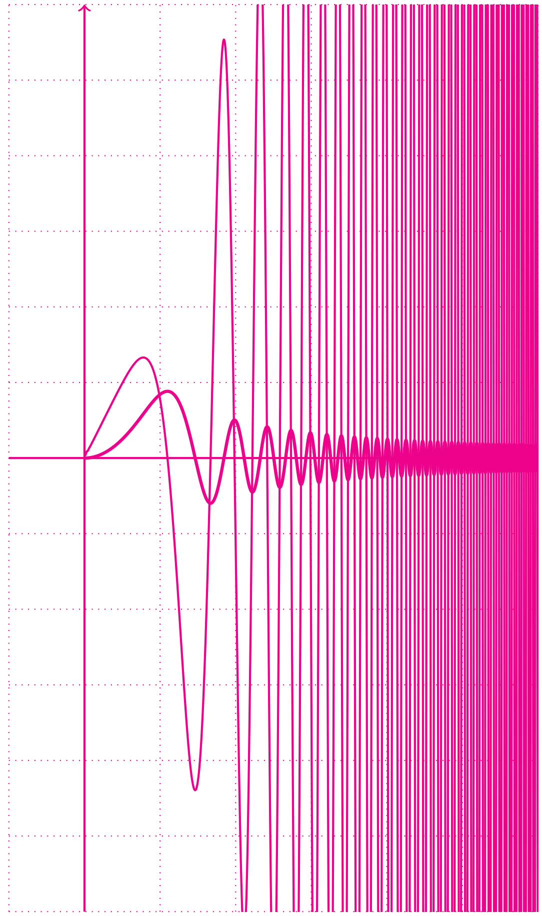
$$\begin{aligned} f'(u_n) &= 3\sqrt[3]{2n\pi}\cos(2n\pi) - \frac{1}{(2n\pi)^{2/3}}\sin(2n\pi) \\ &= 3\sqrt[3]{2n\pi} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que f' *ne tend pas vers* 0 *en* $+\infty$.

On peut objecter que f *n'est pas définie sur* $\mathbb{R}_+$*, mais il suffit alors de considérer* $x \mapsto f(x+1)$ *pour régler ce problème.*



f



f et f'

Exercice 2. Produit mixte infinitésimal.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a.

Montrer que $x \mapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ admet une limite en a, et la préciser.

Correction. *f étant dérivable en a, il existe une fonction ε (qui tend vers 0 en a) telle que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x \neq a,\ \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a) - a\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a) - af'(a)}.$$

Exercice 3. Tout ce qui monte doit redescendre.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$.

Montrer que f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a, b]$.

Correction. *Supposons* ***par l'absurde*** *que f' ne prenne pas de valeur strictement négative sur $[a, b]$.*
Autrement dit, on a $\forall x \in [a, b],\ f'(x) \geq 0$. On en déduit que f est croissante.
Comme $f(a) = f(b)$, on en déduit que f est constante sur $[a, b]$.

> *Soit $x \in [a,b]$.*
> *On a donc $a \leq x \leq b$, donc $f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a)$ par croissance de f, ce qui entraîne $f(x) = f(a)$. Ainsi, la fonction f est constante sur $[a,b]$.*

On a donc $f' = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f'(a) > 0$, et conclut la preuve.

Exercice 4. *Soient f et g deux fonctions réelles, continues sur I, dérivables sur l'intérieur de I. On suppose que $|f'| \leq g'$. Montrer que pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, on a*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Correction. *Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$. Montrons que :*

$$-\left(g(b) - g(a)\right) \leq f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a).$$

Commençons par prouver l'inégalité de droite. Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$, qui est continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ et pour tout $x \in \mathring{I}$, $\varphi'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$ par hypothèse. Il s'ensuit que φ est croissante sur I, donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Cette inégalité se réécrit : $0 \leq g(b) - f(b) - g(a) + f(a)$, d'où l'inégalité de droite. En appliquant ce qui précède à $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses que f), on obtient : $0 \leq g(b) + f(b) - g(a) - f(a)$, d'où l'inégalité de gauche.

Exercice 5. Fonction module. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.*

1. *Montrer que $|f|^2$ est dérivable et calculer sa dérivée.*
2. *Donner un exemple montrant qu'en général, la fonction $|f|$ n'est pas dérivable.*
3. *Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $|f|$ est dérivable en a.*

Correction.

1. **Méthode 1.** *Puisque $|f|^2 = f\overline{f}$, la fonction $|f|^2$ est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I, et l'on a $(|f|^2)' = f'\overline{f} + f\overline{f}' = 2\mathrm{Re}(f'\overline{f})$. En notant $g = \mathrm{Re} f$ et $h = \mathrm{Im} f$, on a $f' = g' + ih'$ et $\overline{f} = g - ih$ donc $(|f|^2)' = 2\mathrm{Re}((g'+ih')(g-ih)) = 2(gg'+hh') = 2(\mathrm{Re}f\mathrm{Re}(f') + \mathrm{Im}f\mathrm{Im}(f'))$.*
   Méthode 2. *On peut également écrire $|f|^2 = (\mathrm{Re}f)^2 + (\mathrm{Im}f)^2$. Par hypothèse, les fonctions $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont dérivables sur I, donc par produit $(\mathrm{Re}f)^2$ et $(\mathrm{Im}f)^2$ aussi, donc leur somme aussi, et $(|f|^2)' = 2\left((\mathrm{Re}f)(\mathrm{Re}f)' + (\mathrm{Im}f)(\mathrm{Im}f)'\right)$. On retrouve la même expression que précédemment.*
2. *La fonction $f : x \mapsto x$ (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, sans que $|f| : x \mapsto |x|$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$), montre que f peut être dérivable sur I sans que $|f|$ ne le soit.*
3. *On écrit $|f| = \sqrt{|f|^2}$.*

   - *D'après la question 1., $|f|^2$ est dérivable en a et prend une valeur strictement positive en a ;*
   - *On sait que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,*

donc, par composition, la fonction $\sqrt{|f|^2}$, c'est-à-dire $|f|$ est dérivable en a.

Calcul de dérivées

Exercice 6. Dérivabilité de fonctions explicites. *Déterminer les domaines de définition, étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes.*

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$;
2. $g : x \mapsto (x^2 - 1)\arccos(x^2)$;
3. $h : x \mapsto x|x|$;
4. $k : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$.

Correction.

1. *On a* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x^3 = x^2(1-x) \geq 0 \iff x \leq 1$, *donc f est définie sur* $]-\infty, 1]$.
De plus, $x \mapsto x^2 - x^3$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[$, et $f' : x \mapsto \dfrac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$.
En factorisant par x^2 au dénominateur, et en prenant soin d'utiliser $\sqrt{x^2} = |x|$, on obtient
$$\boxed{f' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x-2}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}}.$$

2. *On rappelle que* $\arccos$ *est définie sur* $[-1,1]$ *et dérivable sur* $]-1,1[$. *Par composition (à détailler),* $\boxed{g \text{ est définie sur } [-1,1] \text{ et dérivable sur }]-1,1[}$ *et*
$$\forall x \in]-1,1[,\ g'(x) = 2x\arccos(x^2) + (x^2-1)\frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$$
$$= 2x\arccos(x^2) + \frac{2x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^4}}.$$

3. $x \mapsto x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc, par produit,* $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$. *De plus, pour tout $x > 0$, $h(x) = x^2$, donc $h'(x) = 2x$, et pour tout $x < 0$, $h(x) = -x^2$ donc $h'(x) = -2x$. En résumé* $\boxed{h' : x \mapsto \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| + 1 > 0$, *donc* $\boxed{k \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$. *Par opérations, k est continue sur $\mathbb{R}$ et on a* $k : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $k' : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Étude en 0. *De plus, k est dérivable en 0 et $k'(0) = 1$ (soit par TA, soit par théorème de la limite*

de la dérivée). Donc $\boxed{k \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } k' : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$.

Exercice 7. Une identité hyperbolique. *Montrer* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}x) = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

Correction. *Notons* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}x) \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right) \end{array}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\dfrac{\operatorname{ch}}{1+\operatorname{sh}^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$.

La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car arccos *n'est pas dérivable en 1) de dérivée* $g' = -\dfrac{-\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\operatorname{ch}}\right)^2}} = \dfrac{\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2}}{\frac{|\operatorname{sh}|}{\operatorname{ch}}} = \dfrac{\operatorname{sh}}{|\operatorname{sh}|}\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$.

En particulier, la fonction $f-g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}x} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}x} = 0$.

Cela démontre que $\boxed{f - g \text{ est constante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+}$.

Pour montrer que f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$, nous allons montrer que la constante vaut 0, en vérifiant que f et g convergent vers la même limite en $+\infty$. On a

$$\begin{array}{llll} & \operatorname{sh}x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{donc} & f(x) = \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2} \\ \text{et} & \operatorname{ch}x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{donc} & \dfrac{1}{\operatorname{ch}x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ & & \text{puis} & g(x) = \operatorname{arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \operatorname{arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}, \end{array}$$

la dernière déduction étant une conséquence de la continuité de arccos *en* 0.

Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont donc égales sur } \mathbb{R}_+}$*, ce qui conclut.*

Exercice 8. Une équation différentielle. *On pose* $g : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}$. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) - g(x) = 0.$$

Élever au carré avant de dériver.

Correction. *Remarquons, que l'on n'a pas trop envie de dériver les deux racines carrées imbriquées. Élever au carré va simplifier les calculs.*

- *On a* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 > 0$ *et* $\sqrt{1+x^2} > x$ *donc g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (à savoir détailler).*
- *Soit $x \in \mathbb{R}$. En élevant au carré, on a* $g(x)^2 = \sqrt{1+x^2} - x$.
- *En dérivant cette expression, on obtient :* $2g'(x)g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = -\dfrac{g(x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

- *Puisque $g(x) > 0$, on en déduit*
$$\boxed{2\sqrt{1+x^2}g'(x) = -g(x)}.$$
- *Redérivons puis multiplions par $2\sqrt{1+x^2}$, il vient*
$$4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) = -2\sqrt{1+x^2}g'(x) = g(x),$$
ce qui conclut.

Exercice 9. Calcul de dérivée n-ième. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes.*

1. $f : x \mapsto x^2 e^{3x}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.
3. $f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}\ln(x) \end{array}$.

Correction.

1. *$f = uv$ avec $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^{3x}$. $\underline{u \text{ et } v \text{ sont } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc } f \text{ aussi.}}$*
D'après la formule de Leibniz,
$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u''v^{(n-2)} + 0.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Or, $u^{(0)}(x) = x^2; u'(x) = 2x; u''(x) = 2$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$, donc :
$f^{(n)}(x) = e^{3x}(1 \times x^2 \times 3^n + n \times 2x \times 3^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} \times 2 \times 3^{n-2})$ *d'où* $\boxed{f^{(n)}(x) = 3^{n-2}e^{3x}(9x^2 + 6nx + n(n-1))}$.
2. *f est une fonction rationnelle définie sur $D_f :=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ donc $\underline{f \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } D_f}$.*
Notons $u : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. u et v sont $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f.
Soit $x \in D_f$.
En écrivant $u(x) = (1+x)^{-1}$, on a
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^{(k)}(x) = (-1)^k k!(1+x)^{-k-1}.$$
De même, en écrivant $v(x) = (1-x)^{-1}$, il vient :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)}(x) = (-1)^{2k} k!(1-x)^{-k-1} = k!(1-x)^{-k-1}.$$
Première méthode. *A l'aide d'une décomposition en éléments simples, on remarque que $f = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ donc $f^{(n)} = \frac{1}{2}u^{(n)} + \frac{1}{2}v^{(n)}$, et*
$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)}.$$
Deuxième méthode. *On remarque que $f = uv$ et on utilise la formule de Leibniz, pour déterminer*

$(uv)^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k k!(1+x)^{-k-1}(n-k)!(1-x)^{-n+k-1} \\
&= \frac{n!}{(1-x^2)(1-x)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k \\
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x^2)(1-x)^n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k \\
&= \frac{n!}{(1-x^2)(1-x)^n} \frac{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} \\
&= \boxed{\frac{n!}{2(1+x)(1-x)^n}\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{n+1}\right)}.
\end{aligned}$$

3. **Première méthode.** *On utilise la formule de Leibniz, en écrivant* $f_n = g_n h$ *avec* $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ *et* $h = \ln$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*

$$\begin{cases} h^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} & \text{si } k \in \mathbb{N}^*, \\ h^{(0)}(x) = \ln(x) & \text{si } k = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_n^{(k)}(x) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)x^{n-(k+1)} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k} & \text{si } k \leq n-1, \\ 0 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x) \\
&= h^{(0)}(x) g_n^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= -\frac{(n-1)!}{x}(0^n - 1) = \frac{(n-1)!}{x}, \quad \text{car } n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}}$.

