Échauffement

Exercice 1. *Dans un lycée de* $1\,200$ *élèves,* 652 *pratiquent une activité sportive,* 327 *jouent d'un instrument de musique et* 453 *ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.*

Correction. *Notons* S *l'ensemble des élèves faisant du sport et* M *celui des élèves jouant d'un instrument. D'après l'énoncé,* $\mathrm{Card}(S)=652; \mathrm{Card}(M)=327; \mathrm{Card}(\overline{S}\cap\overline{M})=453=\mathrm{Card}(\overline{S\cup M})$, *d'après les lois de Morgan.*
En passant au complémentaire, il vient : $\mathrm{Card}(S\cup M)=1200-453=747$.
$\boxed{\mathrm{Card}(S\cap M)=\mathrm{Card}(S)+\mathrm{Card}(M)-\mathrm{Card}(S\cup M)=652+327-747=232}$.
Il y a 232 élèves sportifs et musiciens.

Exercice 2. Diviseurs. *Soit* $n=2^{31}\times 3^{19}$. *Dans tout l'exercice, « diviseur » veut dire « diviseur positif ».*

1. *Combien* n^2 *a-t-il de diviseurs ?*
2. *Était-il prévisible que ce nombre soit impair ?*
3. *Combien* n^2 *a-t-il de diviseurs* $\leq n$ *?*
4. *Combien* n^2 *a-t-il de diviseurs qui ne divisent pas* n *mais qui sont* $\leq n$ *?*

Correction.

1. *On sait que les diviseurs de* $n^2=2^{62}\times 3^{38}$ *sont de la forme* $2^a\times 3^b$ *avec* $a\in [\![0,62]\!]$ *et* $b\in[\![0,38]\!]$, *soit* 63 *possibilités pour* a *et* 39 *possibilités pour* b. *Par principe multiplicatif,* $\boxed{n^2 \text{ possède } 63\times 39=2457 \text{ diviseurs}}$.
2. *Oui, car, à l'exception de* n, *chaque diviseur* d *de* n^2 *possède un diviseur « associé »* $\frac{n}{d}$, *ce qui permet de regrouper les diviseurs* $\neq n$ *par paires.*
3. *En reprenant la notion d'association de la question précédente, on constate que les paires de diviseurs associés sont par nature constituées d'un diviseur* $<n$ *et d'un* $>n$.
$\boxed{\text{Il y a donc } 1+\frac{2457-1}{2}=1229 \text{ diviseurs de } n^2 \text{ qui sont} \leq n}$.
4. *Parmi les* 1229 *diviseurs de la question précédente,* $32\times 20=640$ *sont diviseurs de* n, *donc le résultat est* $1229-640=\boxed{589}$.

Listes et mots

Exercice 3. Nombres à sept chiffres. *Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun* 0.

1. *Déterminer le cardinal de E.*
2. *Déterminer le cardinal de E_1, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.*
3. *Déterminer le cardinal de E_2, la partie de E constituée des nombres pairs.*
4. *Déterminer le cardinal de E_3, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.*

Correction.

1. *Un élément de E est essentiellement la même chose qu'un mot de longueur 7 sur l'alphabet $[\![1,9]\!]$. Ainsi* $\boxed{|E| = 9^7 = 4\,782\,969}$.
2. *Avec le point de vue précédent, un élément de E_1 correspond à un 7-**arrangement** sur $[\![1,9]\!]$, donc* $\boxed{|E_1| = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 181\,440}$.
3. *Un élément de E est pair si et seulement si son dernier chiffre est 2, 4, 6 ou 8. Ainsi, pour construire un élément de E_2 :*
   - *on choisit les 6 premiers chiffres, qui forment un mot de longueur 6 sur $[\![1,9]\!]$: il y a 9^6 possibilités ;*
   - *on choisit le dernier chiffre dans $\{2,4,6,8\}$: il y a 4 possibilités.*

   D'après le principe de multiplication, on a donc $\boxed{|E_2| = 9^6 \times 4 = 2\,125\,764}$.
4. *Pour construire un élément de E_3, il suffit de choisir l'ensemble les 7 chiffres distincts qui interviendront dans le nombre. Puisque ceux-ci doivent être rangés par ordre croissant, il y a alors un seul nombre possédant ces chiffres.*
   Ainsi, le cardinal de E_3 est exactement le nombre de parties à 7 éléments de $[\![1,9]\!]$:

$$\boxed{|E_3| = |\mathscr{P}_7([\![1,9]\!])| = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36}.$$

Exercice 4. Pique, Cœur, Carreau, Trèfle. *Soit* $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ *un ensemble à 4 éléments.*

(i) Dénombrer les matrices de taille 1×4 *à coefficients dans* E*.*

(ii) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

(iii) Dénombrer les matrices de taille 3×1 *à coefficients dans* E*.*

(iv) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

(v) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ *à coefficients dans* E*.*

(vi) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ *à coefficients dans* E *qui possèdent exactement un* $\heartsuit$ *par ligne.*

(vii) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ *à coefficients dans* E *qui possèdent exactement un* $\heartsuit$ *par ligne et par colonne.*

Correction.

(i) Dénombrer les matrices de taille 1×4 *à coefficients dans* E*.*

Se donner une telle matrice revient à :

- *choisir le 1*^{er} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 2*^{ème} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 3*^{ème} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 4*^{ème} *coefficient : 4 choix*

soit $\boxed{4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4 \text{ possibilités}}$.

(ii) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

Se donner une telle matrice revient à :

- *choisir le 1*^{er} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 2*^{ème} *coefficient : 3 choix*
- *choisir le 3*^{ème} *coefficient : 2 choix*
- *choisir le 4*^{ème} *coefficient : 1 choix*

soit $\boxed{4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \text{ possibilités}}$.

(iii) Dénombrer les matrices de taille 3×1 *à coefficients dans* E*.*

Se donner une telle matrice revient à :

- *choisir le 1*^{er} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 2*^{ème} *coefficient : 4 choix*
- *choisir le 3*^{ème} *coefficient : 4 choix*

soit $\boxed{4 \times 4 \times 4 = 4^3 \text{ possibilités}}$.

(iv) Même question mais avec des coefficients tous distincts.

Se donner une telle matrice revient à :

- *choisir le 1er coefficient : 4 choix*
- *choisir le 2ème coefficient : 3 choix*
- *choisir le 3ème coefficient : 2 choix*

soit $\boxed{4 \times 3 \times 2 \text{ (encore égal à } 4!) \text{ possibilités}}$.

(v) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans E. Plusieurs méthodes.

Construction en ligne. *Se donner une telle matrice revient à :*

- *choisir les coefficients de la 1ère ligne : 4^n choix*
- *choisir les coefficients de la 2ème ligne : 4^n choix*
- $\vdots$
- *choisir les coefficients de la $n^{\text{ème}}$ ligne : 4^n choix*

soit $\boxed{(4^n)^n = 4^{n^2} \text{ possibilités}}$.

Construction coefficient par coefficient. *Se donner une telle matrice revient à :*

- *choisir le 1er coefficient : 4 choix*
- *choisir le 2ème coefficient : 4 choix*
- $\vdots$
- *choisir le n^2-ème coefficient : 4 choix*

soit $\boxed{4^{n^2} \text{ possibilités}}$.

(vi) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans E qui possèdent exactement un ♡ par ligne.

Construction en ligne. *Se donner une telle matrice revient à :*

- *choisir les coefficients de la 1ère ligne : $n3^{n-1}$ choix*

  En effet, cela revient à

  - ⋆ *choisir la place du cœur : n choix*
  - ⋆ *choisir les autres coefficients en nombre de $n-1$, avec 3 choix pour chacun de ces coeffs : 3^{n-1} choix*

- *choisir les coefficients de la 2ème ligne : $n3^{n-1}$ choix*
- $\vdots$
- *choisir les coefficients de la $n^{\text{ème}}$ ligne : $n3^{n-1}$ choix,*

soit $\boxed{(n3^{n-1})^n \text{ possibilités}}$.

Construction différente. *Se donner une telle matrice revient à :*

- *choisir la place des cœurs : n^n choix*

En effet, cela revient à

- ⋆ *choisir la place du cœur sur la 1ère ligne : n choix*
- ⋆ *choisir la place du cœur sur la 2ème ligne : n choix*
- ⋆ $\vdots$
- ⋆ *choisir la place du cœur sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : n choix*

- *choisir les autres coefficients en nombre de n^2-n avec 3 choix pour chacun de ces coeffs : 3^{n^2-n} choix*

soit $\boxed{n^n 3^{n^2-n} \text{ possibilités}}$.

(vii) Dénombrer les matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans E qui possèdent exactement un $\heartsuit$ par ligne et par colonne.

Construction en ligne. *Se donner une telle matrice revient à*

- *choisir les coefficients de la 1ère ligne : $n3^{n-1}$ choix*

  En effet, cela revient à

  - ⋆ *choisir la place du cœur : n choix*
  - ⋆ *choisir les autres coefficients en nombre de $n-1$, avec 3 choix pour chacun de ces coeffs : 3^{n-1} choix*

- *choisir les coefficients de la 2ème ligne : $(n-1)3^{n-1}$ choix*

  En effet, cela revient à

  - ⋆ *choisir la place du cœur : $n-1$ choix*
  - ⋆ *choisir les autres coefficients en nombre de $n-1$, avec 3 choix pour chacun de ces coeffs : 3^{n-1} choix*

- $\vdots$
- *choisir les coefficients de la $(n-1)^{\text{ème}}$ ligne : $2 \times 3^{n-1}$ choix*
- *choisir les coefficients de la $n^{\text{ème}}$ ligne : $1 \times 3^{n-1}$ choix*

soit $\boxed{(n3^{n-1}) \times ((n-1)3^{n-1}) \times \cdots \times (2 \times 3^{n-1}) \times (1 \times 3^{n-1}) \text{ possibilités}}$.

Construction différente. *Se donner une telle matrice revient à*

- *choisir la place des cœurs : $n!$ choix*

  En effet, cela revient à

  - ⋆ *choisir la place du cœur sur la 1ère ligne : n choix*
  - ⋆ *choisir la place du cœur sur la 2ème ligne : $n-1$ choix*
  - ⋆ $\vdots$
  - ⋆ *choisir la place du cœur sur la $n^{\text{ème}}$ ligne : 1 choix*

- *choisir les autres coefficients en nombre de n^2-n avec 3 choix pour chacun de ces coeffs : 3^{n^2-n} choix.*

soit $\boxed{n! \times 3^{n^2-n} \text{ possibilités}}$.

Exercice 5. Rangement d'une bibliothèque. *Une étagère comporte des livres distincts : m livres de mathématiques, p livres de physique et c livres de chimie. On pose $N = m + p + c$.*

1. *Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ?*
2. *Même question en imposant un rangement par genre.*
3. *Même question en imposant uniquement que les livres de maths soient groupés.*

Correction.