Deuxième méthode. *On conjecture puis on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que* $f_n^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(n-1)!}{x}$.

- $f_1 = \ln$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{0!}{x}$, *donc la propriété est initialisée.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f_n^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(n-1)!}{x}$.
  On a $f_{n+1} : x \mapsto x^n \ln(x)$ *et* $f_{n+1}^{(n+1)} = (f'_{n+1})^{(n)}$. *On a aussi :* $f_{n+1}^{(n+1)} = n f_n^{(n)}$.
  Tout d'abord, $f'_{n+1} : x \mapsto nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1}$, *donc* $f'_{n+1} : x \mapsto n f_n(x) + x^{n-1}$.
  Or, $x \mapsto x^{n-1}$ *a une dérivée n-ième nulle et on connaît la dérivée n-ième de f_n par HR, donc* $f_{n+1}^{(n+1)} : x \mapsto n\frac{(n-1)!}{x} + 0$ *i.e.* $\underline{f_{n+1}^{(n+1)} : x \mapsto \dfrac{n!}{x}}$. *Ainsi, la propriété est héréditaire.*
- *Par théorème de récurrence, on a,* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(n-1)!}{x}}$.

Étude de fonctions

Exercice 10. Calcul de limites. *Calculer les limites suivantes.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$

Correction.

1. $\frac{\sin(x^2)}{x} = x \times \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \times 1 = 0$ *car* $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *(taux d'accroissement et composition de limites).*
   Ou bien, T.A. en 0 de $x \mapsto \sin(x^2)$, *dérivable, de dérivée* $x \mapsto 2x\cos(x^2)$.
2. $x \mapsto \sqrt{x+1}$ *est dérivable en 0 (en tant que composée), de dérivée* $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
   Ainsi, $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$ *(taux d'accroissement).*
3. $x \mapsto \sin(\pi x)$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 1, de dérivée* $x \mapsto \pi\cos(\pi x)$.
   Ainsi, la taux d'accroissement $\frac{\sin(\pi x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \pi\cos(\pi) = -\pi$.
4. *Comme* $a > 0$, $a^x = e^{x\ln a}$. *En tant que composée,* $x \mapsto a^x$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0, et sa dérivée est* $x \mapsto (\ln a)a^x$.
   Ainsi, le taux d'accroissement $\frac{a^x - a^0}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln a$.

Exercice 11. Classes de prolongements. *Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de la fonction obtenue.*

1. $f : x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$;
2. $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$;
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$;
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Correction.

1. *Il est déjà clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par opérations.*

   On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| x \quad \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

   et $|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc le théorème des gendarmes entraîne que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$.

   Comme par ailleurs f est continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que cette fonction admet un prolongement continu, à savoir

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

   Comme $\widehat{f}$ coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$, qui est un voisinage de chacun des points de $\mathbb{R}^*$, le caractère local de la continuité et de la dérivabilité montre déjà que la fonction $\widehat{f}$ est lisse sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à déterminer plus précisément à quel point ces propriétés de régularité s'étendent au point 0.

   On ne peut pas, dans ce cas, appliquer le théorème de la limite de la dérivée, car la dérivée f' n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en 0.

   On retourne alors à la définition de la dérivabilité.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned} \tau_0(x) &= \frac{\widehat{f}(x) - \widehat{f}(0)}{x - 0} \\ &= \frac{f(x)}{x} \\ &= \sin \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

   Or, cette fonction n'admet pas de limite en 0 : montrons-le.

   Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{2\pi n + \pi/2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   On a $\xi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\eta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Pourtant, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tau_0(\xi_n) = \sin(2\pi n) = 0$$
$$\tau_0(\eta_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

ce qui montre que les suites (constantes) $(\tau_0(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\tau_0(\eta_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 et 1, respectivement.

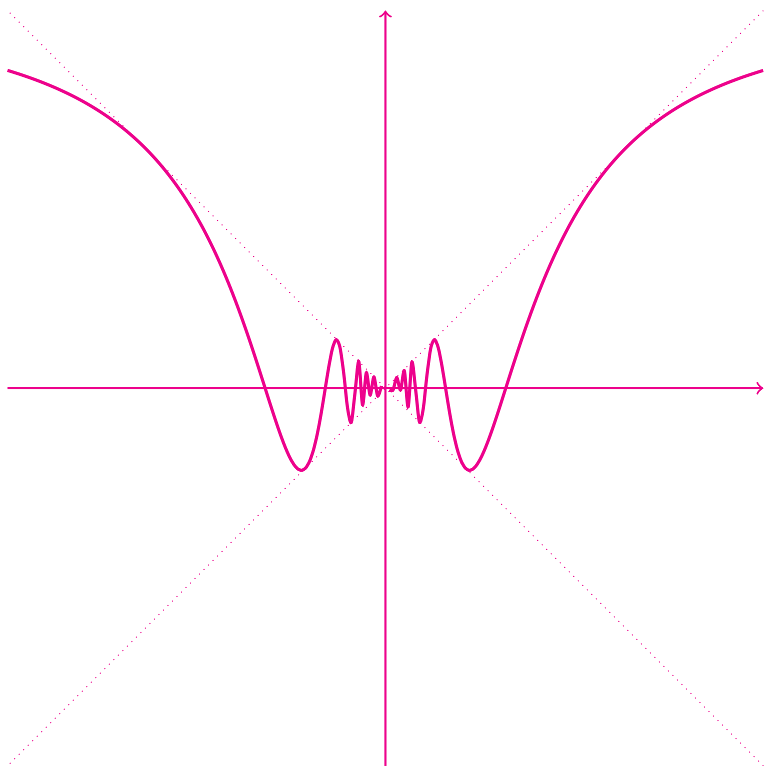
Or, si la fonction τ_0 admettait une limite ℓ en 0, on devrait avoir par composition des limités

$$\tau_0(\xi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \qquad \textit{et} \qquad \tau_0(\eta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

ce qui est ici exclu.

Puisque la fonction τ_0 diverge en 0, on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Ainsi, globalement, la fonction $\widehat{f}$ est continue, mais pas dérivable.



2. De même qu'à la question précédente, on a

$$x^2 \sin\frac{1}{x} = x \times x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

ce qui montre que f admet un prolongement continu

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0, \end{cases} \end{array}$$

donc le même argument qu'à la question précédente montre qu'il s'agit d'une fonction lisse sur $\mathbb{R}^*$.

Ici, on a

$$\tau_0(x) = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

ce qui montre que $\widehat{f}$ est dérivable en 0 (de dérivée nulle). On en déduit que $\widehat{f}$ est dérivable.

En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a (car f et $\widehat{f}$ coïncident au voisinage de f)

$$\widehat{f}'(x) = f'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} - \cos \frac{1}{x}.$$

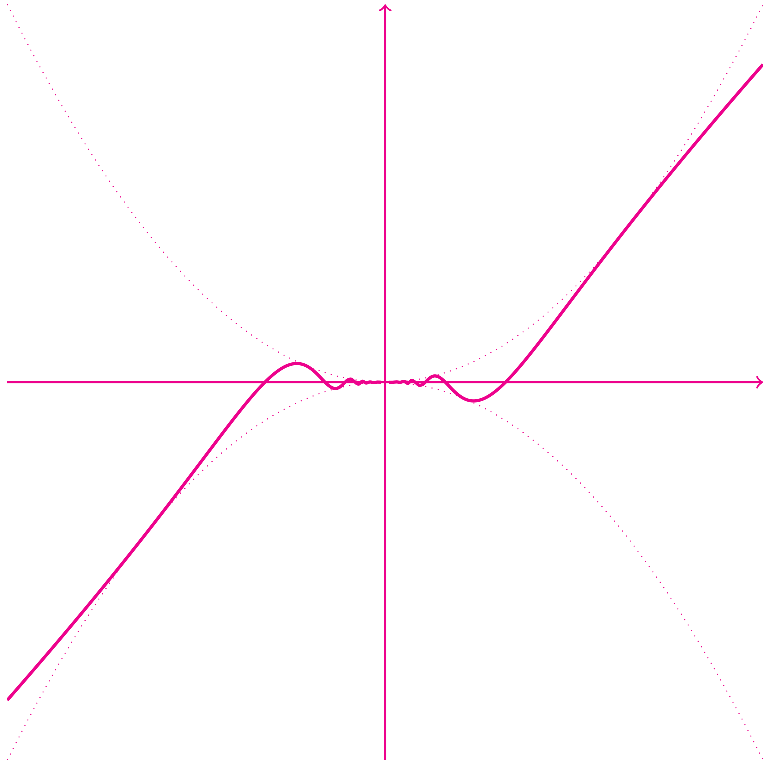
En gardant les mêmes suites $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qu'à la question précédente, on voit alors que

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi_n) &= \underbrace{2\xi_n \sin \frac{1}{\xi_n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{\xi_n}}_{=1} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} -1 \\ \text{et} \quad \widehat{f}'(\eta_n) &= \underbrace{2\eta_n \sin \frac{1}{\eta_n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{\eta_n}}_{=0} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\widehat{f}'$ n'a pas de limite en 0.

On en déduit en particulier que la fonction $\widehat{f}'$ n'est pas continue en 0.

Ainsi, $\widehat{f}$ est dérivable, mais pas de classe C^1.



3. On montre par étapes

- *que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (d'après le caractère local de la continuité et de la dérivabilité) ;*
- *que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc que f est continue en 0 ;*
- *en appliquant le théorème de la limite de la dérivée (et en séparant valeurs inférieures et supérieures ; pour la convergence par valeurs supérieures, on peut notamment utiliser $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$), que $f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} 0$, donc que f est de classe C^1 et que $f'(0) = 0$;*
- *que $f''(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} +\infty$, donc (d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f'_{|\mathbb{R}_+}$), que f' n'est pas dérivable à droite.*

Cela montre que f est de classe C^1, mais pas deux fois dérivable.

4. On obtient

- *que f est continue si et seulement si $a + b = 1$;*
- *que f est dérivable si et seulement si $a = 3$ et $b = -2$, et que dans ce cas elle est même de classe C^1 ;*
- *que f n'est jamais deux fois dérivable.*

Exercice 12. Raccordement. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par* $f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f_λ est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer $f_\lambda'(0)$.

Indication : *on rappelle que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{-x^2}{2}} = 1$.

- *D'après les théorèmes généraux, f_λ est dérivable sur $]0,\pi]$.*
- *Pour étudier la dérivabilité de f en 0, on calcule le taux d'accroissement.*
  $$\forall x \in]0,\pi],\ \frac{f_\lambda(x) - 0}{x - 0} = \frac{f_\lambda(x)}{x} = \frac{\cos(\lambda x) - 1}{x \sin \dfrac{x}{2}} = \begin{cases} -\lambda^2 \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\frac{-(\lambda x)^2}{2}} \times \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\lambda^2 \times 1 \times 1 = -\lambda^2 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 \to 0 \end{cases}.$$
  Dans tous les cas, f_λ est dérivable en 0 et $\boxed{f_\lambda'(0) = -\lambda^2.}$

Exercice 13. Raccordement. *On considère la fonction* $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. *Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$.*
2. *f' est-elle dérivable en 0 ?*

Correction.

1. *D'après les théorèmes généraux, $f \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.*
   Première méthode. *On montre que f est dérivable en 0 (taux d'accroissement) et $f'(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Ainsi* $\boxed{f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})}$.
   Deuxième méthode (théorème de la limite de la dérivée version $\mathscr{C}^1$).
   On a $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la limite de la dérivée version $\mathscr{C}^1$, $\boxed{f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ et } f'(0) = 0}$.
2. *On a $\forall x > 0$, $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Or, $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0^+ (comment le montre-t-on déjà ?). Ainsi* $\boxed{f' \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

   On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. On a $x_n \to 0^+$ et $y_n \to 0^+$ et pour tout n, $\cos\frac{1}{x_n} = 1 \to 1$ et $\cos\frac{1}{y_n} = 0 \to 0$.

Exercice 14. *Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.*

Penser au théorème de la limite de la dérivée.

Correction. Méthode 1 (T.A.). *La fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.*
Pour $x > 0$, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$.
Or, $\cos(\sqrt{x}) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} = -\dfrac{x}{2}$, *donc* $\dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$. *On en déduit que f est dérivable en 0*

et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Méthode 2 (T.L.D.). *La fonction* $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$*, par opérations.*
Toujours par opérations, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.
Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$*, on a, par composition de limites* $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$*, donc* $f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\frac{1}{2}$.
D'après le théorème de la limite de la dérivée, on sait alors que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

Exercice 15. *Étudier la dérivabilité en* 0 *de la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(1-x^2) \end{array}$.

Correction. *La limite du taux d'accroissement est une forme indéterminée du type* $\frac{0}{0}$*. Cherchons une autre piste, avec le théorème de la limite de la dérivée !*
Pour tout $x \in [-1,1],\ 1-x^2 \in [0,1]$*. La fonction* $x \mapsto 1-x^2$ *est continue sur* $[-1,1]$*, à valeurs dans* $[0,1]$ *et* $\arcsin$ *est continue sur* $[0,1]$*, donc leur composée,* f*, est continue sur* $[-1,1]$.
De plus, $1-x^2 = 1 \iff x = 0$*, et* $x \mapsto 1-x^2$ *est dérivable sur* $[-1,1]\setminus\{0\}$*, à valeurs dans* $[0,1[$ *et* $\arcsin$ *est dérivable sur* $[0,1[$ *donc* f *est dérivable sur* $[-1,1]\setminus\{0\}$ *et*

$$\forall x \in [-1,1]\setminus\{0\},\ f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}.$$

> **Attention.** ①. *Ce n'est pas parce que* $\arcsin$ *n'est pas dérivable en 1 que* f *n'est pas dérivable en 0 : on n'a pas de théorème nous donnant cela.*
> ②. f' *n'a pas de limite en* 0 *(car ses limites à gauche et à droite sont différentes), mais cela ne présage rien sur la dérivabilité de* f *!*
> *Penser à l'exemple du cours : la fonction* $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et* g' *n'a pas de limite en* 0 *(pourtant* g *est dérivable en* 0*). Le T.L.D. nous dit s'il y a dérivabilité ou pas en a LORSQUE (entre autres)* g' *admet une limite (finie ou infinie) en* a*, mais ne nous dit rien lorsque* g' *n'a pas de limite en* a.

En revanche, on a f *continue sur* $[0,1]$*, dérivable sur* $]0,1]$ *et* $\dfrac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\sqrt{2}$*, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à* $f_{|[0,1]}$*, on sait que* f *est dérivable à droite en 0 et* $f_d'(0) = -\sqrt{2}$.
De même (en appliquant le T.L.D. à $f_{|[-1,0]}$*), on montre que* f *est dérivable à gauche en* 0 *et* $f_g'(0) = \sqrt{2}$.
Puisque $f_g'(0) \neq f_d'(0)$*, on en déduit que la fonction* $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Exercice 16. Régularité d'une famille de fonctions. *Étudier, en fonction de* $\alpha \in]0,+\infty[\ \setminus \mathbb{N}$*, la régularité de la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)^\alpha}$.

Correction.

- **Ensemble de définition.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$\begin{aligned}\sqrt{x(1-x)^\alpha} \text{ existe} \quad &\iff \begin{cases}1-x>0\\ x(1-x)^\alpha \geqslant 0\end{cases}\\ &\iff x \in [0,1[\end{aligned}$$

La fonction $\boxed{f \text{ est donc définie sur } [0,1[}$.

- **Sur** $[0,1[$**.**
On a : $\begin{cases}\text{la fonction } x \mapsto x(1-x)^\alpha \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,1[\text{ à valeurs dans }]0,+\infty[\\ \text{la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\end{cases}$

Par composition, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,1[}$.

- **En** 0**.**
Que se passe-t-il en 0 ?
On a : $\begin{cases}\text{la fonction } x \mapsto x(1-x)^\alpha \text{ est continue en } 0 \text{ et son image vaut } 0\\ \text{la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est continue en } 0\end{cases}$

Par composition, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue en } 0}$.
Étudions la dérivabilité en 0. On a

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)^\alpha}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{(1-x)^\alpha}$$

Donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

- **Bilan.** $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,1[\text{ et est continue en } 0}$.

- **Remarque.** *La fonction f peut être prolongée par continuité en 1, ceci étant dû au fait que $\alpha > 0$, donc $(1-x)^\alpha \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ (passer par la forme exponentielle pour s'en convaincre !).*

On peut alors se poser la question de la régularité de ce prolongement $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}f(x) & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}\end{array}$

Le taux d'accroissement en 1 vaut

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)^\alpha}}{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} -\sqrt{(1-x)^{\alpha-2}} \xrightarrow[x\to 1]{} \begin{cases}-1 & \text{si } \alpha=2\\ 0 & \text{si } \alpha>2\\ -\infty & \text{si } \alpha<2\end{cases}$$

Bijection monotone

Exercice 17. Dérivée d'une réciproque. *Soit* $f: \begin{array}{ccc} [\frac{\pi}{2}, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sin(x)} \end{array}$.

1. *Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur un intervalle J à déterminer.*
2. *f^{-1} est-elle dérivable sur J ? Sur quel intervalle est-elle dérivable ?*
3. *Déterminer f^{-1} puis $(f^{-1})'$.*

Correction.

1. *Notons $I = [\frac{\pi}{2}, \pi[$. $x \mapsto \sin x$ ne s'annule pas sur I donc f est bien définie sur I. f est dérivable sur I en tant qu'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas et : $\forall x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$. Pour tout $x \in I$, $\cos(x) \leq 0$ donc $f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle I. Comme de plus, f est continue sur I, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de I sur* $\boxed{J = f(I) = \left[f(\tfrac{\pi}{2}), \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)\right[= [1, +\infty[}$.
2. *f est dérivable sur I donc on sait que f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$. On a : $f' > 0$ sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $f'(\pi/2) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1 et* $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[\text{ (i.e. sur } \mathring{J} \text{ et non sur } J)}$.
3. *Soient $x \in I$ et $y \in J$. On a : $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = y \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow \sin(\pi - x) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \pi - x = \arcsin(\frac{1}{y})$, car $\pi - x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\arcsin(\sin t) = t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*
   Ainsi $\boxed{f^{-1} : y \mapsto \pi - \arcsin(\tfrac{1}{y})}$.
   Première méthode *(dérivée d'une composée) :* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *donc*
   $$\boxed{\forall y \in]1, +\infty[, \ (f^{-1})'(y) = -\left(-\frac{1}{y^2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}} = \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}}.$$
   Deuxième méthode *(dérivée d'une réciproque) :*
   $\forall y \in]1, +\infty[, \ (f^{-1})'(y) = -\dfrac{\sin^2(\pi - \arcsin(\frac{1}{y}))}{\cos(\pi - \arcsin(\frac{1}{y}))} = \dfrac{\sin^2(\arcsin(\frac{1}{y}))}{\cos(\arcsin(\frac{1}{y}))} = \dfrac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}}$ *car* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *pour tout* $x \in [-1, 1]$.

Exercice 18. Dérivée seconde d'une réciproque. *On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$.*

1. *Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.*
3. *Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.*

Correction.

1. *Par somme, on constate que :*

   - f *est continue ;*
   - f *est strictement croissante ;*
   - $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$.

   D'après le théorème de la bijection monotone, on en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

2. *Par opération, la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée*

$$f' : x \mapsto e^x + 1$$

   ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ *(elle est partout* > 1*).*

   Par le critère de dérivabilité des fonctions réciproques, on en déduit que f^{-1} *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *(pour cette question, on n'utilise que la dérivabilité).*

   Par ailleurs,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}.$$

   On constate alors que $f(0) = e^0 + 0 = 1$*, donc* $f^{-1}(1) = 0$*, ce qui permet d'achever le calcul :*

$$\boxed{(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0+1} = \frac{1}{2}}.$$

3. *On a vu à la question précédente que* f^{-1} *était (de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *donc) deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*. On peut alors effectuer le calcul de deux façons différentes, essentiellement équivalentes.*

   - *On sait que* $(f^{-1})' : x \mapsto \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$*, et cette fonction est dérivable. On peut alors la dériver et obtenir*

$$(f^{-1})'' : x \mapsto -\frac{f''(f^{-1}(x)) \times (f^{-1})'(x)}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^2} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned}(f^{-1})''(1) &= -\frac{f''(f^{-1}(1)) \times (f^{-1})'(1)}{f'(f^{-1}(1))^2} \\ &= -\frac{f''(0) \times \frac{1}{2}}{f'(0)^2} \\ &= -\frac{e^0 \times \frac{1}{2}}{(e^0+1)^2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{8}}.\end{aligned}$$

- *En notant $g = f^{-1}$ pour plus de lisibilité, on va dériver deux fois l'expression $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$: on obtient $(g' \circ f) \times f' = 1$ puis*

$$\begin{aligned}(g'' \circ f) \times (f')^2 + (g' \circ f) \times f'' = 0 \qquad &\textit{donc} \quad g''(f(0)) \times f'(0)^2 + g'(f(0)) \times f''(0) = 0\\ &\textit{donc} \quad g''(1) \times (e^0+1)^2 + g'(1) \times e^0 = 0\\ &\textit{donc} \quad g''(1) = -\frac{g'(1)}{4} = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 19. Dérivée d'une composée. *Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$. On note $\varphi : t \mapsto te^t$ et $f_r : x \mapsto x^r$.*

1. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists!\, \alpha_x \in \mathbb{R}_+, \alpha_x e^{\alpha_x} = x^r$. On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \alpha_x \end{array}$.*

2. *Étudier la dérivabilité de la fonction f et déterminer f'.*

Correction.

1. *La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) = (1+t)e^t > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.*
   Ainsi, φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème de la bijection monotone, φ induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\varphi(\mathbb{R}_+) = [\varphi(0), \lim\limits_{+\infty} \varphi[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^r \in \mathbb{R}_+$ donc x^r a un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par φ (que l'on pourra appeler α_x), ce qui conclut.

2. *Avec les notations de l'énoncé, on a $\varphi \circ f = f_r$ et φ bijective donc $\boxed{f = \varphi^{-1} \circ f_r}$.*
   Rappels sur les fonctions puissances d'un réel $f_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^r := e^{r \ln x} \end{array}$, **avec** $r > 0$.

   - *f_r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_r'(x) = rx^{r-1}$.*
   - *Comme $r > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f_r(x) = 0$, donc on peut prolonger f_r par continuité en 0 en posant $0^r = 0$.*
     De plus, pour $r > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_r(x) - f_r(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} f_{r-1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1, \\ 0 & \text{si } r > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < r < 1. \end{cases}$
     Rq : Si $r = 1$, alors f_r est l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est donc dérivable en 0 et $f_r'(0) = 1$.

   Conclusion.

   - *si $r \geq 1$, la fonction f_r est dérivable en 0 et $f_r'(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$*
   - *si $0 < r < 1$, alors f_r n'est pas dérivable en 0 (son graphe possède une tangente verticale à l'origine) mais f_r est continue en 0.*

   D'après les théorèmes généraux, f_r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $0^r = 0$ et on sait de plus que f_r est dérivable en 0 si et seulement si $r \geq 1$. Nous allons donc étudier séparément la dérivabilité en 0 et sur $\mathbb{R}_+^*$.

   - **Sur $\mathbb{R}_+^*$:**

- *f_r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que composée de fonctions usuelles dérivables) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.*
- *φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en tant que bijection réciproque d'une fonction de classe dérivable φ dont la dérivée φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$).*
- *Puisque $f = \varphi^{-1} \circ f_r$ $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.*
- *De plus, sur $\mathbb{R}_+^*$: $f' = (\varphi^{-1} \circ f_r)' = (\varphi^{-1})' \circ f_r \times f_r'$ et $(\varphi^{-1})' = \dfrac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$.*

  Or, $\varphi' = \exp + \varphi$ donc $\varphi' \circ \varphi^{-1} = e^{\varphi^{-1}} + \mathrm{Id}$ et $(\varphi^{-1})' = \dfrac{1}{e^{\varphi^{-1}} + \mathrm{Id}}$, puis $(\varphi^{-1})' \circ f_r = \dfrac{1}{e^{\varphi^{-1} \circ f_r} + f_r} = \dfrac{1}{e^f + f_r}$, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{rx^{r-1}}{x^r + e^{f(x)}}}$.