1. **Première explication.** *Un rangement des N livres revient à :*

   – *choisir la place du 1^er^ livre : N choix*
   – *choisir la place du 2^ème^ livre : $N-1$ choix*
   – $\vdots$
   – *choisir la place du $N^{\text{ème}}$ livre : 1 choix*

   D'où $\boxed{N \times (N-1) \times \cdots \times 1 = N! \text{ rangements}}$.

   Deuxième explication. *On peut aussi raconter la chose « à l'envers ».*
   Un rangement des N livres revient à :

   – *choisir le livre de la 1^ère^ place : N choix*
   – *choisir le livre de la 2^ème^ place : $N-1$ choix*
   – $\vdots$
   – *choisir le livre de la $N^{\text{ème}}$ place : 1 choix*

   D'où $\boxed{N \times (N-1) \times \cdots \times 1 = N! \text{ rangements}}$.

2. *Se donner un rangement par genre revient à :*

   – *choisir l'ordre des 3 genres : $3! = 6$ choix*
   – *choisir la place des m livres de maths : $m!$ choix*
   – *choisir la place des p livres de physique : $p!$ choix*
   – *choisir la place des c livres de chimie : $c!$ choix.*

   D'où $\boxed{6\, m!\, p!\, c! \text{ tels rangements}}$.

3. *Se donner un rangement où les livres de maths sont regroupés revient à :*

   • *choisir la place du 1^{er} livre de maths : $N - m + 1$ choix.*
   Explication :

$$\underbrace{\bullet \quad \bullet \quad - - - - - - - - - - \quad \bullet}_{N-m \text{ places}} \qquad \underbrace{\bullet \quad - - - - - \quad \bullet}_{m \text{ places}}$$

Le place verte est en $(N-m+1)^{\text{ème}}$ position : c'est la dernière position que peut occuper le premier livre de maths de la série. Le premier livre de la série des livres de maths peut occuper la 1ère position, la 2ème position, etc. ou la $(N-m+1)^{\text{ème}}$ position.

- *placer les m livres de maths sur les m positions déjà fixées : $m!$ choix*
- *placer les $N-m$ livres restants sur les $N-m$ positions restantes : $(N-m)!$ choix.*

D'où $\boxed{(N-m+1)\,m!\,(N-m)! \text{ tels rangements}}$, ce qui s'écrit encore $\boxed{m!\,(N-m+1)! = m!\,(p+c+1)!}$.

Exercice 6. Chemins N/E. *Soient p et q des entiers naturels fixés. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q), en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?*
Indication : *coder un chemin par un mot (D pour droite et H pour haut).*

Correction. *On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD\dots DHH\dots H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes (une...) du mot précédent.*
Le nombre de choix de l'emplacement des H est $\binom{p+q}{q}$. Une fois que les lettres H sont placées, il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc $\binom{p+q}{q}$ chemins possibles.
Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a $\binom{p+q}{p}$ choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{p}$.

Exercice 7. Listes de 0 et de 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{0,1\}^n$, que l'on interprète comme un ensemble de n-listes de 0 et de 1.*

1. *Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Combien d'éléments de E ont exactement k occurrences de « 1 » ?*
2. *Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Combien d'éléments de E ont leur première occurrence de « 1 » en p-ième position ?*

Cherchez à mieux comprendre une n-liste de 0 et de 1 dont la première occurrence de « 1 » est en p-ième position : à quoi ressemble le début de la liste ? la fin ?

Correction.

1. *C'est une question de cours : il s'agit des anagrammes du « mot »*

$$\underbrace{00\cdots00}_{n-k \text{ fois}}\underbrace{11\cdots11}_{k \text{ fois}}.$$

Pour construire une telle anagramme, on choisit les positions des 1, c'est-à-dire k positions parmi les n positions possibles : $\boxed{\text{il y en a donc } \binom{n}{k}}$.

2. *Pour construire un élément de E,*
   - *les $p-1$ premières positions sont occupées par des 0 : 1 seule possibilité ;*
   - *la p-ième position est occupée par un 1 : 1 seule possibilité ;*
   - *les positions suivantes sont libres : 2 possibilités pour chacune des $n-p$ dernières positions, d'où 2^{n-p} possibilités au total.*

Par le principe de multiplication (ou le principe de bijection, parce que que l'on a en fait construit une bijection entre la partie de E à dénombrer et l'ensemble des $(n-p)$-listes de 0 et 1), $\boxed{\text{il y a } 2^{n-p} \text{ éléments de } E \text{ dont le premier } 1 \text{ est en } p\text{-ième position}}$.

Exercice 8. Nombre d'anagrammes.

1. *Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « suissesses ».*
2. *Plus généralement, si un mot est constitué de n_1 occurrences de la lettre a_1 ; n_2 occurrences de la lettre a_2, et ainsi de suite jusqu'à n_r occurrences de la lettre a_r (avec les (a_i) toutes distinctes), combien a-t-il d'anagrammes ?*

Correction.

1. *La méthode générale a été vue en cours : il faut « placer » les lettres les unes après les autres.*
   - *Pour construire une anagramme du mot « maths », il faut choisir l'emplacement du « m » (5 possibilités), puis celui du « a » (4 possibilités), puis celui du « t » (3 possibilités), puis celui du « h » (2 possibilités), puis celui du « s » (1 possibilité).*
     Par le principe de multiplication, $\boxed{\text{« maths » a } 5\times4\times3\times2\times1 = 5! = 120 \text{ anagrammes}}$.
     (On voit d'ailleurs qu'il en irait de même pour tout mot de 5 lettres, toutes différentes).
   - *Pour construire une anagramme du mot « rire », il faut choisir l'emplacement des deux « r » (donc choisir deux emplacements parmi les quatre : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités), puis celui du « i » (2 possibilités), puis celui du « e » (1 possibilité).*
     Par principe de multiplication, $\boxed{\text{« rire » a donc } 6\times2\times1 = 12 \text{ anagrammes}}$.
   - *Pour construire une anagramme du mot « suissesses », il faut choisir l'emplacement des six « s » (ce qui donne $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{6} = 84$ possibilités), puis celui du « i » (3 possibilités), puis celui des deux « e » (1 possibilité).*
     Par principe de multiplication, $\boxed{\text{« suissesses » a } 84\times3\times1 = 252 \text{ anagrammes}}$.
2. *On effectue le même raisonnement, en notant $N = n_1 + \cdots + n_r$ le nombre total de lettres du mot : pour construire une anagramme,*
   - *on place les n_1 occurrences de a_1 : $\binom{N}{n_1}$ possibilités ;*
   - *on place les n_2 occurrences de a_2 : $\binom{N-n_1}{n_2}$ possibilités ;*
   - *etc.*
   - *on place les n_{r-1} occurrences de a_{r-1} : $\binom{N-n_1-n_2-\cdots-n_{r-2}}{n_{r-1}} = \binom{n_{r-1}+n_r}{n_{r-1}}$ possibilités.*
   - *on place les n_r occurrences de a_r : $\binom{N-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \binom{n_r}{n_r} = 1$ possibilité.*

Par principe de multiplication, le nombre d'anagrammes est :

$$\begin{aligned}\binom{N}{n_1} \times \binom{N-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{N-n_1-n_2-\cdots-n_{r-2}}{n_{r-1}} \times \binom{N-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} \\ = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_r}{n_1} \times \binom{n_2+\cdots+n_r}{n_2} \times \cdots \times \binom{n_{r-1}+n_r}{n_{r-1}} \times \binom{n_r}{n_r} \\ = \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_r)!}{n_1!(n_2+\cdots+n_r)!} \times \frac{(n_2+\cdots+n_r)!}{n_2!(n_3+\cdots+n_r)!} \times \cdots \times \frac{(n_{r-1}+n_r)!}{n_{r-1}!n_r!} \times \frac{n_r!}{n_r!0!} \\ = \boxed{\frac{(n_1+\cdots+n_r)!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}}.\end{aligned}$$

Exercice 9. Café ou thé ? *Tous les matins, vous choisissez entre Café et Thé, en cherchant à lutter contre la routine.*
Combien y a-t-il de manières de choisir votre boisson pour n petits déjeuners consécutifs :

(i) *sans aucune contrainte ?*

(ii) *en étant sûr d'avoir bu au moins une fois chaque boisson ?*

(iii) *en étant sûr d'avoir bu aussi souvent une boisson que l'autre ?*

(iv) *en ne prenant jamais la même boisson deux jours de suite ?*

(v) *en ne prenant jamais de café deux jours de suite ?*

(vi) *en ne prenant jamais la même boisson trois jours de suite ?*

Correction.

(i) *Chaque matin, on dispose de deux possibilités : thé ou café.*

D'après le principe de multiplication, il y a donc $\boxed{2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n \text{ « historiques » possibles}}$.

Plus mathématiquement, un historique de n petits-déjeuners correspond à un mot de longueur n sur l'alphabet à 2 lettres $\{\mathtt{C}, \mathtt{T}\}$, donc il y en a 2^n.

(ii) *On va procéder par soustraction.*

Les seuls historiques interdits par la contrainte « avoir bu au moins une fois chaque boisson » sont ceux entièrement composés de café ou de thé, c'est-à-dire les mots $\mathtt{CC}\ldots\mathtt{C}$ *et* $\mathtt{TT}\ldots\mathtt{T}$.

Il n'y a donc que deux historiques interdits par la contrainte donc, par principe de soustraction, $\boxed{2^n - 2 \text{ historiques}}$ *respectant ladite contrainte.*

(iii) *Pour avoir bu aussi souvent un boisson que l'autre, il faut déjà que le nombre n de jours soit pair. Dans le cas contraire, il y aura donc 0 historique respectant la contrainte.*

Si n est pair, on est en train de compter les mots de longueur n sur l'alphabet à 2 lettres $\{\mathtt{C}, \mathtt{T}\}$ avec $n/2$ occurrences de $\mathtt{C}$ *et de* $\mathtt{T}$. *Autrement dit, on dénombre les anagrammes de*

$$\underbrace{\mathtt{CC}\ldots\mathtt{C}}_{n/2 \text{ lettres}}\underbrace{\mathtt{TT}\ldots\mathtt{T}}_{n/2 \text{ lettres}}.$$

Pour construire une telle anagramme, on peut commencer par choisir les emplacements de la lettre `C` *(c'est-à-dire les jours où l'on boit du café) : il y a $\binom{n}{n/2}$ possibilités. Les autres jours sont alors consacrés au thé.*

In fine, le nombre d'historiques respectant la contrainte de l'énoncé est $\boxed{\begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

(iv) *Si l'on ne prend jamais la même boisson deux fois de suite, le choix de la première boisson détermine entièrement la suite de l'historique.*

Il n'y a ainsi que deux historiques possibles : `CTCTCTCTCT`... *et* `TCTCTCTCTC`... .

(v) *Si l'on cherche une idée, on peut toujours dénombrer les possibilités pour les petites valeurs de n. Notons P_n le nombre de possibilités pour un historique de n jours.*

Cas $n = 1$.

- `C` ;
- `T`.

Donc $P_1 = 2$.

Cas $n = 2$.

- `CT` ;
- `TC` ;
- `TT`.

Donc $P_2 = 3$.

Cas $n = 3$.