- **Reste à étudier la dérivabilité en 0.** *Pour cela, utilisons le théorème de la limite de la dérivée.*

  f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{rx^{r-1}}{x^r + e^{f(x)}}$.

  De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{f(x)} = e^{f(0)} = e^0 = 1$ et puisque $r > 0$, on sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$ et

  $$\lim_{x \to 0^+} x^{r-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}.$$

  D'après le théorème de la limite de la dérivée, on a donc

  $$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 ssi } r \geq 1 \text{ et dans ce cas } f'(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } r > 1 \\ 1 \text{ si } r = 1 \end{cases}}.$$

Extremas

Exercice 20. Minimum local au bord.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, admettant un minimum local en 0. Que peut-on dire de $f'(0)$?

Correction. *On peut montrer $\boxed{f'(0) \geq 0}$.*

En effet, on peut trouver $\eta \in\,]0,1]$ tel que $\forall x \in [0,\eta],\ f(x) \geq f(0)$. Quel que soit $h \in [0,\eta]$, on a

$$f(h) \geq f(0) \quad \text{donc} \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq 0.$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a donc

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq 0.$$

En revanche, on ne peut conclure $f'(0) = 0$, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x$.

Exercice 21. Extrema locaux d'une fonction. *Déterminer tous les extrema locaux de*

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Correction. *On observe déjà que* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}>0$, *ce qui montre que la fonction* f *est* >0 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et donc que* $\boxed{0 \text{ est le minimum (global) de la fonction } f}$.
Par ailleurs, la fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $\forall x>0,\ f(x)=e^{-1/x}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ *donc*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}e^{-1/x} \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{x^2}e^{-1/x}\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

après mise sous forme d'un cosinus déphasé. On fait de même sur $\mathbb{R}_-^*$, *et on obtient :*

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{x^2}e^{-1/x}\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)\right) & \text{si } x>0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{x^2}e^{-1/x}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)\right) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Ainsi, $f'(x)$ *est du même signe que* x, *avec* f' *qui ne s'annule sur aucun intervalle non trivial, donc* f *décroît strictement sur* $\mathbb{R}_-^*$, *et croît strictement sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc on retrouve que* f *est minimale en* 0, *et* $\boxed{0 \text{ est le seul extremum local de la fonction } f}$.

Exercice 22. Théorème de Darboux (1874). *Soient I un intervalle non trivial et $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction dérivable sur I. L'objectif est de montrer que $f'(I)$ est un intervalle.*

1. *Montrer que si a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$, $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

2. *En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.*

3. *Application : construire une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, non continue mais telle que pour tout intervalle réel I, $g(I)$ soit un intervalle réel.*

Correction.

1. *Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.*
Méthode 1. *DESSIN. La fonction f restreinte au segment $[a, b]$ est continue donc d'après le théorème des bornes atteintes, f atteint son minimum sur $[a, b]$ en un point $c \in [a, b]$: $\min_{[a,b]} f = f(c)$. Montrons que $c \in]a, b[$.*
Par ailleurs, puisque $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0$, on sait qu'au voisinage de a^+, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$ et $x - a > 0$, donc $f(x) < f(a)$ d'où $f(a) \neq \min_{[a,b]} f$ donc $c \neq a$.
De même $f'(b) > 0$ implique qu'au voisinage de b^-, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$ et $x - b < 0$, donc $f(x) < f(b)$, d'où $c \neq b$.
Puisque $f_{|[a,b]}$ est dérivable en c et possède un extremum (minimum) en c, et $c \in]a, b[$, on sait d'après un résultat donnant une condition nécessaire d'extremum local que $\boxed{f'(c) = 0}$.
Méthode 2. *D'après l'EAF, il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha) \in \mathbb{R}$. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f'(\alpha) \geq 0$, et considérer la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.*
On a $\varphi(b) = f'(\alpha) \geq 0$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = f'(a) < 0$ et φ continue sur l'intervalle $]a, b]$, donc d'après le TVIG, φ s'annule sur $]a, b]$: on peut donc trouver $d \in]a, b]$ tel que $\varphi(d) = 0$.
D'après l'EAF appliquée à $f_{|[a,d]}$, il existe $c \in]a, d[$ tel que $\frac{f(d) - f(a)}{d - a} = f'(c)$ i.e. $\varphi(d) = f'(c)$.
On a finalement, $f'(c) = 0$ avec $c \in]a, b[$, ce qui conclut.
Méthode 3. *f est dérivable et f' change de signe sur $[a, b]$, donc f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$. Comme de plus f est continue, on en déduit que f n'est pas injective (cf pour $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, on a f strictement monotone ssi f injective - l'implication réciproque est HP, êtes-vous prêts à la redémontrer ?). On peut donc trouver $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$ et $\alpha \neq \beta$. On conclut en appliquant le théorème de Rolle à $f_{|[\alpha,\beta]}$.*

2. • *Par hypothèse, I n'est pas vide, donc $f'(I)$ non plus. Si $f'(I)$ est un singleton, alors $f'(I)$ est bien un intervalle.*
• *Supposons désormais que $f'(I)$ n'est pas un singleton. On peut donc considérer a et b dans I tels que $f'(a) \neq f'(b)$ et $a < b$. Alors $f'(a) < f'(b)$ ou $f'(a) > f'(b)$. Quitte à considérer $-f$, on peut sans perte de généralité supposer $f'(a) < f'(b)$.*
Soit $k \in]f'(a), f'(b)[$. Montrons que $k \in f'(I)$. Considérons la fonction $g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - kx \end{array}$.
On a $g \in \mathbb{R}^I$, dérivable sur I, $g'(a) = f'(a) - k < 0$ et $g'(b) = f'(b) - k > 0$, donc en appliquant le résultat de la première question à g, on sait qu'il existe c entre a et b tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

tel que $f'(c) = k$, ce qui montre que $k \in f'(I)$.
Ainsi, $\boxed{f'(I) \text{ est un intervalle}}$.

3. *Il suffit de considérer f le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ et $g = f'$.*
Classiquement :
   - *f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Darboux, pour tout intervalle non trivial I, $f'(I)$ est un intervalle, donc $g(I)$ est un intervalle.*
   - *f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 (car f' n'est pas continue en 0) donc g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.*

Remarque : le théorème de Darboux est hors-programme, mais si f' est continue le résultat est évident (et au programme !).

Accroissements finis

Exercice 23. Existence d'une solution. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.*
Montrer qu'il existe $x \in \,]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Correction. *Considérons la fonction*

$$f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^4 + bx^3 + cx^2. \end{array}$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par opérations. En particulier, elle est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $x \in \,]0, 1[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 24. Accroissements finis ou convexité ? *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0) = 0$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

1. *Montrer : $\forall x > 0,\ \dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)$.*
2. *En déduire que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Correction.

1. *Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$.*
Or, $f'(c_x) \leq f'(x)$ car $0 < c_x < x$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\boxed{\dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)}$.

Sinon : *puisque f' est croissante, f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le graphe de f est au dessus de ses tangentes, et en particulier au dessus de sa tangente en x au point d'abscisse 0 :*

$$0 = f(0) \geq f'(x)(0-x) + f(x), \quad \textit{donc} \quad f(x) \leq xf'(x).$$

2. *$g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$.*
D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)x - f(x) \geq 0$ donc g' est positif sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où $\boxed{\textit{g est croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}$.

Exercice 25. Bataille entre f et f'. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*

Correction. Idée. *Faire un dessin, utiliser le TAF, et conclure par théorème de comparaison sur les limites.*

Début de la preuve.

Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f'(t) \geq \dfrac{\ell}{2}$.

Précisément, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall\, t \geq A, \quad f'(t) \geq \dfrac{\ell}{2}$.

- *Montrons maintenant que $\boxed{\forall\, x \geq A, \quad f(x) \ \geq\ \dfrac{\ell}{2}(x-A) + f(A)}$.*
  Fixons $x \geq A$.
  Exploitons le théorème des accroissements finis sur $[x, A]$ (licite, pourquoi ?).
  On obtient (après petit calcul sur l'égalité fournie par le TAF) :

  $$\exists\, c_x \in\,]A, x[, \qquad f(x) \ = \ f'(c_x)(x-A) + f(A).$$

  On a $f'(c_x) \geq \dfrac{\ell}{2}$ (en effet, $c_x \geq A$ et, de plus, pour tout $t \geq A$, on a $f'(t) \geq \dfrac{\ell}{2}$).
  En multipliant cette dernière inégalité par $x - A \geq 0$ et en ajoutant $f(A)$, on obtient

  $$f(x) \ \geq\ \frac{\ell}{2}(x-A) + f(A).$$

- *Passons à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'inégalité : $\quad \forall\, x \geq A, \quad f(x) \ \geq\ \dfrac{\ell}{2}(x-A) + f(A)$.*
  Comme $\ell > 0$, le membre droit tend vers $+\infty$.
  Par théorème de comparaison, le membre gauche tend aussi vers $+\infty$.
  D'où $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

- **Attention à l'argument faux suivant.**
  On a

  $$\forall\, x \geq A, \qquad f(x) \ = \ f'(c_x)(x-A) + f(A) \qquad \text{où } c_x \in]A, x[.$$

  Jusque-là, tout va bien.
  On a $x - A \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(c_x) > 0$, donc par produit, on a $f'(c_x)(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
  Puis, par somme avec $f(A)$ indépendant de x, on obtient $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
  *Il y a une **erreur**. Où ?*

  On a bien $f'(c_x) > 0$, mais comme cette expression dépend de x, il faut également considérer sa limite. Or nous n'avons pas d'information sur la limite de c_x, donc on ne peut pas déterminer cette limite !

Exercice 26. Bataille entre f et f'.
Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall\, x \in [0,+\infty[,\ 0 < f(x) \leq f'(x)$.
La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

Correction. *On a $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.*
En particulier, f est croissante sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite en $+\infty$, qui est $+\infty$ ou un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
Par croissance de f et l'hypothèse, on a :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[, \quad 0 < f(0) \leq f(x) \leq f'(x).$$

Donc f' est minorée par un réel strictement positif $m > 0$ (on peut prendre $m = f(0)$ par exemple).
D'après l'égalité des accroissements finis, on obtient

$$\forall\, x \in [0,+\infty[, \quad f(x) \geq mx + f(0).$$

Comme $m > 0$, on a $mx + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Par comparaison, on obtient que $\boxed{f \text{ tend vers } +\infty}$.

Exercice 27. Un calcul de limite. *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}) = 0$.

Méthode 1 (I.A.F.). *La fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne (conséquence de l'inégalité des accroissements finis car $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\cos$ est majorée en valeur absolue par 1). En particulier :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\right| \leq \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.
Méthode 2 (E.A.F. appliquée à la fonction $f : x \mapsto \sin\sqrt{x}$ - mais pas optimal). *Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que*

$$\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n} = f(n+1) - f(n) = f'(c_n)((n+1) - n) = \frac{\cos\sqrt{c_n}}{2\sqrt{c_n}}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{c_n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

On conclut par théorème d'encadrement.
Méthode 3 (formule trigo). *On utilise $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n} = \underbrace{2\cos\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2}}_{\text{suite bornée}}\underbrace{\sin\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 28. 1. *A l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.*

   (a) *Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.* (b) *Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.*

Correction.

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ donc d'après l'EAF, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{1}{c}$.*
   Or, $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}$ donc

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}}. \qquad (*)$$

   Remarques. Il y a deux autres preuves classiques de ce résultat.

   - **Méthode 2 (en utilisant $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$).** *On sait que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, et par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$, on obtient $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$, ce qui conclut.*
   - **Méthode 3 (par convexité $\forall x > 0,\ \ln x \leq x - 1$).** *L'inégalité de droite est une conséquence de l'inégalité de convexité pour $x = \frac{k+1}{k}$, et celle de gauche aussi, pour $x = \frac{k}{k+1}$, car*

$$\ln\frac{k+1}{k} = -\ln\frac{k}{k+1} \geq 1 - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

2. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$ d'après la question 1., donc $\boxed{(S_n) \text{ est décroissante}}$.*

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité droite de $(*)$ pour k variant de 1 à n, on obtient par télescopage :*

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   Puis en ajoutant $-\ln(n)$, on obtient : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq S_n$.
   Or, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$ donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive donc minorée par 0.
   Comme $\boxed{(S_n) \text{ est décroissante et minorée, on sait d'après le TLM que } (S_n) \text{ converge}}$ (vers la constante d'Euler γ).