- `CTC` ;
- `CTT` ;
- `TCT` ;
- `TTC` ;
- `TTT`.

Donc $P_3 = 5$.

Cas $n = 4$.

- `CTCT` ;
- `CTTC` ;
- `CTTT` ;
- `TCTC` ;
- `TCTT` ;
- `TTCT` ;
- `TTTC` ;
- `TTTT`.

Donc $P_3 = 8$.

Il est possible de remarquer sur ces exemples un aspect récurrent. On peut par exemple remarquer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble être constituée de nombres de Fibonacci, ou du moins qu'elle vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$.

Il est en fait même possible de remarquer quelque chose de plus précis : à chaque étape, il y a plus d'historiques commençant par T que par C, et ceux commençant par T sont exactement formés d'un T précédant la liste des possibilités à l'étape précédente. Par exemple, les cinq mots CTC, CTT, TCT, TTC et TTT fournissent les cinq possibilités TCTC, TCTT, TTCT, TTTC et TTTT commençant par un T.

Nous pouvons montrer $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = P_{n+1} + P_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il y a deux types d'historiques de longueur $n+2$ sans CC.

- Ceux commençant par T.

  Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans CC de longueur $n+1$.

  Réciproquement, si on ajoute un T en première position à un historique sans CC de longueur $n+1$, on obtient un historique sans CC de longueur $n+2$.

  $\boxed{\text{Il y a ainsi } P_{n+1} \text{ historiques sans CC de longueur } n+2 \text{ commençant par T}}$.
- Ceux commençant par C.

  Comme on ne peut pas commencer par CC, la deuxième lettre est alors un T.

  Dans ce cas, la suite de l'historique est un historique sans CC de longueur n.

  Réciproquement, si on ajoute un CT au début d'un historique sans CC de longueur n, on obtient un historique sans CC de longueur $n+2$.

  $\boxed{\text{Il y a ainsi } P_n \text{ historiques sans CC de longueur } n+2 \text{ commençant par C}}$.

Par principe d'addition, il y a donc $P_{n+1} + P_n$ historiques sans CC de longueur $n+2$, ce qui montre bien $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$.

Si l'on se souvient que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(premières valeurs : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, etc.), le fait que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et que $P_1 = F_3$ et $P_2 = F_4$ montre facilement (par récurrence double) que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = F_{n+2}$.

$\boxed{\text{Il y a donc } F_{n+2} \text{ historiques de longueur } n \text{ sans CC}}$.

(vi) Imaginons qu'on enregistre notre historique sur une frise. Un historique respectant la contrainte ressemble à

C	T	T	C	C	T	C	T	T	C	T	C	C	T	T

c'est-à-dire qu'il s'obtient en posant à la suite des « carreaux » $\boxed{C}$ et $\boxed{T}$ ainsi que des « dominos » $\boxed{C\,|\,C}$ et $\boxed{T\,|\,T}$, en alternant les C et les T.

Or, pour obtenir une telle frise,

- *on peut d'abord en choisir la « forme » des pièces, par exemple*

- *puis choisir la première boisson.*

La contrainte (qui force à alterner les carreaux/dominos `C` *et* `T`*) détermine alors entièrement l'historique (dans notre exemple, si l'on commence par* `C`*, le reste est entièrement déterminé).*

Par principe de multiplication, le nombre d'historiques vérifiant la contrainte est exactement le double du nombre Q_n de manières de remplir un rectangle $1 \times n$ en utilisant des carreaux 1×1 et des dominos 1×2.

Or, on peut vérifier facilement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n = F_{n+1}}$. En effet, il est facile de voir que le nombre Q_n de remplissages vérifie la relation de récurrence $Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$: pour remplir un rectangle de longueur $n+2$, on peut soit commencer par un carreau (auquel cas il restera un rectangle de longueur $n+1$ à remplir, et donc Q_{n+1} possibilités), soit par un domino (auquel cas il restera un rectangle de longueur n et donc Q_n possibilités). On conclut alors en remarquant que $Q_1 = 1 = F_2$ et $Q_2 = 2 = F_3$.

In fine, $\boxed{\text{le nombre d'historiques sans CCC ni TTT est } 2\,F_{n+1}}$.

Calculs de sommes

Exercice 10. Nombre de solutions d'une équation. *Étant donné un entier naturel n, déterminer le nombre de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation*

$$x + 2y = n.$$

Application. *De combien de façons peut-on payer 100€ avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?*

Correction.

- *Soit $y \in \mathbb{N}$ fixé. Il y a au plus un couple (x, y) solution (puisque l'on doit avoir $x = n - 2y$ (un unique x si $x \in \mathbb{N}$, et aucun sinon).*
  Comme $n - 2y \in \mathbb{Z}$, le couple $(n - 2y, y)$ est solution si, et seulement si $0 \leq n - 2y$.

  Par suite, il y a autant de couples solutions que d'entiers y vérifiant $0 \leq y \leq \frac{n}{2}$ i.e. $0 \leq y \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, d'où $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ solutions. $\boxed{\text{L'équation donnée possède donc } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \text{ solutions}}$, *ce qui correspond à $p+1$ solutions (que l'on puisse écrire $n = 2p$ ou $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$).*

- **Application.** *On cherche les solutions entières de l'équation $0,1x + 0,2y + 0,5z = 100$ i.e. $x + 2y = 1000 - 5z$.*
  D'après ce qui précède, pour $z \in [\![0, 200]\!]$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x + 2y = 1000 - 5z$ est

$$\left\lfloor \frac{1000 - 5z}{2} \right\rfloor + 1 \quad c'est-à-dire \quad 501 + \left\lfloor \frac{-5z}{2} \right\rfloor.$$

Ainsi, il y a

$$\sum_{z=0}^{200}\left(501+\left\lfloor\frac{-5z}{2}\right\rfloor\right)=201\times 501+\sum_{z=0}^{200}\left\lfloor\frac{-5z}{2}\right\rfloor.$$

Or, en regroupant les termes pairs et impairs, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{200}\left\lfloor\frac{-5z}{2}\right\rfloor &= \sum_{k=0}^{100}\left\lfloor\frac{-5(2k)}{2}\right\rfloor+\sum_{k=1}^{100}\left\lfloor\frac{-5(2k-1)}{2}\right\rfloor\\ &=\sum_{k=1}^{100}(-5k-5k+2)\\ &=200-10\times\frac{100\times 101}{2}\\ &=-50300.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il y a } 201\times 501-50300=100701-50300=50401}$ *façons de payer* 100 € *avec des pièces de 10,20 et 50 centimes.*

Exercice 11. Trois ensembles. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Donner le cardinal des ensembles suivants :*

$$D_n = \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\neq j\right\}\qquad F_n = \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i<j\right\}\qquad G_n = \left\{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3 \mid i<j<k\right\}$$

Correction.

$$\boxed{\textit{Cardinal de } D_n=\left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\neq j\right\}}$$

1) Preuve par principe d'addition. *On va découper* $[\![1,n]\!]^2$ *en deux ensembles disjoints.*
Un couple (i,j) *de* $[\![1,n]\!]^2$ *possède ses deux composantes identiques, ou bien ses deux composantes différentes.*
Notons $I_n=\left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i=j\right\}$.
On a alors l'égalité

$$[\![1,n]\!]^2 \;=\; I_n \;\sqcup\; D_n.$$

En passant au cardinal, on a alors

$$n^2 \;=\; \operatorname{Card} I_n+\operatorname{Card} D_n$$

soit $\boxed{\operatorname{Card} D_n=n^2-n}$.

Pour justifier le cardinal de I_n, *on pourrait faire la preuve suivante.*
Se donner un élément (i,j) *de* I_n *revient à*

- *choisir* i : n *choix*
- *une fois ce choix fait, choisir* j : 1 *choix*

soit $n \times 1 = n$ possibilités, par principe multiplicatif.

2) Preuve par principe multiplicatif.
Se donner un élément (i, j) de D_n revient à

- *choisir i : n choix*
- *une fois ce choix fait, choisir j : $n-1$ choix*

soit $\boxed{n(n-1)}$ possibilités, par principe multiplicatif.

3) Preuve par un calcul.

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} D_n &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} 1 = \sum_{i<j} 1 + \sum_{i>j} 1 = 2\sum_{i<j} 1 = 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = 2\sum_{j=1}^{n}(j-1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k = 2\frac{(n-1)n}{2}\\ &= \boxed{(n-1)n}.\end{aligned}$$

4) La même preuve que la première (avec le principe d'addition), mais par un calcul.

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} D_n &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i\neq j}} 1\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 1 - \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i=j}} 1\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{i} 1\\ &= \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} 1\\ &= \boxed{n^2 - n}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Cardinal de } F_n = \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i<j\right\}}$$

1) Preuve astucieuse en utilisant ce qui précède.
On va découper l'ensemble D_n précédent, en deux ensembles disjoints.
Un couple (i, j) de D_n (donc tel que $i \neq j$) possède sa première composante strictement inférieure à la deuxième (c'est-à-dire $i < j$), ou bien le contraire.
En notant $F'_n = \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i>j\right\}$, on a donc :

$$D_n \;=\; F_n \sqcup F'_n.$$

En passant au cardinal, on a

$$\operatorname{Card} D_n \;=\; \operatorname{Card} F_n \;+\; \operatorname{Card} F_n'.$$

Les ensembles F_n *et* F_n' *sont en bijection (considérer l'application* $\begin{array}{ccc} F_n & \to & F_n' \\ (k,\ell) & \mapsto & (\ell,k) \end{array}$*) donc ont même cardinal. Ainsi* $\operatorname{Card} D_n = 2\operatorname{Card} F_n$*. D'où*

$$\boxed{\operatorname{Card} F_n \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{Card} D_n \;=\; \frac{n(n-1)}{2}}.$$

2) Preuve par un calcul.

$$\operatorname{Card} F_n = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\\ i<j}} 1 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=1}^{n}(j-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \boxed{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

3) En partitionnant selon la valeur de la deuxième composante.

On va découper F_n *en* n *ensembles disjoints.*

Un couple (i,j) *de* F_n *(donc tel que* $i<j$*) possède sa deuxième composante égale à* 1 *ou*[a] *égale à* 2 *ou* $\cdots$ *ou égale à* n*.*

Notons $F_n(j)$ *le sous-ensemble de* F_n *constitué des couples de* F_n *ayant leur deuxième composante égale à* j

$$F_n(j) \;=\; \{(k,\ell)\in F_n \mid \ell = j\} \;=\; \{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2 \mid k<\ell \text{ et } \ell=j\}.$$

On a alors

$$F_n \;=\; \bigsqcup_{j=1}^{n} F_n(j).$$

Ainsi $\operatorname{Card} F_n = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Card} F_n(j)$*. Déterminons le cardinal de* $F_n(j)$*, pour* j *fixé.*

On constate que $F_n(j)$ *s'écrit* $\{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid k<j\}$ *ou encore* $\{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid k\in[\![1,j-1]\!]\}$ *donc est en bijection avec* $[\![1,j-1]\!]$ *: son cardinal vaut donc* $j-1$*.*

D'où $\boxed{\operatorname{Card} F_n = \sum_{j=1}^{n}(j-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}}$.

4) Preuve expéditive pour plus tard.

Se donner un couple (i,j) *avec* $i<j$ *revient à choisir deux éléments dans* $[\![1,n]\!]$ *(et à les ordonner de manière strictement croissante).*

Il y a donc $\binom{n}{2}$ *choix possibles, c'est-à-dire* $\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$\boxed{\textit{Cardinal de } G_n = \left\{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3 \mid i < j < k\right\}}$$

1) Avec la preuve expéditive précédente. *Se donner un triplet (i,j,k) avec $i < j < k$ revient à choisir trois éléments dans $[\![1,n]\!]$ (et à les ordonner de manière strictement croissante).*

Il y a donc $\binom{n}{3}$ choix possibles, c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$.

2) Preuve par un calcul.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card} G_n &= \sum_{\substack{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3 \\ i<j<k}} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{j-1} 1\right)}_{=j-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-2} j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)(k-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 3k + 2) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{3n(n+1)}{4} + n \\
&= \frac{n(n+1)}{12} \left[(2n+1) - 9\right] + n \\
&= \frac{n(n+1)(n-4)}{6} + n \\
&= \frac{n}{6} \left[(n+1)(n-4) + 6\right] \\
&= \frac{n}{6} (n^2 - 3n + 2) \\
&= \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}.
\end{aligned}$$

---

a. En fait, le cas où $j = 1$ ne fournit aucun couple !

Exercice 12. Trois calculs. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Calculer* $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A)$.
2. *En déduire* $\displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(A \cap B)$ *puis* $\displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(A \cup B)$.

Correction. *Notons*

$$S = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A) \quad \text{et} \quad S_I = \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad S_U = \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(A \cup B).$$

1. **Méthode 1 (on partitionne).** *On partitionne $\mathcal{P}(E)$ de la façon suivante :*

$$\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E).$$

Autrement dit,

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \textit{truc} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \textit{truc}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \underbrace{\operatorname{Card}(A)}_{=k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(k \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} 1 \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(k \operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} && \textit{(formule du capitaine)} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Méthode 2 (utiliser une technique à la Gauss).
En remarquant que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & \overline{B} \end{array}$ *est bijective (d'application réciproque elle-même), on en déduit que :*

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(A) = \sum_{B \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(\overline{B})$$

Calculons 2 fois la somme cherchée :

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(A) \ + \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(\overline{A}) \\
&= \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \underbrace{\Big(\mathrm{Card}(A) \ + \ \mathrm{Card}(\overline{A})\Big)}_{=\mathrm{Card}\, E = n} \\
&= n \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} 1 \\
&= n2^n.
\end{aligned}$$

En divisant par 2*, on trouve* $\boxed{S = n2^{n-1}}$.

2. • *En reprenant la technique de Gauss et le fait que φ est bijective, on a :*

$$\begin{aligned}
2S_I &= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A\cap B) + \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A\cap \overline{B}) \\
&= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \Big[\mathrm{Card}(A\cap B) + \mathrm{Card}(A\cap \overline{B})\Big] \\
&= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A) \\
&= \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) \times S \\
&= 2^n n 2^{n-1} \\
&= n2^{2n-1},
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{S_I = n2^{2n-2}}$.

• *Pour calculer S_U, on peut se ramener à S_I, en écrivant :*

$$\begin{aligned}
S_U &= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(A\cup B) \\
&= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(\overline{A}\cup \overline{B}) \\
&= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(\overline{A\cap B}) \\
&= \sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} (n - \mathrm{Card}(A\cap B)) \\
&= n(2^n)^2 - S_I \\
&= n2^{2n} - n2^{2n-2} \\
&= \boxed{3n2^{2n-2}}.
\end{aligned}$$

Applications

Exercice 13. Applications et bijections. *On s'intéresse aux applications de* $[\![1,12]\!]$ *dans* $[\![1,12]\!]$.

1. *Combien y a-t-il d'applications de la sorte ?*
2. *Combien y a-t-il de bijections de la sorte ?*
3. *Combien y a-t-il d'applications de la sorte vérifiant la propriété : si* n *est pair, alors* $f(n)$ *est pair ?*
4. *Combien y a-t-il de bijections de la sorte vérifiant la propriété : si* n *est pair, alors* $f(n)$ *est pair ?*
5. *Combien y a-t-il d'applications de la sorte vérifiant la propriété : si* n *est divisible par* 3*, alors* $f(n)$ *est divisible par* 3 *?*
6. *Combien y a-t-il de bijections de la sorte vérifiant la propriété : si* n *est divisible par* 3*, alors* $f(n)$ *est divisible par* 3 *?*

Correction.

1. *Il y a* 12^{12} *applications de*$[\![1,12]\!]$ *dans* $[\![1,12]\!]$.
2. *Il y a* $12!$ *bijections de* $[\![1,12]\!]$ *dans* $[\![1,12]\!]$.
3. *Posons* $P = \{2;4;6;8;10;12\}$.
   $\forall k \in P, f(k) \in P$ *: pour chacun des 6 nombres pairs, il y a 6 choix d'images, donc* 6^6 *possibilités.*
   $\forall k \in [\![1,12]\!] \setminus P, f(k) \in [\![1,12]\!]$ *: pour chacun des nombres impairs, il y a 12 choix d'images, donc* 12^6 *possibilité.*
   $\boxed{\text{Il y a } 6^6 \times 12^6 = 72^6 \text{ applications de } [\![1,12]\!] \text{ dans } [\![1,12]\!] \text{ telles que si } n \text{ est pair, alors } f(n) \text{ est pair}}$.
4. *Posons* $P = \{2;4;6;8;10;12\}$.
   $\forall k \in P, f(k) \in P$ *:* $6!$ *choix.*
   $\forall k \in [\![1,12]\!] \setminus P, f(k) \in [\![1,12]\!] \setminus P$ *:* $6!$ *choix.*
   $\boxed{\text{Il y a } (6!)^2 \text{ bijections de } [\![1,12]\!] \text{ dans } [\![1,12]\!] \text{ telles que si } n \text{ est pair, alors } f(n) \text{ est pair}}$.
5. *Posons* $D = \{3;6;9;12\}$.
   $\forall k \in D, f(k) \in D$ *:* 4^4 *choix.*
   $\forall k \in [\![1,12]\!] \setminus D, f(k) \in [\![1,12]\!]$ *:* 12^8 *choix.*
   $\boxed{\text{Il y a } 4^4 \times 12^8 \text{ applications de } [\![1,12]\!] \text{ dans } [\![1,12]\!] \text{ telles que si } n \text{ est divisible par } 3, \text{ alors } f(n) \text{ est divisible par}}$
6. *Posons* $D = \{3;6;9;12\}$.
   $\forall k \in D, f(k) \in D$ *:* $4!$ *choix.*
   $\forall k \in [\![1,12]\!] \setminus D, f(k) \in [\![1,12]\!] \setminus D$ *:* $8!$ *choix.*
   $\boxed{\text{Il y a } 4! \times 8! \text{ bijections de } [\![1,12]\!] \text{ dans } [\![1,12]\!] \text{ telles que si } n \text{ est divisible par } 3, \text{ alors } f(n) \text{ est divisible par } 3}$.

Exercice 14. Applications non surjectives. *Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'applications non surjectives de E dans E ?*

Correction. *Une application d'un ensemble fini dans lui-même est surjective si, et seulement si, elle est bijective.*
Il y a donc $n!$ applications surjectives de E dans lui-même.
Comme il y a n^n applications de E dans lui-même, le nombre cherché est donc $\boxed{n^n - n!}$.

Exercice 15. Applications (strictement) croissantes. *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*

1. *Déterminer le nombre d'applications $[\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ strictement croissantes.*
2. *Déterminer le nombre d'applications $[\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissantes*
   (a) *en se ramenant à un dénombrement de compositions (c'est-à-dire à l'astuce bars and stars) ; Étant donné une fonction $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante et $j \in [\![1,n]\!]$, on pourra considérer le nombre $a_j = |\{x \in [\![1,p]\!] \mid f(x) = j\}|$.*
   (b) *en se ramenant au cas des applications strictement croissantes. On pourra commencer par remarquer que si l'application $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est croissante, alors $x \mapsto f(x) + x - 1$ définit une application strictement croissante.*

Correction.

1. • *Une application strictement croissante est en particulier injective donc, une condition nécessaire est $p \leq n$.*
   • *Si $p \leq n$, pour définir une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, il faut déterminer les images des éléments de $[\![1,p]\!]$ qui doivent être p éléments distincts de $[\![1,n]\!]$: il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités. Une fois ces images déterminées, il n'y a qu'une façon de les ordonner de manière strictement croissante.*
   Donc $\boxed{\text{il y a } \binom{n}{p} \text{ applications strictement croissantes de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!] \text{ si } p \leq n, \text{ et } 0 \text{ sinon}}$. L'extension des coefficients binomiaux permettant de couvrir ce deuxième cas, il y a $\boxed{\binom{n}{p} \text{ applications strictement croissantes de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!]}$.

2. (a) **En suivant l'indication.** • *Définir une application $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ revient à choisir les p images de f parmi $[\![1,n]\!]$. Vu « à l'envers », cela revient aussi à choisir, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les antécédents de j par f. On peut noter pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $A_j = \{x \in [\![1,p]\!] \mid f(x) = j\}$ et $a_j = \mathrm{Card}(A_j)$ le nombre d'antécédents de j. Pour que f soit une application bien définie, il faut et il suffit que les $(A_j)_{1 \leq j \leq p}$ soient deux à deux disjoints et que leur union $\bigcup_{j=1}^{p} A_j$ soit égale à $[\![1,p]\!]$. Par principe d'addication, on a alors $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p$ et $a_1 + \dots + a_n = p$.*
   • *Un exercice classique consiste à montrer que le nombre de solutions entières de l'équation $a_1 + \dots + a_n = p$ vaut*
   $$\binom{p+n-1}{p} = \binom{p+n-1}{n-1}.$$
   En effet, avec l'astuce des « bars and stars », il y a p étoiles $\star$ à répartir en n catégories (donc à l'aide de $n-1$ séparateurs $\mid$). Il y a donc $p + (n-1)$ positions pour les « bars and stars ». Définir une répartition des étoiles, revient à choisir la position des p étoiles parmi les $p+n-1$ emplacements : il y en a $\binom{p+n-1}{p}$ (par défaut, les positions restantes sont celles des barres).

Remarque : *on peut aussi faire le contraire (choisir les positions des barres et « subir » la position des étoiles), ce qui donne le même résultat par symétrie des coefficients binomiaux. Il y a donc $\binom{p+n-1}{p}$ choix pour les nombres d'antécédents de $1, \ldots, n$.*

• Une fois fixés, ces nombres ne permettent de définir qu'une seule application croissante (celle dont les a_1 premières valeurs de $[\![1,p]\!]$ sont envoyées sur 1, les a_2 valeurs suivantes sont envoyées sur 2, ..., les a_n dernières valeurs de $[\![1,p]\!]$ sont envoyées sur n).