Exercice 29. Équivalents de la série harmonique.

1. *Montrer* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. *En déduire les limites de* $\left(\dfrac{1}{\ln n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geq 2}$ *et* $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{np} \dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour* $p \geq 2$.

Correction.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $\ln$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc notamment continue sur* $[x, x+1]$ *et dérivable sur* $]x, x+1[$.

   D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre réel $c \in]x, x+1[$ *tel que*

   $$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{(x+1) - x} = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

   Par décroissance de la fonction inverse, on a alors $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$, *ce qui montre que*

   $$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

2. *On peut dans cet encadrement « échanger » le rôle de la quantité encadrée et de la borne (comme on était passé jadis de la définition* $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ *à l'encadrement* $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$*).*

   On peut appliquer la question précédente à $x - 1$ *(dès que* $x > 1$*) pour obtenir la majoration*

   $$\frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1).$$

   Jumelée à la majoration de la question précédente (que l'on voit maintenant comme une minoration de $1/x$*), cela montre*

   $$\forall x > 1, \quad \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1) \qquad (\star)$$

   On peut alors encadrer les deux sommes de l'énoncé.

- *Soit* $n \geq 2$. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ *donc*

$$1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1))$$

$$\text{donc} \quad 1 + (\ln(n+1) - \ln(2)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + (\ln(n) - \ln(1)) \qquad \text{(télescopage)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1-\ln 2}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$$

Or, $\frac{1-\ln 2}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et*

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, les deux suites encadrant $\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\geq 2}$ *convergent toutes les deux vers* 1. *D'après le théorème des gendarmes, on en déduit*

$$\boxed{\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1},$$

i.e. que la suite $(H_n)_{n\geq 2} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\geq 2}$ *est équivalente à* $(\ln n)_{n\geq 2}$.

Remarque. *En se fatiguant un peu plus dans la rédaction, on aurait pu utiliser le fait que la minoration* $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ *était en fait valable pour tous les entiers* $k \in \mathbb{N}^*$ *pour ne pas avoir à isoler le terme* $k = 1$, *et obtenir ainsi après télescopage la minoration* $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, *ce qui simplifiait un peu les calculs. C'est évidemment un point de détail, et de préférence personnelle.*

- *Soit* $p \geq 2$ *et* $n \geq 1$. *En utilisant essentiellement les mêmes arguments, on obtient l'encadrement*

$$\ln(np+1) - \ln(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \leq \ln(np) - \ln n.$$

La borne de droite vaut exactement $\ln p$, *et la borne de gauche converge :*

$$\ln(np+1) - \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln p,$$

comme on le vérifie en écrivant $\ln(np+1)-\ln(n+1)=\ln\dfrac{np+1}{n+1}$, *avec* $\dfrac{np+1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}p$ *et* $\ln$ *continue en* p.

Le théorème des gendarmes permet donc d'en déduire $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{np}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln p}$.

Exercice 30. Équivalent des sommes partielles de série de Riemann divergentes. *Soit* $\alpha\in]0,1[$.

1. *Établir* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha}\leq(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\leq\dfrac{1-\alpha}{n^\alpha}$.
2. *En déduire un équivalent de la suite* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

Correction.

1. *Posons, pour* $x>0$, $f(x)=x^{1-\alpha}$. *Alors* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\dfrac{1-\alpha}{x^\alpha}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. *D'après le TAF, il existe* $c\in]n,n+1[$ *tel que* $f(n+1)-f(n)=f'(c)$.
On a que : $f''(x)<0$ *donc* f' *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+$ *donc* $f'(n+1)\leq f'(c)\leq f'(n)$, *ce qui est exactement l'égalité demandée.*

2. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.
Rappel : *pour* $\beta>0$, *on a posé* $0^\beta=0$ *(prolongement par continuité en* 0 *de* $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^\beta=e^{\beta\ln x}\end{array}$*).*

Méthode 1. *D'après 1. , on a :*

$$\forall k\geq1,\ (k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\leq\frac{1-\alpha}{k^\alpha}\quad \text{et}\quad \forall k\geq1,\ \frac{1-\alpha}{k^\alpha}\underset{*}{\leq}k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}.$$

*L'inégalité * est encore vraie pour* $k=1$ *(d'après le rappel, car* $1-\alpha>0$*), donc*

$$\boxed{\forall k\geq1,\ (k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\leq\frac{1-\alpha}{k^\alpha}\leq k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}}.$$

En sommant pour k *variant entre 1 et* n, *et par télescopages, on obtient :*

$$(n+1)^{1-\alpha}-1\leq(1-\alpha)H_n\leq n^{1-\alpha}-\underbrace{0^{1-\alpha}}_{=0\ \text{car}\ \alpha<1},$$

donc, en divisant par $n^{1-\alpha}$ *(qui est* >0*), on a :*

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}_{\to1-0}\leq\frac{(1-\alpha)H_n}{n^{1-\alpha}}\leq1.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\dfrac{(1-\alpha)H_n}{n^{1-\alpha}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, *donc* $\boxed{H_n\sim\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$.

Remarque 1. *On pourrait aussi utiliser le fait que* $u_n\leq(1-\alpha)H_n\leq n^{1-\alpha}$ *avec* $u_n\sim n^{1-\alpha}$, *donc par théorème* $(1-\alpha)H_n\sim n^{1-\alpha}$.

Remarque 2. *Par conservation de la limite dans les équivalents :* $\boxed{\lim H_n = +\infty}$.
Méthode 2. *D'après 1. , on a :*

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}.$$

En sommant pour k variant entre 1 et n dans la deuxième inégalité, on obtient

$$(n+1)^{1-\alpha} - 1 \leq (1-\alpha)H_n.$$

En sommant pour k variant entre 1 et $n-1$ dans la première inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq n^{1-\alpha} - 1\\ (1-\alpha)(H_n - 1) &\leq n^{1-\alpha} - 1\\ (1-\alpha)H_n &\leq n^{1-\alpha} - \alpha.\end{aligned}$$

On a donc l'encadrement :

$$(n+1)^{1-\alpha} - 1 \leq (1-\alpha)H_n \leq n^{1-\alpha} - \alpha \leq n^{1-\alpha},$$

et on conclut de la même manière.

Exercice 31. Une suite récurrente définie à l'aide d'une fonction contractante.
On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$.

1. *Montrer que f est $\frac{1}{2}-$lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.*
2. *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et étudier sa convergence.

Correction.

1. *f est dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{-1}{2x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où $|f'(x)| \leq \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{2}$ car $x^2 \geq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis,* $\boxed{f \text{ est } \tfrac{1}{2}-\text{lipschitzienne sur } [1, +\infty[}$ *i.e. pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.*

2.
   - *Justifions d'abord que $[1, +\infty[$ est stable par f.*
   Soit $x \geq 1$. On a : $f(x) \geq 1 \iff \sin\frac{1}{x} \geq 0$.
   Comme $x \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{x} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ et $\sin \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $0 \leq \sin(\frac{1}{x})$, et d'après l'équivalence précédente, on a bien $f(x) \in [1, +\infty[$.
   Puisque $u_0 \in [1, +\infty[$ et $[1, +\infty[$ est stable par f, on a par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$ donc la suite (u_n) est bien définie.
   - *Étudions les points fixes éventuels de f sur $[1, +\infty[$, i.e. les zéros de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
   g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2} - 1$.
   Or, pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ et $g'(x) < 0$.
   Ainsi, g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
   La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ donc d'après

le théorème de la bijection monotone, g induit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g([1,+\infty[) =]\lim_{+\infty} g, g(1)] =]-\infty, g(1)]$.
Or, $g(1) = \frac{1}{2}\sin 1 > 0$ donc $0 \in]-\infty, g(1)]$ donc il existe un unique $\ell \in [1,+\infty[$ tel que $g(\ell) = 0$, donc tel que $f(\ell) = \ell$, que l'on fixe pour la suite.

- *Puisque f est $\frac{1}{2}-$lipschitzienne, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.*
  On conjecture et on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.
  En effet, cette inégalité est vraie pour $n = 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.
  On a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| && \text{car } f \text{ est } \frac{1}{2}-\text{lipschitzienne} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell| && \text{par HR.} \end{aligned}$$

  Par théorème de récurrence, on conclut : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|}$.
  De plus, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$ i.e. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.
- **Remarque :** *on peut montrer, par récurrence, que (u_n) décroît.*

Exercice 32. Une suite récurrente. *Étudier la suite récurrente définie par* $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}. \end{cases}$

Correction.

1. • *On pose $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{array}$. Cette fonction f est dérivable et $f' : x \mapsto e^x \dfrac{x+1}{(x+2)^2}$. Comme $f' > 0$ sur $[0,1]$, on en déduit que f est croissante sur $[0,1]$, et on a*

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{1}{2} = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = \frac{e}{3} \leq 1,$$

   ce qui montre que le segment $\boxed{[0,1] \text{ est stable par } f}$, et par hypothèse $u_0 \in [0,1]$.

   • *De plus, la fonction $f - \mathrm{Id}$ prend une valeur positive en 0 et négative en 1 et est continue donc s'annule sur $[0,1]$. On en déduit que $\boxed{f \text{ possède (au moins) un point fixe dans } [0,1]}$.*

   • *Montrons que f est contractante, c'est-à-dire K-lipschitzienne avec $K < 1$, ce qui assurera l'unicité du point fixe ℓ de f dans $[0,1]$, et la convergence de (u_n) vers ℓ.*
   Pour cela, il suffit d'encadrer f' et d'appliquer l'inégalité des accroissements finis.

   On peut en fait ici vérifier que f'' est positive (attention, il y a des calculs à assurer et à faire soi-même !), donc f' est croissante, ce qui montre

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \underbrace{f'(0)}_{=1/4} \leq f'(x) \leq \underbrace{f'(1)}_{=2e/9},$$

donc sur $[0,1]$, on a $|f'| \leq \frac{2e}{9} < 1$, ce qui montre que f est K-lipschitzienne avec $K = \frac{2e}{9} < 1$.

- *On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : [0,1] \to [0,1]$ contractante, $u_0 \in [0,1]$ et f qui admet au moins un point fixe. Par théorème, on en déduit que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$, et que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers son point fixe sur } [0,1]}$.*

Exercice 33. Cesàro infinitésimal. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.*
Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

on commencera par traiter le cas $\ell = 0$ avec la définition epsilonesque.

Correction.

Le cas particulier $\ell = 0$. *On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrons que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$, que l'on peut supposer > 0, tel que

$$\forall t > A,\ |f'(t)| \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[A, +\infty[$, on obtient

$$\forall x > A,\ |f(x) - f(A)| \leq \varepsilon |x - A| = \varepsilon(x - A).$$

En divisant par $|x| = x > 0$ (car $x > A$ et $A > 0$), on obtient :

$$\forall x > A,\ \left|\frac{f(x) - f(A)}{x}\right| \leq \varepsilon \underbrace{\frac{x - A}{x}}_{\leq 1} \leq \varepsilon.$$

Conclusion 1. *Ceci prouve que $\dfrac{f(x) - f(A)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*
Or, $\dfrac{f(A)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc par opération $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Conclusion 2. *Par inégalité triangulaire, on a*

$$\forall x > A,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(A)}{x}\right| + \varepsilon.$$

Comme $\frac{f(A)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > B,\ \left|\frac{f(A)}{x}\right| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall x > \max(A, B),\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 2\varepsilon,$$

d'où $\boxed{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.
Ce résultat ressemble au corollaire du théorème de Cesàro : $u_{n+1} - u_n \to 0 \Longrightarrow \frac{u_n}{n} \to 0$.

Le cas général. *On se ramène au cas précédent en remarquant que l'hypothèse* $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, *peut se réécrire* $f'(x) - \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On pose $\varphi : x \mapsto f(x) - \ell x$.
Cette fonction φ *est dérivable et la fonction* $\varphi' : x \mapsto f'(x) - \ell$ *vérifie* $\varphi'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
D'après le cas précédent, on en déduit que $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *D'où, par opérations,*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x} + \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Remarque. *La réciproque est fausse. Prenons la fonction sinus. On a* $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, *mais la fonction* $f' = \cos$ *n'a pas de limite en* $+\infty$.

Théorème de Rolle

Exercice 34. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindés. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme de degré* $n \geq 2$.