Finalement, $\boxed{\text{il y a } \binom{p+n-1}{p} \text{ applications croissantes de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!]}$.

Sans l'indication (mais revient au même...). *• Prenons un exemple où $p = 4$ et $n = 8$. A chaque fonction f croissante de $[\![1,4]\!]$ vers $[\![1,8]\!]$, on peut faire correspondre un mot avec les entiers de $[\![1,8]\!]$ écrits dans l'ordre, où l'on insère quatre lettres f, pour définir chaque $f(i)$.*

0 Traduction du mot $1\ 2\ f_1\ 3\ 4\ 5\ f_2\ f_3\ 6\ f_4\ 7\ 8$:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 5,\ f(3) = 5 \quad \text{et} \quad f(4) = 6.$$

On peut simplifier l'écriture de ce mot de 12 lettres : c c f c c c f f c f c c. Un tel mot est de la forme L L L L L L L L L L L L où les L sont des lettres c ou f, sauf le premier L qui est toujours un c, car $f(1) \geq 1$.

Choisir une fonction croissante de $[\![1,4]\!]$ vers $[\![1,8]\!]$ revient à choisir la place des f parmi 11 places.

• **Généralisation.** *Écrire des mots de $n + p$ lettres avec un c en premier, p lettres f, et des c ailleurs.*

Choisir p places parmi les $n+p-1$ places qui ne sont pas la première, soit $\boxed{\binom{n+p-1}{p} \text{ possibilités}}$.

(b) • Remarquons que si $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est croissante, alors $x \mapsto f(x) + x - 1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n+p-1]\!]$ (somme d'une application croissante avec une application strictement croissante).

Réciproquement, si g est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n+p-1]\!]$, alors $x \mapsto g(x) - x + 1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.

• Notons A l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, B l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n+p-1]\!]$,

$$\varphi : \begin{array}{rcl} A & \to & B \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) + x - 1) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{rcl} B & \to & A \\ g & \mapsto & (x \mapsto g(x) - x + 1) \end{array}.$$

On a $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_B$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$, ce qui prouve que φ est bijective (et sa bijection réciproque est ψ). On en déduit que $|A| = |B|$. D'après la première question, $|B| = \binom{n+p-1}{p}$, donc $\boxed{|A| = \binom{n+p-1}{p}}$.

Exercice 16. Nombre de surjections. *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.*

1. *Calculer $S(n,p)$ pour $n < p$, ainsi que $S(n,n)$ et $S(n,1)$.*
2. *Déterminer $S(n,2)$.*
3. *Déterminer $S(n+1,n)$.*
4. *Démontrer que pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a*

$$S(n,p) \;=\; p\Big(S(n-1,p) \;+\; S(n-1,p-1)\Big)$$

5. *En déduire que, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.*

On pourra procéder par récurrence sur n.

Correction.

1. • *Quand $n < p$, il n'y a pas de surjection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p, donc $\boxed{S(n,p) = 0}$.*
   • *Quand $p = n$, les surjections sont exactement les bijections, donc $\boxed{S(n,n) = n!}$.*
   • *Quand $p = 1$, il n'y a qu'une seule application et elle est surjective, donc $\boxed{S(n,1) = 1}$.*

2. *Soient E de cardinal n et $F = \{a,b\}$ avec $a \neq b$.*
   On peut compter toutes les applications de E dans F (il y en a 2^n) et retirer celles qui ne sont pas surjectives (il y en a 2 : celle qui envoie tous les éléments de E sur a i.e. l'application constante égale à a, et celle qui envoie tous les éléments de E sur b i.e. l'application constante égale à b. Donc $\boxed{S(n,2) = 2^n - 2}$.
   Attention. *Voici un raisonnement qui paraît convainquant, mais qui est faux !*
   Se donner une application surjective de E dans F revient à :

   - *choisir un antécédent pour a : n choix*
   - *choisir un antécédent pour b : $n-1$ choix*
   - *choisir « comme on veut » les images des éléments de E restants : c'est-à-dire se donner une application d'un ensemble à $n-2$ éléments dans un ensemble à deux éléments : 2^{n-2} choix.*

   Donc $S(n,2) = n(n-1)2^{n-2}$.
   Voyez-vous où est l'erreur de raisonnement ?
   Une réponse. Vous allez compter beaucoup trop de fois l'application $(a,b,b,\dots,b)$:

   - *une fois en disant « un antécédent de a est x_1, un antécédent de b est x_2 et on envoie le reste sur b »,*
   - *une fois en disant « un antécédent de a est x_1, un antécédent de b est x_3 et on envoie le reste sur b »,*
   - $\vdots$
   - *une fois en disant « un antécédent de a est x_1, un antécédent de b est x_n et on envoie le reste sur b ».*

3. *Posons E un ensemble de cardinal $n+1$ et F un ensemble de cardinal n et dénombrons les applications surjectives de E dans F.*
   Se donner une telle surjection de E dans F revient à :

   - *choisir l'élément f de F qui sera atteint deux fois : n choix*

- *choisir les deux antécédents e et* ε *de f dans E :* $\binom{n+1}{2}$ *choix*
- *choisir les images des* $n-1$ *autres éléments de E (il faut définir une surjection de* $E \setminus \{e, \varepsilon\}$ *dans* $F \setminus \{f\}$*, où les ensembles de départ et à d'arrivée sont tous les deux de cardinaux* $n-1$*, donc il y a autant que de bijections entre deux ensembles de cardinaux* $n-1$*, soit* $(n-1)!$ *choix.*

D'où $n\binom{n+1}{2}(n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$ *choix.*

Ainsi, $\boxed{S(n+1, n) = \dfrac{n(n+1)!}{2}}$.

4. *Soit* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

   - *Si* $n < p$*, alors* $n-1 < p-1$ *et* $n-1 < p$*, donc* $S(n,p) = S(n-1,p) = S(n-1,p-1) = 0$ *donc* $S(n,p) = p\Big(S(n-1,p) \ + \ S(n-1,p-1)\Big)$.
   - *Supposons* $n \geq p$*. Fixons* E_n *un ensemble de cardinal n et* F_p *un ensemble de cardinal p et dénombrons les applications surjectives de* E_n *dans* F_p.
     Parmi les éléments de E_n*, nous allons privilégier un d'entre eux, que nous notons* e_0.
     Ainsi, $\boxed{E_n \text{ se partitionne de la façon suivante } \Big(E_n \setminus \{e_0\}\Big) \sqcup \{e_0\}}$.
     Se donner une surjection f de E_n *vers* F_p *revient à :*
     - *choisir l'image de* e_0 *parmi les éléments de* F_p *: p choix*
     - *puis :*
       - *choisir une surjection de* $E_n \setminus \{e_0\}$ *vers* F_p *:* $S(n-1,p)$ *choix*

       OU BIEN
       - *choisir une surjection de* $E_n \setminus \{e_0\}$ *vers* $F_p \setminus \{f(e_0)\}$ *:* $S(n-1,p-1)$ *choix.*

     On obtient bien la formule attendue : $\boxed{S(n,p) \ = \ p\Big(S(n-1,p) \ + \ S(n-1,p-1)\Big)}$.

Remarque. *On n'a pas encore défini* $S(n,0)$ *et cet élément peut potentiellement intervenir (penser à* $p=1$ *; on a alors* $p-1=0$*). Question : combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à* $n \geq 1$ *éléments dans un ensemble à 0 élément ? Réponse 0. Donc on peut poser* $\boxed{S(n,0) = 0}$.

5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, notons* $\mathcal{H}_n$ *la propriété :*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad S(n,p) \ = \ \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

Initialisation $(n=1)$**.** • *Pour* $p=1$*, le résultat est clair :*

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^1 = 0 + (-1)^0 \binom{1}{1} 1^1 = 1 = S(1,1).$$

- *Pour $p > 1$, on a $S(1,p) = 0$ et le membre droit vaut*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\underbrace{k\binom{p}{k}}_{=p\binom{p-1}{k-1}}\\
&= p\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p-1}{k-1}\\
&= p\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-1-i}\binom{p-1}{i}\\
&= p(1-1)^{p-1}\\
&\overset{p\geq 1}{=} 0.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. *Soit un entier $n \geq 2$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. Montrons $\mathcal{H}_n$.*

- *Pour $p = 1$, le résultat est clair :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1-k}\binom{1}{k}k^n = 0 + (-1)^0\binom{1}{1}1^n = 1 = S(n,1)$.
- *Soit $p > 1$. Alors $(n-1, p-1) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'après la question précédente, on a :*

$$\begin{aligned}
S(n,p) &= p\Big(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\Big)\\
&= p\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^{n-1} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^{n-1}\right) && \textit{($\mathcal{H}_{n-1}$ à deux reprises)}\\
&= p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\underbrace{\left[\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right]}_{=\binom{p-1}{k-1}}k^{n-1} + p^{n-1}\right) && \textit{(formule de Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\underbrace{p\binom{p-1}{k-1}}_{=k\binom{p}{k}}k^{n-1} && \textit{(formule du capitaine)}\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}_n$, ce qui clôt la récurrence.

Remarque. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient en particulier :*

$$\boxed{\forall n < p,\ \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n = 0} \quad \textit{donc} \quad \boxed{\forall n < p,\ \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}k^n = 0}.$$

On a montré cette égalité pour $n = 0$ (binôme de Newton) et pour $n = 1$ (formule du capitaine), et on peut la montrer pour les autres valeurs de $n < p$ en généralisant la formule du capitaine

$(\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ k(k-1)\cdots(k-i+1)\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-i+1)\binom{p-i}{k-i})$.
Cf exercice connu : montrer que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_{p-1}[X], \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k P(k) \ = \ 0}.$$

- *On remarque que l'égalité est « linéaire en P » .*
- *Pour $P = X^0$, l'égalité est connue...*
- *Pour $P = X^1$, l'égalité est plus difficile à établir. Penser à la formule du capitaine*

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

- *Pour $P = X^2$, l'égalité est désagréable à montrer.*
  On peut utiliser le jeu d'écriture $k^2 = k(k-1) + k$.
  Mais il est plus astucieux de montrer l'égalité directement avec le polynôme $P = X(X-1)$, en exploitant le fait que
$$k(k-1)\binom{p}{k} = p(p-1)\binom{n-2}{k-2}.$$
- *Soit $i \in [\![1, p-1]\!]$. Pour $P = X(X-1)\cdots(X-i+1)$, on exploite le fait que*

$$k(k-1)\cdots(k-i+1)\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-i+1)\binom{p-i}{k-i}.$$

- *On conclut en disant que l'égalité est vérifiée pour les vecteurs de la famille*

$$\Big(X(X-1)\cdots(X-i+1)\Big)_{i\in[\![0,p-1]\!]}$$

  qui est une base de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$. Par linéarité, la formule est vraie pour tout $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$.

Parties

Exercice 17. *Soient E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?*

Correction. *Dénombrons les parties de E contenant un unique élément de A.*
Construire une telle partie revient à :

- *choisir un élément de A : p choix*
- *choisir une partie de $E \setminus A$: $\binom{n-p}{k} = 2^{n-p}$ choix (car $\mathrm{Card}(E \setminus A) = n - p$).*

Ainsi, $\boxed{\textit{il y a } p2^{n-p} \textit{ parties de } E \textit{ contenant un unique élément de } A}$.

Exercice 18. Différence symétrique. *Soient E un ensemble fini et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que :*

$$\operatorname{Card}(A\Delta B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card}(A \cap B).$$

Correction. *Tout d'abord, pour $R \subset S$, on a $\operatorname{Card}(S \setminus R) = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$. Donc*

$$\operatorname{Card}(A\Delta B) = \operatorname{Card}(A \cup B) - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

Mais, d'après le cours,

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

En remplaçant, il vient :

$$\boxed{\operatorname{Card}(A\Delta B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card}(A \cap B)}.$$

Exercice 19. Main de cinq cartes. *Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.*

1. *Combien y a-t-il de mains possibles ?*
2. *Combien de mains comportent exactement un As ?*
3. *Combien de mains ne comportent aucun As ?*
4. *Combien de mains comportent au moins un As ?*

Correction.

1. *Une main se comprend comme une partie à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments. Il y a donc* $\boxed{\binom{52}{5} = 2598960}$ *mains possibles.*

2. *On choisit l'As et les cartes le complétant parmi les cartes du paquet moins les As. Il y a* $\boxed{\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}48\\4\end{pmatrix}} = 4 \times 194580 = 778320$ *mains possibles.*

3. *On choisit uniquement des cartes qui ne sont pas des As. Il y a* $\boxed{\binom{48}{5} = 1712304}$ *mains possibles.*

4. *Il s'agit du complémentaire de l'ensemble précédent. Par complément, il y a* $\boxed{\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 886656}$ *mains possibles.*
   Alternative : *avoir au moins un as revient à avoir exactement 1 as ou exactement 2 as ou exactement 3 as ou exactement 4 as :* $\binom{4}{1}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1} = 886656$.
   Attention : *il est faux de dire "on choisit un As, puis une carte quelconque dans le paquet restant", car on compte plusieurs fois la même main. Avec cette méthode de comptage, on peut avoir l'As*

de cœur, puis l'As de carreau et 3 cartes fixées, mais aussi l'As de carreau, l'As de cœur et les 3 mêmes cartes, ce qui compte pour 2 mains alors que ce sont les mêmes.

Exercice 20. Formule du crible. *Soit E un ensemble fini.*
Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Exprimer le cardinal de $A \cup B \cup C$ en fonction des cardinaux de $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ et $A \cap B \cap C$.
Généraliser, sans démonstration, cette formule pour quatre ensembles puis pour $n \in \mathbb{N}^*$ ensembles.

Correction.

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{Card}(A \cup (B \cup C)) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card}(B \cup C) - \operatorname{Card}(A \cap (B \cup C)) \text{ d'après Poincaré} \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card}(B \cup C) - \operatorname{Card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(B \cap C) - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap A \cap C \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(B \cap C) - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(B \cap C) - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C)}.$$

Remarque : on peut généraliser la formule et la démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E, alors :

$$\boxed{\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\boxed{\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})}.$$

Exercice 21. *Soient E et F deux ensembles, A une partie non vide de E et B une partie non vide de F. Étant donnée une application $f : E \to F$, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier dans chaque cas.*

1. *Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.*

   $\boxed{\text{Vrai}}$*, car si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors $f(A) \subseteq \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ est fini.*

2. *Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.*

   $\boxed{\text{Faux}}$*, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini. Par exemple,* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \{2\} \\ x & \mapsto & 2 \end{array}$ *, $A = \mathbb{R}$ (infini) et $f(\mathbb{R}) = \{2\}$ (fini).*

3. *Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.*

$\boxed{\textit{Faux}}$, *il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.*

4. *Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F.*

   $\boxed{\textit{Faux}}$, *il suffit de considérer une partie B, de F, infinie, formée par une infinité de valeurs non prises par f. Par exemple, $f = \mathbb{1}_{\{2\}}$ et $B = [1, +\infty[$, dès lors $f^{-1}(B) = \{2\}$.*

Exercice 22. Différence de parties. *Soit un ensemble E et soit $A \subset E$. On note $n = \mathrm{Card}(E) \in \mathbb{N}^*$ et $p = \mathrm{Card}(A) \in \mathbb{N}$.*

1. *Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?*
2. *Soit $m \in [\![p, n]\!]$. Combien y a-t-il de parties de E à m éléments contenant A ?*
3. *Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \setminus Y = A$?*
   Indication : *faire un dessin.*

Correction.

1. *Les parties de E contenant A sont des parties de E, contenant au moins A, et une partie de $E \setminus A$. Les dénombrer revient donc à dénombrer les parties de $E\setminus A$. Il y a donc $\boxed{2^{n-p} \text{ parties de } E \text{ contenant } A}$.*

2. *Autant que de parties de $E \setminus A$ à $m - p$ éléments : $\boxed{\binom{n-p}{m-p} = \binom{n-p}{n-m}}$.*

3. *Dénombrons $C := \{(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \setminus Y = A\}$.*
   Méthode 1 (on partitionne selon le cardinal de X).
   On note pour tout $m \in [\![p, n]\!]$, $C_m := \{(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \setminus Y = A \text{ et } |X| = m\}$. On a

$$C = \bigsqcup_{m=p}^{n} C_m, \qquad \text{donc} \qquad |C| = \sum_{m=p}^{n} |C_m|.$$

   Fixons $m \in [\![p, n]\!]$ et calculons $|C_m|$.
   Se donner $(X, Y) \in C_m$ revient à :

   - *choisir une partie X de E à m éléments contenant A : on a $\binom{n-p}{m-p}$ possibilités d'après 2.*
   - *choisir Y, i.e.*
     - *prendre les éléments de $X \setminus A$ (imposés) ;*
     - *ajouter une partie de $E \setminus X$: il y en a 2^{n-m}.*

   Ainsi $|C_m| = \dbinom{n-p}{m-p} 2^{n-m}$ et

$$|C| = \sum_{m=p}^{n} \binom{n-p}{m-p} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} 2^{n-p-k} = (1+2)^{n-p} = \boxed{3^{n-p}},$$

   en posant le changement d'indice $k = m - p$ et en utilisant la formule du binôme de Newton.
   Méthode 2 (on partitionne selon le cardinal de Y).

On note pour tout $k \in [\![0, n-p]\!]$, $D_k := \{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \setminus Y = A$ et $|Y| = k\}$. On a

$$C = \bigsqcup_{k=0}^{n-p} D_k, \qquad \text{donc} \qquad |C| = \sum_{k=0}^{n-p} |D_k|.$$

Fixons $k \in [\![0, n-p]\!]$ et calculons $|D_k|$.
Se donner $(X,Y) \in D_k$ revient à :

- *choisir une partie Y de $E \setminus A$ à k éléments : il y en a $\binom{n-p}{k}$.*
- *choisir $X = A \cap (X \setminus A)$, i.e.*
  - *prendre tous les éléments de A (imposé) ;*
  - *ajouter éventuellement une partie de Y : il y en a 2^k.*

Ainsi $|D_k| = \dbinom{n-p}{k} 2^k$ *et* $\boxed{|C| = \sum_{k=0}^{n-p} \dbinom{n-p}{k} 2^k = \boxed{3^{n-p}}}$.

Exercice 23. Couples de parties. *Soit E un ensemble fini.*

1. *Combien y a-t-il de couples (A,B) de parties de E disjointes ?*
2. *Combien y a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \subset B$?*
3. *Combien y a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cup B = E$?*
4. *Soit C une partie de E. Combien y a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = C$?*

Correction. *Notons $n = |E|$.*

1. **Remarque.** $A \cap B = \varnothing \iff B \subset (E \setminus A)$.

   Preuve pédestre. *On va commencer par un calcul peu astucieux.*
   On ne peut pas directement appliquer le principe de multiplication : il y a 2^n parties $A \subset E$, mais le nombre de parties $B \subset E$ disjointes de A dépend du cardinal de A. On est donc amené à effectuer d'abord un principe d'addition, en « découpant les cas possibles » en fonction du cardinal de A.
   Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$, et dénombrons les couples (A,B) de parties disjointes de E tels que $|A| = k$.
   Pour construire un tel couple :

   - *on choisit une partie $A \subset E$ à k éléments : $\binom{n}{k}$ possibilités ;*
   - *on choisit une partie $B \subset E$ disjointe de A, c'est-à-dire une partie de $E \setminus A$. Comme $|E \setminus A| = n-k$, il y a 2^{n-k} possibilités.*

   Par principe de multiplication, il y a $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ couples (A,B) de parties disjointes tels que $|A| = k$.

Par principe d'addition, le nombre de couples cherché est

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\times 2^{n-k}\\ &= (2+1)^n && \textit{(binôme de Newton)}\\ &= \boxed{3^n}.\end{aligned}$$

Preuve futée. *Le fait de trouver un résultat si simple peut nous inciter à trouver une démonstration plus directe, basée sur le fait que*

$$E = (A\setminus B)\sqcup(B\setminus A)\sqcup(A\cap B)\sqcup(\overline{A}\cap\overline{B}).$$

Étant donné un couple (A,B) de parties de E et un élément $x\in E$, il y a quatre possibilités :

- *l'élément x peut appartenir à A, mais pas à B : on dira alors que x est de groupe « A » ;*
- *l'élément x peut appartenir à B, mais pas à A : on dira alors que x est de groupe « B » ;*
- *l'élément x peut appartenir à A et à B : on dira alors que x est de groupe « AB » ;*
- *l'élément x peut n'appartenir ni à A ni à B : on dira alors que x est de groupe « O ».*

Les deux parties formant le couple (A,B) seront alors disjointes si et seulement si aucun élément n'est de groupe AB.
Autrement dit, pour construire un couple (A,B) de parties disjointes de E, on choisit, pour chaque élément $x\in E$, s'il est de groupe O, A ou B.
Il y a donc trois options par élément de E donc, d'après le principe de multiplication, $\boxed{3^n \textit{ tels couples}}$.

2. *La preuve « futée » se généralise instantanément : pour construire un couple (A,B) de parties de E tel que $A\subset B$, il ne faut aucun élément de E dans le groupe A donc, pour chaque élément, on choisit un groupe parmi les options O, B et AB :* $\boxed{\textit{il y a donc encore } 3^n \textit{ tels couples}}$.

3. *Pour construire un couple (A,B) de parties de E tel que $A\cup B=E$, il ne faut aucun élément de E dans le groupe O donc, pour chaque élément, on choisit un groupe parmi les trois groupes A, B et AB :* $\boxed{\textit{il y a donc encore } 3^n \textit{ tels couples}}$.
   Attention : on souhaite $A\cup B=E$, mais on n'a pas demandé que A et B soient disjoints !