1. (a) *On suppose que* P *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* P' *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{R}$.
   (b) *Ce résultat est-il encore vrai pour un polynôme de degré 1 ? est-il encore vrai sur* $\mathbb{C}$ *?*
2. *On suppose que* P *est scindé sur* $\mathbb{R}$, *de racines* $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ *de multiplicités respectives* $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) *Justifier que pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$, α_i *est racine de* P' *de multiplicité* $m_i - 1$.
   (b) *En déduire que* P' *est scindé sur* $\mathbb{R}$.

Correction.

1. (a) *Par hypothèse,* P *est scindé à racines simples. Notons donc* $a_1, \dots, a_n$ *les* n *racines distinctes de* P *et* f *sa fonction polynomiale associée.* f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(a_i) = f(a_{i+1})$ *donc d'après le théorème de Rolle, pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$, *il existe* $c_i \in]a_i, a_{i+1}[$ *tel que* $f'(c_i) = 0$. *Comme* $a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < a_{n-1} < c_{n-1} < a_n$, *les* $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ *sont deux à deux distincts. On a donc trouvé* $n-1$ *racines distinctes du polynôme* P'.
   Or, comme P *est de degré* $n \geq 2$, P' *est de degré* $n-1$, *donc* $\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ à racines simples}}$.

   (b) $\boxed{\text{Non}}$ *car* $P = X$ *est scindé à racine simple et* $P' = 1$ *est scindé mais n'a pas de racine.*
   $\boxed{\text{Non}}$ *car* $P = X^3 - 1$ *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{C}$, *mais* $P' = 3X^2$ *est scindé sur* $\mathbb{C}$, *mais pas à racines simples.*

2. (a) *Soit* $i \in [\![1, p]\!]$. *Par caractérisation de la multiplicité, on a* $P(\alpha_i) = P'(\alpha_i) = \dots = P^{(m_i-1)}(\alpha_i) = 0$ *et* $P^{(m_i)}(\alpha_i) \neq 0$.
   - *Si* $m_i \geq 2$ *alors* $P'(\alpha_i) = \dots = (P')^{(m_i-2)}(\alpha_i) = 0$ *et* $(P')^{(m_i-1)}(\alpha_i) \neq 0$ *donc* α_i *est racine de* P' *de multiplicité* $m_i - 1$.
   - *Si* $m_i = 1$, *alors* $P'(\alpha_i) \neq 0$ *donc* α_i *n'est pas racine de* P' *: on conviendra alors que* α_i *est racine de* P' *de multiplicité 0 pour regrouper ces deux résultats en un seul.*

   Dans tous les cas, $\boxed{\alpha_i \text{ est racine de } P' \text{ de multiplicité } m_i - 1}$.

(b) D'après la question précédente, α_1, …, α_p sont racines de P' de multiplicités respectives $m_1-1,\dots,m_p-1$.
Par ailleurs, fixons $i\in[\![1,p-1]\!]$. En appliquant le théorème de Rolle à P entre α_i et α_{i+1}, il existe $c_i\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ tel que $P'(c_i)=0$.
Ainsi, $c_1,\dots,c_{p-1}$ sont des racines de P', deux à deux distinctes, et distinctes de α_1, …, α_p.
On a donc obtenu :

$$(p-1)+(m_1-1)+\dots(m_p-1)=\sum_{i=1}^{p}m_i-1$$

racines de P'.
Or, par hypothèse, P est scindé donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $P=\lambda\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$. En passant au degré, on obtient $\sum_{i=1}^{p}m_i=\deg(P)=n$.
Ainsi, on a trouvé $n-1$ racines de P' et, puisque P n'est pas constant, $\deg(P')=\deg P-1=n-1$, donc $\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 35 (Mines)**. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindés à racines simples.** *Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples et de degré ≥ 2. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.*

Correction. *Le résultat est immédiat dans le cas des deux premiers coefficients : si les coefficients de degré 0 et 1 sont nuls, le polynôme est divisible par X^2, donc 0 en est une racine double, ce qui est exclu. Le cas général s'en déduit à cause du fait que l'ensemble des polynômes réels simplement scindés est stable par dérivation (cf exercice 34).*
Comme par hypothèse, P est un polynôme réel à racines simples, P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Il est en de même de P'', P''', …. Or, si le polynôme P admet deux coefficients consécutifs nuls alors l'un de ses polynômes dérivées admet 0 pour racine double, ce qui contredit le fait qu'il soit à racines simples.
Formellement, supposons qu'il existe $k\in[\![0,\deg P-2]\!]$ tel que $a_k=a_{k+1}=0$ (on a $k\leq\deg P-2$ car $a_{\deg P}\neq 0$). Or, d'après la formule de Taylor, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$ donc $P^{(k)}(0)=P^{(k+1)}(0)=0$, d'où 0 est racine double de $P^{(k)}$, ce qui est absurde car $P^{(k)}$ est scindé à racines simples.
Ainsi, $\boxed{P \text{ n'a pas deux coefficients consécutifs nuls}}$.

Exercice 36. Rolle itéré. *Soient $n\in\mathbb{N}$. On suppose que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et f s'annule en $n+1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.*

Correction. *Montrons par récurrence finie sur $k\in[\![0,n]\!]$, la propriété*

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } f^{(k)} \text{ a au moins } n+1-k \text{ zéros distincts ».}$$

- *L'initialisation est vérifiée car $f^{(0)}=f$ a $n+1$ zéros distincts.*
- *Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(k)$.*
  Par hypothèse de récurrence, $f^{(k)}$ a au moins $n+1-k$ zéros distincts $a_1<\dots<a_{n+1-k}$.
  Pour tout $i\in[\![1,n-k]\!]$, $f^{(k)}\in\mathcal{D}([a_i,a_{i+1}],\mathbb{R})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe

$c_i \in]a_, a_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_i) = 0$. Puisque $a_1 < c_1 < a_2 < c_2 \cdots < c_{n-k} < a_{n+1-k}$, la fonction $f^{(k+1)}$ admet bien au moins $n - k = (n+1) - (k+1)$ zéros distincts, ce qui prouve $\mathscr{P}(k+1)$.

- *Par théorème de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $f^{(k)}$ a au moins $n + 1 - k$ zéros distincts.*

En particulier, $\boxed{f^{(n)} \text{ a au moins un zéro i.e. } f^{(n)} \text{ s'annule au moins une fois}}$.

Exercice 37. Coïncidence entre fonction polynomiale et exponentielle. *Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.*

Correction. *Le cas du polynôme nul est facile.*
Désormais, supposons $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et notons $n = \deg P \in \mathbb{N}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation admet un nombre infini de solutions.
En particulier, il existe au moins $n+2$ points pour lesquels la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - P(x)$ s'annule.
D'après l'exercice 36, on obtient que $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois (il faut savoir redémontrer cela !).
Or comme $n = \deg P$, on a $P^{(n+1)} = 0$ donc $\varphi^{(n+1)} = \exp$ et la fonction exponentielle ne s'annule pas, d'où la contradiction.

Exercice 38. Égalité des accroissements finis généralisée. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et à valeurs réelles.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Correction. *Introduisons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :*

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))\,(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))\,(g(x) - g(a))\,.$$

Il est immédiat que $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. De plus, d'après les théorèmes généraux, la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et, pour tout $x \in]a, b[$, $\varphi'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x) - (f(b) - f(a))\, g'(x)$.
Le théorème de Rolle appliqué à la fonction φ permet de conclure.
Remarque : *on peut aussi utiliser la fonction $x \mapsto (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x)$.*

Exercice 39. Avec la dérivée seconde. *Soit $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.*
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

On pourra considérer $\varphi : x \mapsto \big(f(x) - f'(x)\big)e^x$.

Correction. Idée. *Les hypothèses se réécrivent $(f(a) - f'(a))e^a = 0$ et $(f(b) - f'(b))e^b = 0$.*
Début de la preuve. *Posons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))e^x$.*
On a les hypothèses suivantes : $\begin{cases} \text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{la fonction } \varphi \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \varphi(a) = \varphi(b) \end{cases}$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Or $\varphi' : x \mapsto (f(x) - f''(x))e^x$, et $e^c \neq 0$ donc $\boxed{f(c) = f''(c)}$.

Exercice 40. Théorème de Rolle généralisé. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Indication : *on pourra étudier la fonction $g : x \mapsto f(\tan x)$ ou la fonction $h : x \mapsto f\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ou montrer que f est non injective.*

Correction.

Méthode 1. *Posons l'application $g : x \mapsto \begin{cases} f(\tan x) & si \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & si \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ définie sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

- *Par les théorèmes généraux, g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.*
- *De plus, on sait que $\tan x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$, et par hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc, par composition des limites, on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc g est continue en $\pi/2$. Ainsi, g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*
- *Par ailleurs, $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.*

Les 3 hypothèses du théorème de Rolle étant vérifiées, l'existence d'un réel $d \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ est assurée.
Or $g'(d) = f'(\tan d)\underbrace{(1 + \tan^2 d)}_{>0}$, donc $\boxed{f' \text{ s'annule sur } \mathbb{R}_+^* \text{ (en } \tan d)}$.

Méthode 2. *Posons $h : x \mapsto f\left(\frac{x}{1-x}\right)$. h est définie sur $[0, 1[$ et prolongeable par continuité en 1, en posant $h(1) = f(0)$. Dès lors, h est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $h(0) = h(1)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0, 1[$ tel que $h'(d) = 0$, donc $f'\left(\frac{d}{1-d}\right) \times \dfrac{1}{(1-d)^2} = 0$, d'où $f'\left(\frac{d}{1-d}\right) = 0$. Ainsi, f' s'annule en $\frac{d}{1-d} \in \mathbb{R}_+^*$.*

Méthode 3. *On peut aussi montrer que f n'est pas injective et appliquer le théorème de Rolle. Distinguons deux cas.*

- *S'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = f(0)$, le résultat est une conséquence directe du théorème de Rolle appliqué à f sur le segment $[0, a]$.*
- *Dans le cas contraire, on a $\forall x > 0,\ f(x) \neq f(0)$. Alors, par une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires (vu que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$), on a :*

  $$(\forall x > 0,\ f(x) > f(0)) \quad ou \quad (\forall x > 0,\ f(x) < f(0))\,.$$

  Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer, que :

  $$\forall x > 0,\ f(x) > f(0).$$

  - *On a $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$ et $f(0) < f(1)$ donc $\lim\limits_{+\infty} f < f(1)$ donc on peut trouver un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f < f(1)$ et en particulier, on peut trouver $b > 1$ tel que $f(b) < f(1)$.*

- *On a donc $f(b) \in]f(0), f(1)[$. Par conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, il existe aussi $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = f(b)$.*
- *Les inégalités $a < 1 < b$ montrent que $a < b$, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle sur le segment $[a,b]$ et d'en déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Exercice 41. Dérivées d'arctan. *Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.*

1. *Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe une unique fonction polynomiale P_n telle que, pour tout réel x, on ait $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le coefficient dominant c_n de P_n à l'aide de factorielles.*
4. *En faisant le lien entre P_n et la dérivée n-ème de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.*

On pourra utiliser le théorème de Rolle généralisé.

Correction.

1.
   - *D'après les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
   - *L'unicité est immédiate, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$.*
   - *Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.*

     ▷ *La fonction constante $P_0 = 1$ convient lorsque $n = 0$.*

     ▷ *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

     $$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

     En posant la fonction $P_{n+1} : x \mapsto (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$ qui est polynomiale d'après l'hypothèse de récurrence et les opérations sur les fonctions polynomiales, on obtient que $f^{(n+1)} : x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$. On a donc l'hérédité, ce qui conclut la récurrence et la question.

2. *D'après la récurrence précédente, la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, comme suit :*

   $$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2(n+1)XP_n. \end{cases}$$

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ est de la forme $a_nX^n + S_n$ avec $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   - *$P_0 = 1$ est bien de la forme $a_0X^0 + S_0$ avec $a_0 = 1$ et $S_0 = 0$ qui est bien de degré $\leqslant -1$.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n = a_nX^n + S_n$ avec $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.*
     Montrons que P_{n+1} s'écrit $a_{n+1}X^{n+1} + S_{n+1}$ avec $S_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Utilisons la définition de P_{n+1} et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (X^2+1)P_n' \;-\; 2(n+1)XP_n \\ &= (X^2+1)\big(na_nX^{n-1}+S_n'\big) \;-\; 2(n+1)X\big(a_nX^n+S_n\big) \\ &= -(n+2)a_nX^{n+1} \;+\; S_{n+1}, \end{aligned}$$

avec $S_{n+1} = na_nX^{n-1}+(X^2+1)S_n'-2(n+1)XS_n$ qui est de degré $\leqslant n$ (car S_n est de degré $\leqslant n-1$ d'après l'hyp. de réc.). Cela conclut l'hérédité et la récurrence.