4. *Pour construire un couple (A,B) de parties de E tel que $A\cap B=C$,*

   - *on décide que chaque élément de C sera de groupe AB : 1 possibilité (par élément) ;*
   - *on choisit, pour chaque élément de $E\setminus C$, s'il sera de groupe O, A ou B : 3 possibilités par éléments.*

   Par principe de multiplication, $\boxed{\textit{il y a donc } 3^{|E\setminus C|} = 3^{|E|-|C|} \textit{ tels couples}}$.
   (On remarque que l'on trouve le bon résultat dans le cas $C=\varnothing$ de la première question, et également dans le cas trivial où $C=E$, où seul le couple (E,E) convient.)

Exercice 24. Parties de cardinal pair. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de parties de E de cardinal pair.*

Correction. *Notons $\mathcal{P}^{pair}(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair.*
Première preuve, preuve par le calcul.
On partitionne suivant le cardinal :

$$\mathcal{P}^{pair}(E) \;=\; \bigsqcup_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \mathcal{P}_k(E),$$

où $\mathcal{P}_k(E)$ désigne l'ensemble des parties de E à k éléments. D'où

$$\boxed{\operatorname{Card} \mathcal{P}^{pair}(E) \;=\; \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \;=\; \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \;=\; 2^{n-1}}.$$

Deuxième preuve, preuve formelle (on établit une bijection entre $\mathcal{P}^{\mathbf{pair}}(E)$ et $\mathcal{P}^{\mathbf{impair}}(E)$).
On fixe x_0 un élément privilégié de E (il existe car E est non vide).
On considère

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{pair}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{impair}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A \cup \{x_0\} & \text{si } x_0 \notin A \\ A \setminus \{x_0\} & \text{si } x_0 \in A \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi' : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{impair}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{pair}(E) \\ B & \longmapsto & \begin{cases} B \cup \{x_0\} & \text{si } x_0 \notin B \\ B \setminus \{x_0\} & \text{si } x_0 \in B \end{cases} \end{array}$$

On a $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}$ et $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}$.
On en déduit que $\mathcal{P}^{pair}(E)$ et $\mathcal{P}^{impair}(E)$ sont en bijection donc $\boxed{\operatorname{Card} \mathcal{P}^{pair}(E) = \operatorname{Card} \mathcal{P}^{impair}(E)}$.
Or $E = \mathcal{P}^{pair}(E) \sqcup \mathcal{P}^{impair}(E)$ donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} E &= \operatorname{Card} \mathcal{P}^{pair}(E) + \operatorname{Card} \mathcal{P}^{impair}(E) \\ &= 2 \operatorname{Card} \mathcal{P}^{pair}(E) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{Card} \mathcal{P}^{pair}(E) = 2^{n-1}}.$$

Remarque. *Si E est de cardinal impair, alors on obtient une bijection très simple entre l'ensemble des parties de cardinal pair et l'ensemble des parties de cardinal impair en considérant*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{pair}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{impair}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus A \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi' : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{impair}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{pair}(E) \\ B & \longmapsto & E \setminus B \end{array}$$

Troisième preuve, preuve en utilisant un argument de récurrence.
Pour tout $n \geq 1$, notons u_n le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à n éléments.
Sans perte de généralité, on peut raisonner avec l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
Soit $n \geq 1$. On va établir une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
On a

$$\mathcal{P}^{pair}([\![1,n+1]\!]) \;=\; \mathcal{P}^{pair}([\![1,n]\!]) \;\sqcup\; \textit{truc-en-bijection-avec-}\mathcal{P}^{impair}([\![1,n]\!]),$$

où truc-en-bijection-avec-$\mathcal{P}^{impair}(E)(\llbracket 1,n\rrbracket)$ est l'ensemble des parties de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ de cardinal pair contenant $n+1$ (qui est bien en bijection avec ce qui est annoncé : pour une partie de cardinal pair contenant $n+1$, lui associer la partie obtenue en lui retirant $n+1$: c'est donc une partie de cardinal impair de $\llbracket 1,n\rrbracket$).
On a donc $\underline{u_{n+1} = u_n + v_n}$ en notant v_n ce que l'on imagine.
Or $\underline{\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket) = \mathcal{P}^{pair}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \sqcup \mathcal{P}^{impair}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ d'où $\underline{2^n = u_n + v_n}$.
On en déduit que $u_{n+1} = 2^n$, ceci pour tout $n \geq 1$.
On a donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ u_n = 2^{n-1}. \text{ Cette formule étant également vraie pour } n=1}$.

Exercice 25. Parties sans entier consécutif. *Combien y a-t-il de parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs ?*

Notons p_n ce nombre. Commencer par déterminer p_n pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$, puis conjecturer une relation de récurrence.

Correction.

- *$p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 8$... on reconnaît les premiers termes de la suite de Fibonacci décalée, où $F_1 = p_0$, $F_2 = p_1$, $F_3 = p_2$...*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifions que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait la relation de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = p_{n+1} + p_n}$.*
  Il y a deux sortes de parties de $\llbracket 1,n+2\rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs :
  - *celles qui ne contiennent pas $n+2$, et qui sont donc des parties de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs : il y en a p_{n+1} ;*
  - *celles contenant $n+2$, et qui ne contiennent donc pas $n+1$, et qui contiennent aussi une partie de $\llbracket 1,n\rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs : il y en a p_n.*

  Par principe d'addition, on a $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$.
  Les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(F_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2, et coïncident sur leurs deux premiers termes, donc sont égales (récurrence double immédiate, cf lemme du cours sur les suites). Ainsi,
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = F_{n+1}}.$$
- *On peut même donner la formule explicite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce aux conditions initiales. L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $r^2 - r - 1 = 0$, de discriminant 5, donc possède deux solutions réelles $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Par théorème, il existe un (unique) couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = ar_1^n + br_2^n.$$
  Grâce aux conditions initiales pour $n \in \{0,1\}$, on obtient que a et b sont solutions du système $\begin{cases} 1 &= a+b \\ 2 &= ar_1 + br_2 \end{cases}$ d'où l'on tire $a = \dfrac{2-r_2}{r_1-r_2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $b = 1-a = \dfrac{r_1-2}{r_1-r_2} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$.
  Ainsi,
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Coefficients binomiaux

Exercice 26. Une formule combinatoire. *Soient k, p et n des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. En dénombrant de deux manières les couples (A, B) de parties d'un ensemble de cardinal n telles que $\operatorname{Card} A = k$, $\operatorname{Card} B = p$ et $A \subset B$, montrer que :*

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Correction. • *Preuve en une ligne avec les factorielles.*
• **Preuve combinatoire.** *Soit E un ensemble de cardinal n. Pour déterminer le nombre de couples de parties (A, B) telles que $\operatorname{Card} A = k$, $\operatorname{Card} B = p$ et $A \subset B$, on peut :*

- *soit choisir B, et il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles, puis choisir A ; alors, B étant fixé, A est simplement une partie de B de cardinal k ; il y en a $\binom{p}{k}$, ce qui donne au total $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ couples (A, B) ;*
- *soit choisir A, et il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles, puis choisir B ; alors, A étant fixé, B s'obtient en rajoutant $p - k$ éléments à A qui doivent être choisis dans le complémentaire de A dans E ; ce dernier étant de cardinal $n - k$, il y a $\binom{n-k}{p-k}$ choix, ce qui donne au total $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ couples (A, B).*

D'où l'égalité.

Exercice 27. Preuve combinatoire de la formule de convolution de Vandermonde.
Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$. Soient E un ensemble fini à $p+q$ éléments et A une partie de E à p éléments. On note $\mathscr{P}_r(E)$ l'ensemble des parties de E à r éléments et

$$\forall k \in [\![0, r]\!],\ \mathscr{P}_{r,k}(E) = \{B \subset E \mid \operatorname{Card}(B) = r \text{ et } \operatorname{Card}(A \cap B) = k\}.$$

1. *Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, décrire par une phrase l'ensemble $\mathscr{P}_{r,k}(E)$ et déterminer son cardinal.*
2. *En déduire la* ***formule de convolution de Vandermonde*** *:*
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$
3. *Retrouver la formule précédente en calculant de deux façons différentes le produit $(1+X)^p(1+X)^q$.*
4. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.*

Correction.

1. *Soit $k \in [\![0, r]\!]$. $\mathscr{P}_{r,k}(E)$ est l'ensemble des parties de E à r éléments dont k sont communs avec A.*
Définir une partie de $\mathscr{P}_{r,k}(E)$ revient à :
   - *choisir k éléments communs avec A : il y a $\binom{p}{k}$ possibilités ;*
   - *choisir $r - k$ éléments dans $E \setminus A$: il y a $\binom{q}{r-k}$ possibilités.*

   Ainsi, $\boxed{\operatorname{Card}(\mathscr{P}_{r,k}(E)) = \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.}$

2. *Calculons* $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_r(E))$ *de deux façons différentes.*
   D'une part, $\mathscr{P}_r(E)$ *est l'ensemble des parties de* E *à* r *éléments et* $\mathrm{Card}(E) = p + q$*. D'après le cours,* $\underline{\mathrm{Card}(\mathscr{P}_r(E)) = \binom{p+q}{r}}$*.*
   D'autre part, $\mathscr{P}_r(E) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{r} \mathscr{P}_{r,k}(E)$*, et les* $\mathscr{P}_{r,k}(E)$ *sont deux à deux disjoints donc en passant aux cardinaux :* $\underline{\mathrm{Card}(\mathscr{P}_r(E)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}}$*.*
   Par égalité, il vient :
   $$\boxed{\mathrm{Card}(\mathscr{P}_r(E)) = \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}}.$$

3. *D'une part, le coefficient de degré* r *de* $(1+X)^{p+q}$ *vaut* $\binom{p+q}{r}$ *d'après la formule de binôme de Newton.*
   D'autre part, le coefficient de degré r *de* $(1+X)^p(1+X)^q$ *est* $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$*.*
   L'unicité du coefficient de degré r *de* $(1+X)^{p+q}$ *donne la formule de convolution de Vandermonde.*

4. *Il suffit d'appliquer la formule précédente à* $p = q = r = n$ *et utiliser* $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$*. On obtient alors :*
   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$$

Exercice 28. Compléments sur les coefficients binomiaux.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer la formule* $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$*.*
2. *Soient* $n_1, \ldots, n_p$ *des entiers. Montrer que pour tout entier* q*,*
   $$\binom{n_1 + \cdots + n_p}{q} = \sum_{k_1+\cdots+k_p=q} \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_p}{k_p}.$$

Correction.