3. *D'après la question précédente, on a la relation de récurrence pour le coefficient dominant de P_n :*

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ c_{n+1} \;=\; -(n+2)c_n. \end{cases}$$

On conjecture donc que $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ c_n = (-1)^n(n+1)!}$.
Méthode 1. *On peut prouver cela par récurrence (je vous laisse faire).*
Méthode 2. *Preuve directe. Par récurrence immédiate, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n\neq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Examinons le produit suivant $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_{k-1}}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (c_n), on a*

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_{k-1}} \;=\; \prod_{k=1}^{n}-(k+1) \;=\; (-1)^n(n+1)!$$

Or ce produit est télescopique et vaut aussi $\dfrac{c_n}{c_0} = c_n$ (car $c_0 = 1$).

Ainsi, $\boxed{c_n = (-1)^n(n+1)!}$.

4. *La suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée aux dérivées successives de f. En effet, on a $f^{(n)} : x\mapsto \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$. Ainsi, on obtient une information sur l'évaluation de P_n en un réel x :*

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad P_n(x) \;=\; (x^2+1)^{n+1}f^{(n)}(x).$$

Bilan de cette mini-étude : une racine de P_n est donc un zéro de $f^{(n)}$ et réciproquement.

Allons-y pour la récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{« } P_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes »}.$$

Initialisation. *Le polynôme formel $P_0 = 1$ admet 0 racine.*

Hérédité. *Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.*
Il existe donc n racines réelles distinctes de P_n. Notons-les $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Ces x_k sont des zéros de $f^{(n)}$ d'après la remarque bleue.
Fixons $k\in[\![1,n-1]\!]$, et appliquons le théorème de Rolle à la fonction $f^{(n)}$ entre x_k et x_{k+1}. On a :

- *$f^{(n)}$ continue sur $[x_k, x_{k+1}]$*
- *$f^{(n)}$ dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$*

- $f^{(n)}(x_k) = f^{(n)}(x_{k+1})$ *(car cela vaut 0)*

Donc il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(y_k) = 0$.
On a donc trouvé $y_1 < \cdots < y_{n-1}$ qui sont des zéros de $f^{(n+1)}$, donc des racines de P_{n+1}.

Il reste à trouver deux racines pour P_{n+1}. *Ceci va se faire grâce au théorème de Rolle généralisé.*

▷ ***Première racine manquante pour P_{n+1}.***
On a

- $f^{(n)}$ *continue sur* $]-\infty, x_1]$
- $f^{(n)}$ *dérivable sur* $]-\infty, x_1[$
- $\lim\limits_{-\infty} f^{(n)} = f^{(n)}(x_1)$.
  En effet, d'une part, $f^{(n)}(x_1) = 0$.
  D'autre part, $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, *donc $f^{(n)}$ est le quotient d'une fonction polynomiale de degré n (d'après la question et d'une fonction polynomiale de degré $2(n+1)$, donc* $\lim\limits_{-\infty} f^{(n)} = 0$.

D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe $y_0 \in]-\infty, x_1[$ tel que $(f^{(n)})'(y_0) = 0$, donc tel que $f^{(n+1)}(y_0) = 0$. Ainsi $P_{n+1}(y_0) = 0$.

▷ ***Deuxième racine manquante pour P_{n+1}.***
Comme précédemment, le théorème de Rolle généralisé appliqué à $f^{(n)}$ sur $[x_n, +\infty[$, assure l'existence de $y_n \in]x_n, +\infty[$ tel que $(f^{(n)})'(y_n) = 0$, donc tel que $f^{(n+1)}(y_n) = 0$. Ainsi $P_{n+1}(y_n) = 0$.

Bilan de l'hérédité. *On a trouvé $y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n$ qui sont des zéros de $f^{(n+1)}$, donc des racines de P_{n+1}.*

Ainsi, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie : on a bien prouvé que P_{n+1} admet $n+1$ racines réelles distinctes, ce qui conclut la question.

Exercice 42. Avec une fonction auxiliaire. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.*

1. *Pour tout $c \in]a, b[$, montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$.*
   Indication : *on pourra étudier la fonction* $h : x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

2. *En déduire une constante M telle que : $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M \dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.*

Correction.

1. *Soit $c \in]a, b[$. Considérons la fonction* $h : x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

On a : $h(a) = f(a) = 0$ *et* $h(b) = f(b) = 0$ *et* $h(c) = 0$. *De plus,* $h \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ *donc pour tout* $x \in [a,b]$, *on a*

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(2x-a-b) \quad \text{et} \quad h''(x) = f''(x) - \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

En appliquant le théorème de Rolle à h qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, on obtient l'existence de $\alpha \in]a,c[$ *et* $\beta \in]c,b[$ *tels que* $h'(\alpha) = h'(\beta) = 0$.
En appliquant ensuite le théorème de Rolle à h' qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, on obtient l'existence de $d \in]\alpha,\beta[$ *(donc* $d \in]a,b[$*) tel que* $h''(d) = 0$.
Ainsi, $f''(d) = \dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$ *puis* $\boxed{f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)}$.

2. f'' *est continue sur le segment* $[a,b]$ *(car f est $\mathscr{C}^2$) donc d'après le théorème des bornes atteintes,* f'' *est bornée, donc il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall x \in [a,b],\ |f''(x)| \leq M$. *En passant aux modules dans l'égalité de la question 1 et en majorant ainsi* $|f''|$, *on obtient*

$$\forall c \in]a,b[,\ |f(c)| \leq M\frac{(c-a)(b-c)}{2}.$$

De plus, l'inégalité est clairement vraie pour $c = a$ *et* $c = b$, *ce qui conclut.*

Exercice 43. Avec une fonction auxiliaire. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a < b$ *et* $f \in \mathscr{C}^3([a,b],\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Indication : *on pourra étudier la fonction* $\varphi : t \mapsto f(t) - f(a) - \dfrac{t-a}{2}\left(f'(a) + f'(t)\right) + \dfrac{(t-a)^3}{12}A$, *où A est une constante bien choisie.*

Correction.

- φ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $[a,b]$. *Soit* $t \in [a,b]$. *Après calculs, on obtient*

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(f'(t) - f'(a)\right) - \frac{t-a}{2}f''(t) + \frac{(t-a)^2}{4}A,$$

et

$$\varphi''(t) = \frac{t-a}{2}\left(A - f^{(3)}(t)\right).$$

- $\varphi(a) = 0$. *On choisit A tel que* $\varphi(b) = 0$.

> *Licite car en notant* $g : t \mapsto \varphi(t) - \dfrac{(t-a)^3}{12}A$, *on a* $A = \dfrac{12[\varphi(b) - g(b)]}{(b-a)^3}$.

Dès lors, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *et* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, *donc d'après le théorème de Rolle, il existe* $d \in]a,b[$ *tel que* $\varphi'(d) = 0$.

- *$\varphi'(a) = \varphi'(d) = 0$ et φ' est dérivable sur $[a, d]$ à valeurs réelles. En appliquant le <u>théorème de Rolle</u> à φ' sur $[a, d]$, on obtient l'existence d'un point $c \in]a, d[\subset]a, b[$ tel que $\varphi''(c) = 0$.*

- *$\varphi''(c) = 0$ et $c \neq a$ implique que $A = f^{(3)}(c)$.*

- *Finalement, $\boxed{\varphi(b) = 0 \text{ avec } A = f^{(3)}(c) \text{ permet de conclure}}$.*

Exercice 44. Avec une fonction auxiliaire ou TL. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

<u>**Correction.**</u>

- *Étudions $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{2}(f(a) + f(t)) - f\left(\dfrac{a+t}{2}\right) - \dfrac{(t-a)^2}{8} A$, où A est une constante à déterminer.*
  φ est dérivable sur $]a, b[$, pour tout $t \in]a, b[$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(f'(t) - f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right) - \frac{t-a}{4} A$, et $\varphi(a) = 0$. On choisit A tel que $\varphi(b) = 0$.
  Ainsi, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc d'après le <u>théorème de Rolle</u>, il existe $d \in]a, b[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.

- *$\varphi'(d) = 0$ implique que $\underline{A = \dfrac{2}{d-a}\left[f'(d) - f'\left(\dfrac{a+d}{2}\right)\right]}$.*

- *On applique le <u>TAF à f'</u> sur $\left[\dfrac{a+d}{2}, d\right]$. Ainsi il existe $c \in \left]\dfrac{a+d}{2}, d\right[$ tel que*

$$f'(d) - f'\left(\frac{a+d}{2}\right) = \left(d - \frac{a+d}{2}\right) f''(c) = \left(\frac{d-a}{2}\right) f''(c).$$

- *En remplaçant dans A, on trouve que $\underline{A = f''(c)}$.*

- *Finalement, $\boxed{\varphi(b) = 0 \text{ avec } A = f''(c) \text{ permet de conclure}}$.*

Exercice 45. Formule de Taylor-Lagrange. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f vérifie les trois conditions suivantes :*

- *f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur $[a, b]$;*
- *$f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$;*
- *$f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.*

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Le terme $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé ***reste de Lagrange****.*

Correction. **Méthode 1.** *Soit A le nombre réel défini par*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A,$$

et φ l'application définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \left[f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A\right].$$

On a $\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$.
Il est clair que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifie $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 0 - f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}A \\
&= 0 - f'(x) + f'(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}A \qquad \textit{télescopage} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}\left[A - f^{(n+1)}(x)\right].
\end{aligned}$$

Pour $x = c$, et sachant que $\dfrac{(b-c)^n}{n!} \neq 0$, on obtient $\boxed{A = f^{(n+1)}(c)}$. En reportant dans la définition de A, on conclut.
Méthode 2. *Soit $\psi : x \mapsto f(x) - \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}B\right]$, définie sur $[a, b]$.*
ψ est donc $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et pour tout $x \in]a, b[$,

$$\psi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - B(x-a) \quad \text{et} \quad \psi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - B.$$

Il est remarquable que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \psi^{(k)}(a) = 0$.
Tout d'abord, on a $\psi(a) = 0$, et on pose B tel que $\psi(b) = 0$, de telle sorte que $\psi(a) = \psi(b)$. De plus, ψ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué

à ψ, il existe $b_1 \in]a, b[$ tel que $\psi'(b_1) = 0$.
Mais $\psi'(a) = 0 = \psi'(b_1)$, et en appliquant le théorème de Rolle à ψ', on obtient l'existence de $b_2 \in]a, b_1[$ tel que $\psi''(b_2) = 0$.
En itérant, on construit $b_1, \dots, b_n$ tels que $a < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\psi^{(k)}(b_k) = 0$. En particulier, $\psi^{(n)}(b_n) = 0$.
Dès lors, $\psi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(b_n)$, $\psi^{(n)}$ est continue sur $[a, b_n]$, dérivable sur $]a, b_n[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à $\psi^{(n)}$, il existe $c \in]a, b_n[$ tel que $\psi^{(n+1)}(c) = 0$.
On a donc

$$f^{(n+1)}(c) = B, \text{ et } B \text{ tel que } \psi(b) = 0,$$

ce qui conclut.
Remarque : *pour $n = 0$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.*

Fonctions convexes

Exercice 46. *Soient I et J des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.*
On suppose f convexe et g croissante convexe. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Correction. *Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de f, on a :*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

En appliquant la fonction croissante g à cette inégalité (ce qui est licite car chaque terme est un élément de J vu que J est un intervalle), on obtient :

$$(g \circ f)((1-\lambda)x + \lambda y) \leq g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)).$$

Comme g est convexe sur J et $f(x), f(y) \in J$, on a :

$$g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \leq (1-\lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y)$$

donc par transivité :

$$(g \circ f)((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y),$$

ce qui prouve que $\boxed{g \circ f \text{ est convexe sur } I}$.

Exercice 47. Inégalité de Young. *Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \; ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Indication : *on pourra exploiter la concavité de la fonction $\ln$.*

Correction. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.*

- *Si a ou b est nul, alors l'inégalité est évidente. On rappelle que par convention $0^p = 0$ pour $p \in \mathbb{R}_+^*$ (on a prolongé par continuité en 0 les puissances réelles avec exposant strictement positif).*

- *Sinon, la fonction* $\ln$ *étant concave sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on a :*

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q).$$

Or, par propriété du $\ln$*, on a* $\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)=\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$.
L'inégalité souhaitée découle alors de la croissance de la fonction exponentielle.

Exercice 48. *Montrer*

$$\forall (x_1,x_2)\in]1,+\infty[^2,\ \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq \sqrt{\ln x_1 \ln x_2}.$$

Indication : *on pourra remarquer que* $\ln\circ\ln$ *est concave sur* $]1,+\infty[$.

Correction. Méthode 1 (en suivant l'indication). *La fonction* $x\mapsto \ln(\ln x)$ *est dérivable sur* $]1,+\infty[$*, et sa dérivée* $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ *est décroissante sur* $]1,+\infty[$.
On en déduit que $x\mapsto \ln(\ln x)$ *est concave sur* $]1,+\infty[$.
On a donc :

$$\forall (x_1,x_2)\in]1,+\infty[^2,\ \ln\left(\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\geq \frac{\ln(\ln x_1)+\ln(\ln x_2)}{2},$$

i.e.

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\geq \ln\sqrt{\ln x_1\ln x_2}.$$

On conclut grâce à la croissance de la fonction exponentielle.
Méthode 2. *Soit* $(x_1,x_2)\in]1,+\infty[^2$*. Alors* $(\ln x_1,\ln x_2)\in\mathbb{R}_+^2$ *et par inégalité arithmético-géométrique, on a*

$$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}\geq\sqrt{\ln x_1\ln x_2}.$$

De plus, par concavité de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on a*

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}.$$

On déduit des deux inégalités précédentes, l'inégalité souhaitée.

Exercice 49. 1. *Soient* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *convexe et* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $a<b$*. Montrer les implications suivantes :*

   i) $f(a)<f(b)\Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

   ii) $f(a)>f(b)\Longrightarrow \lim\limits_{-\infty} f=+\infty$.

   iii) $f(a)=f(b)\Longrightarrow \forall x\in[a,b],\ f(x)\leq f(a)$.

2. *Que dire d'une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *convexe et majorée ?*

Correction. *Notons* A *(resp.* B*) le point du plan de coordonnées* $(a,f(a))$ *(resp.* $(b,f(b))$*).*

1. *i) Supposons que* $f(a)<f(b)$*. La fonction* f *est convexe donc le graphe de* f *sur* $[b,+\infty[$ *est*

au-dessus de la sécante (AB), d'où :

$$\forall t \geq b,\ f(t) \geq \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{>0}(t-a)+f(a).$$

La fonction de droite tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ donc par théorème de minoration, on en déduit que $\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$.

ii) Supposons que $f(a) > f(b)$. La fonction f est convexe donc le graphe de f sur $]-\infty, a]$ est au-dessus de la sécante (AB), d'où :

$$\forall t \leq a,\ f(t) \geq \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{<0}(t-a)+f(a).$$

La fonction de droite tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $-\infty$ donc par théorème de minoration, on en déduit que $\boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty}$.

iii) Supposons que $f(a) = f(b)$. La fonction f est convexe donc le graphe de f sur $[a, b]$ est en dessous de la corde $[AB]$, d'où :

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{=0}(t-a)+f(a),$$

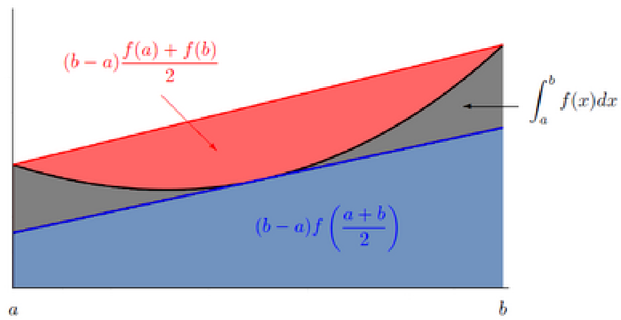
ce qui conclut.

2. *Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Mq f est constante.*
   Faisons une preuve directe. Fixons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrons que $f(a) = f(b)$.
   Si $f(a) < f(b)$, alors d'après 1. on aurait $\lim_{+\infty} f = +\infty$, ce qui contredit la majoration de f sur $\mathbb{R}$. Donc $f(a) \geq f(b)$.
   De même, si $f(a) > f(b)$, alors d'après 2. on aurait $\lim_{-\infty} f = +\infty$, ce qui contredit la majoration de f sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(a) = f(b)$, cela pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 50. Inégalité d'Hermite-Hadamard. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable en $\frac{a+b}{2}$. Montrer que la valeur moyenne de son intégrale sur $[a,b]$ est bornée par :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Correction.



*Posons A et B les points du plan de coordonnées $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.
f est convexe donc son graphe est en dessous de la corde $[A,B]$ et au dessus de sa tangente en $\frac{a+b}{2}$. Ainsi :*

$$\forall t\in[a,b],\ f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq f(t)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a).$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[a,b]$, en divisant par le réel $b-a$ (qui est >0), on obtient :

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f\leq\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(t-a)\mathrm{d}t+f(a).$$

Or, $\displaystyle\int_a^b\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t=0$ et

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(t-a)\mathrm{d}t+f(a)&=\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\frac{(b-a)^2}{2}+f(a)\\&=\frac{f(b)-f(a)}{2}+f(a)\\&=\frac{f(a)+f(b)}{2},\end{aligned}$$

ce qui donne l'encadrement souhaité.
Remarque. *La quantité à droite dans l'encadrement représente l'aire d'un trapèze, qui vaut bien $(b-a)\times\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ ici.*

Exercice 51. Inégalité de Jensen. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que*

$$\forall p\geq 2,\ \forall(x_1,\dots,x_p)\in I^p,\ \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in[0,1]^p,\ \sum_{i=1}^p\lambda_i=1\Longrightarrow\sum_{i=1}^p\lambda_i x_i\in I \text{ et } f\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^p\lambda_i f(x_i).$$

Application. *En déduire que* $\forall p\geq 2,\ \forall(x_1,\dots,x_p)\in(\mathbb{R}_+^*)^p,\ \left(\prod_{i=1}^p x_i\right)^{1/p}\leq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i.$

Correction. *par récurrence sur p.*

- *Pour $p=2$, c'est juste la définition de la convexité et de l'intervalle I.*
- *Hérédité : soit $p\geq 2$ tel que la propriété est vraie au rang p.*

Soient $(x_1,\dots,x_{p+1})\in I^{p+1}$ *et* $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1})\in[0,1]^{p+1}$ *tels que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i=1$.

- *Commençons par montrer le premier point. En posant* $m=\min\{x_1,\dots,x_p\}$ *et* $M=\max\{x_1,\dots,x_p\}$, *on a* $\forall i\in[\![1,p+1]\!],\ m\leq x_i\leq M$ *et* $\lambda_i\geq 0$ *donc* $m\lambda_i\leq\lambda_i x_i\leq M\lambda_i$ *En sommant ces inégalités et puisque* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i=1$, *on obtient* $\displaystyle m\leq\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\leq M$. *Ainsi,* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\in[m,M]$ *et* $(m,M)\in I^2$ *et* I *est un intervalle, donc* $\underline{\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\in I}$.
- *Pour montrer le deuxième point, distinguons deux cas.*
  - *Si* $\lambda_{p+1}=1$, *alors* $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$, *donc la propriété est vraie au rang* $p+1$.
  - *Supposons maintenant* $\lambda_{p+1}\neq 1$. *Alors* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1-\lambda_{p+1}$, *donc* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}=1$.

    Écrivons :
    $$\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i=\lambda_{p+1}x_{p+1}+(1-\lambda_{p+1})\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i}_{\in I\ par\ HR}\quad(\star).$$

    De plus, par convexité de f *sur* I, *on a*
    $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right)\leq\lambda_{p+1}f(x_{p+1})+(1-\lambda_{p+1})f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i\right).$$

    Or, par HR, on a : $\displaystyle f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}f(x_i)$, *et puisque* $1-\lambda_{p+1}\geq 0$, *on obtient*
    $$(1-\lambda_{p+1})f\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i),$$
    d'où
    $$f\left(\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p+1}\lambda_i f(x_i),$$
    ce qui prouve permet d'en déduire l'hérédité et conclut la récurrence.

Remarque 1 : *on a en fait une équivalence entre cette assertion et* f *convexe sur* I, *ce qui donne une autre caractérisation de la convexité.*
Remarque 2 : *l'application se déduit de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe* $-\ln$, *avec les* λ_i *tous égaux à* $\frac{1}{p}$ *:* $\displaystyle\forall p\geq 2,\ \forall(x_1,\dots,x_p)\in(\mathbb{R}_+^*)^p,\ \ln\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i\right)\geq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln(x_i)=\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{p}x_i\right)^{1/p}\right)$, *puis par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit l'**inégalité arithmético-géométrique**.*
En particulier, on retrouve la formule bien connue $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 52. Méthode de Newton. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$.*

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la méthode de Newton $\begin{cases} x_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$

Montrer que f a un unique zéro (noté z), que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[z,b]$ et converge vers z.

Correction. *Par hypothèses, f est strictement croissante et convexe sur l'intervalle $[a,b]$.*

- *Par hypothèses, $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$ donc induit une bijection de $[a,b]$ sur $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, où $0 \in [f(a), f(b)]$, donc 0 admet un unique antécédent par f, noté z.*

- *Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [z,b]$.*

  - *On a : $x_0 = b$ donc $\underline{x_0 \in [z,b]}$.*
  - *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in [z,b]$.*
    D'une part, par définition, on a $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
    Par HR, $x_n \geq z$ et on sait que f est croissante et $f(z) = 0$, donc $f(x_n) \geq 0$.
    De plus, par hypothèse, $f'(x_n) > 0$, donc $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$ donc $\underline{x_{n+1} \leq x_n}$.
    Il reste à montrer que $x_{n+1} \geq z$.
    f est convexe donc au-dessus de ses tangentes et notamment celle en x_n.
    Ainsi, $\forall t \in [a,b],\ f(t) \geq f'(x_n)(t - x_n) + f(x_n)$.
    Méthode 1. *En particulier au point x_{n+1}, on a $f(x_{n+1}) \geq 0 = f(z)$ (par définition de x_{n+1}) et f est strictement croissante donc $x_{n+1} \geq z$.*
    Méthode 2. *En particulier au point z, on a $0 = f(z) \geq f'(x_n)(z - x_n) + f(x_n)$, d'où*

    $$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq z \quad \text{i.e.} \quad x_{n+1} \geq z.$$

    Finalement, $\underline{x_{n+1} \in [z,b]}$.

- *Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [z,b]$, on a $f(x_n) \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0$.*
  Ainsi, la suite (x_n) est décroissante et minorée (par z) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(x_n) \text{ converge, disons vers } \ell \in \mathbb{R}}$.

- *Montrons que $\ell = z$. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [z,b]$ donc par passage à la limite, $\ell \in [z,b]$. En particulier, f et f' sont continues en ℓ, donc la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$ et $(f'(x_n))$ converge vers $f'(\ell) \neq 0$.*
  Par ailleurs, en tant que suite extraite de (x_n), la suite (x_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Par définition de (x_{n+1}), on obtient alors par passage à la limite et par unicité de la limite : $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, d'où $f(\ell) = 0$. Par unicité du zéro de f (ou injectivité de f), on conclut que $\boxed{\ell = z}$.

Remarque (alternative à la récurrence). *On pose $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.*
g est définie et continue sur $[a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$. On sait donc que si (x_n) converge, sa limite est un point fixe de g.
Déterminons les points fixes de g.

Pour $x \in [a,b]$, on a $g(x) = x \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = z$. Donc z est l'unique point fixe de g sur $[a,b]$.
Il reste à montrer que $[z,b]$ est stable par g.
g est dérivable sur $[a,b]$ et après calculs, on a en particulier $\forall x \in [z,b],\ g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \geq 0$ (car $f'' > 0$, f croît et $f(z) = 0$ donc $f \geq 0$ sur $[z,b]$). Ainsi, g est croissante sur $[z,b]$.
Soit $x \in [z,b]$. Par croissance de g, on a

$$g(z) \leq g(x) \leq g(b).$$

Or, $g(z) = z$ (car z est point fixe de g) et $g(b) = b - \underbrace{\frac{f(b)}{f'(b)}}_{>0} < b$ donc $g(x) \in [z,b]$, ce qui conclut.