1. **Méthode 1 (polynomiale).** *D'une part, le coefficient en* X^n *du polynôme* $X^{2n} - 1$ *vaut* $\binom{2n}{n}$ *(d'après la formule du binôme). D'autre part, en écrivant,* $X^{2n} - 1 = (X^n - 1)(X^n - 1)$*, et par définition du produit de deux polynômes, le coefficient en* X^n *du polynôme* $(X^n - 1)(X^n - 1)$ *vaut* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ *donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ *par symétrie des coefficients binomiaux.*
   L'unicité du coefficient en X^n *du polynôme* $X^{2n} - 1$ *assure que* $\boxed{\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$*.*
   Méthode 2 (combinatoire). *On considère un ensemble* E *de cardinal* $2n$ *et* A *une partie de* E *de cardinal* n*, et on dénombre les parties de* E *à* n *éléments.*
   - *D'une part, il y en a* $\binom{2n}{n}$*.*

- *D'autre part, on peut les partitionner en fonction du nombre d'éléments k en commun avec A (variant entre 0 et n).*
Se donner une partie de E à n éléments dont k sont en commun avec A revient à :
   - *choisir les k éléments en commun avec A : $\binom{n}{k}$ choix*
   - *choisir $n-k$ éléments dans $E \setminus A$: $\binom{n}{n-k}$ choix c'est-à-dire $\binom{n}{k}$ choix.*

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k}^2$ partie de E à n éléments dont k sont en commun avec A.
Par principe additif, il y a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \text{ parties de } E \text{ à } n \text{ éléments}}$.
On conclut par unicité du cardinal.

2. *Soit $q \in \mathbb{N}$. On note $N = n_1 + \cdots + n_p$ et $\Delta(q) = \{(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p \mid k_1 + \cdots + k_p = q\}$.*
On se donne également des ensembles $E_1, \ldots, E_p$ disjoints de cardinaux respectifs $n_1, \ldots, n_p$ (si on veut un exemple explicite, on peut prendre $E_i = \{i\} \times [\![1, i]\!] \subset \mathbb{N}^2$) et on définit $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$.
On a donc $|E| = n_1 + \cdots + n_p = N$.
Pour tout $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_p) \in \Delta(q)$, on note $\mathtt{P}(\underline{k})$ l'ensemble des parties de E contenant k_1 éléments de $E_1, \ldots, k_p$ éléments de E_p.
On a alors
$$\mathscr{P}_q(E) = \bigcup_{\underline{k} \in \Delta(q)} \mathtt{P}(k).$$
   - *Soit $\underline{k} \in \Delta(q)$. Pour construire un élément de $\mathtt{P}(\underline{k})$,*
      - *on choisit une partie à k_1 éléments de E_1 : $\binom{n_1}{k_1}$ possibilités ;*
      - *etc.*
      - *on choisit une partie à k_p éléments de E_p : $\binom{n_p}{k_p}$ possibilités.*

     Par principe de multiplication, $|\mathtt{P}(\underline{k})| = \binom{n_1}{k_1} \ldots \binom{n_p}{k_p}$.
   - *Par principe d'addition, on en déduit*

$$\boxed{\binom{n_1 + \cdots + n_p}{q} = |\mathscr{P}_q(E)| = \sum_{\underline{k} \in \Delta(q)} |\mathtt{P}(\underline{k})| = \sum_{k_1 + \cdots + k_p = q} \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_p}{k_p}}.$$

Exercice 29. Formule d'absorption généralisée. *Soient $0 \leq k \leq n$ deux entiers. Montrer*

$$\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$$

par le calcul, puis par une démonstration combinatoire (c'est-à-dire s'appuyant sur un dénombrement).

Correction.

Calcul. *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \\
&= \binom{n}{k} 2^k. && \text{(binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Preuve combinatoire. *Soit Ω un ensemble à n éléments et*

$$\mathscr{E} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \ : \ |A| = k \text{ et } B \subset A\}.$$

On peut dénombrer $\mathscr{E}$ de deux façons.

- *On peut construire un couple $(A, B) \in \mathscr{E}$ par étapes.*
  - *On choisit une partie $A \in \mathscr{P}_k(\Omega)$: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.*
  - *On choisit une partie $B \in \mathscr{P}(A)$: il y a 2^k possibilités.*

  D'après le principe de multiplication, on a donc $|\mathscr{E}| = \binom{n}{k} 2^k$.
- *On peut également dénombrer*

$$\mathscr{E} = \bigsqcup_{i=0}^{k} \underbrace{\{(A, B) \in \mathscr{P}_k(\Omega) \times \mathscr{P}_i(\Omega) \ : \ A \supset B\}}_{=\mathscr{E}[i]}.$$

  Pour construire un élément de $\mathscr{E}[i]$,
  - *on choisit une partie $B \in \mathscr{P}_i(\Omega)$: $\binom{n}{i}$ possibilités ;*
  - *on choisit une partie $C \in \mathscr{P}_{k-i}(\Omega \setminus A)$, et on pose $A = B \sqcup C$: $\binom{n-i}{k-i}$ possibilités.*

  D'après le principe de multiplication, on a donc $|\mathscr{E}[i]| = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.

  D'après le principe d'addition, on en déduit $|\mathscr{E}| = \sum_{i=0}^{k} |\mathscr{E}[i]| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$.

Exercice 30. Nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ de l'équation $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Γ_n^p le nombre de p-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{N}^p$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$.

1. *Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p}$.*

utiliser la formule du triangle de Pascal.

2. *Calculer Γ_n^1 et Γ_n^2. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma_n^{p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n-k}^p$.*

3. *Calculer Γ_n^3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\Gamma_n^p = \binom{n+s}{s}$ où s est un entier que l'on déterminera.*

Correction.

1. *D'après la formule de Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ donc :*

$$\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}.$$

Puis par télescopage,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}}.$$

2. • $\boxed{\Gamma_n^1 = 1}$.
   • *Remarquons que*

$$\begin{aligned}\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha+\beta = n\} &= \{(\alpha,\beta) \in [\![0,n]\!]^2 \mid \beta = n-\alpha\} \\ &= \{(\alpha, n-\alpha) \mid \alpha \in [\![0,n]\!]\}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\Gamma_n^2 = \mathrm{Card}((\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha+\beta = n\}) = \mathrm{Card}([\![0,n]\!]) = n+1}$.

• *Généralisons. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit : $\Gamma_n^{p+1} = \mathrm{Card}(A_n^{p+1})$ où*

$$\begin{aligned}A_n^{p+1} &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p+1} = n\} \\ &= \bigsqcup_{k=0}^{n} A_{n,k}^{p+1} \quad (\star),\end{aligned}$$

avec pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}A_{n,k}^{p+1} &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \alpha_{p+1} = k \text{ et } \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n-k\} \\ &= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, k) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n-k\}.\end{aligned}$$

On observe que l'ensemble $A_{n,k}^{p+1}$ est en bijection avec $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n-k\} = A_{n-k}^p$. Ce dernier étant de cardinal Γ_{n-k}^p, on a $\mathrm{Card}(A_{n,k}^{p+1}) = \Gamma_{n-k}^p$.

L'union $(\star)$ étant disjointe, on a, en passant aux cardinaux $\boxed{\Gamma_n^{p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_{n,k}^{p+1}) = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n-k}^p}$.

3. $\Gamma_n^3 = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n-k}^2 = \sum_{k=0}^{n}(n-k+1) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \dfrac{(n+2)!}{n!2!} = \dbinom{n+2}{2}$. *Donc* $\boxed{\Gamma_n^3 = \binom{n+2}{2}}$.

On conjecture $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p-1}}$ *et on le montre par récurrence sur* $p \in \mathbb{N}^*$*, en notant pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$,

$$H(p) : \text{« } \underline{\forall n \in \mathbb{N}},\ \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p-1} \text{ ».}$$

- *On a* $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n^1 = 1 = \binom{n}{0}$, *donc* $H(1)$.
- *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $H(p)$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\Gamma_n^{p+1} &= \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n-k}^p && \textit{d'après la question 2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+p-1}{p-1} && \textit{par HR appliquée à chaque } \Gamma_{n-k}^p \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{p-1+\ell}{p-1} && \textit{par changement d'indice} \\
&= \binom{p+n}{p} && \textit{d'après 1.}
\end{aligned}$$

  On a donc $H(p+1)$.
- *Par théorème de récurrence, on a* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}}$.

Remarque : *on aurait aussi pu faire une preuve directe, avec la méthode des « stars and bars ».*
Γ_n^p *représente le nombre de façons de répartir* n *étoiles* $\star$ *en* p *paquets (donc à l'aide de* $p-1$ *séparateurs/barres* $|$ *). Il y a donc* $n+(p-1)$ *positions pour les « bars and stars ». Définir une répartition des étoiles, revient à choisir la position des* n *étoiles parmi les* $n+p-1$ *emplacements : il y en a* $\binom{n+p-1}{n}$ *(par défaut, les positions restantes sont celles des barres). Remarquez qu'on aurait aussi pu faire le contraire (i.e. choisir les positions des barres et « subir » la position des étoiles), ce qui donne le même résultat par symétrie des coefficients binomiaux.* $\boxed{\textit{On retrouve donc que } \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{n}}$.

Exercice 31. Dénombrement des dérangements. *Étant donnés un ensemble E et une application f de E dans E :*

- *on dit qu'un élément x de E est un **point fixe** pour f si $f(x) = x$;*
- *on appelle **dérangement** de E toute bijection de E sur E qui n'admet aucun point fixe.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n désigne le nombre de dérangements d'un ensemble fini de cardinal n. On pose $D_0 = 1$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet exercice est de calculer D_n.

1. *Justifier l'égalité $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.*
2. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$*
3. *Déduire des questions précédentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! = (-1)^n D_n$, et conclure.*

Correction.

1. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Il y a $n!$ bijections de E dans E.*
   On peut aussi compter les bijections de E dans E en fonction de leur nombre $k \in [\![0, n]\!]$ de points fixes (on a une union disjointe).
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Dénombrons les bijections de E ayant exactement k points fixes :

   - *on choisit les k points fixes : $\binom{n}{k}$ possibilités ;*
   - *les $n - k$ autres éléments de E ne doivent pas être des points fixes. Notons F l'ensemble E privé des points fixes préalablement choisis. Comme on cherche des bijections de E dans E, on doit définir une bijection de F dans F sans point fixe, ce qui revient à faire un dérangement de F. Il y en a D_{n-k}.*

   Ainsi,
   $$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{n-\ell} D_\ell = \boxed{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} D_\ell}.$$

2. *Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Le changement de variables $\ell = k - i$ donne :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^{\ell+i}\binom{n}{\ell+i}\binom{\ell+i}{i}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^{\ell+i}\frac{n!(\ell+i)!}{(\ell+i)!(n-\ell-i)!i!\ell!}\\
&= (-1)^i\sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^{\ell}\frac{n!}{(n-\ell-i)!i!\ell!}\\
&= (-1)^i\sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^{\ell}\frac{(n-i)!}{(n-\ell-i)!\ell!}\times\frac{n!}{i!(n-i)!}\\
&= (-1)^i\binom{n}{i}\sum_{\ell=0}^{n-i}(-1)^{\ell}\binom{n-i}{\ell}\\
&= (-1)^i\binom{n}{i}0^{n-i}\\
&= \begin{cases} (-1)^n & \text{si } i = n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\\
&= \delta_{i,n}(-1)^n.
\end{aligned}$$

3. *D'après la question 1., et en permutant les sommes :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k! &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D_i\right] && \text{car } k! = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D_i\\
&= \sum_{0\leq i\leq k\leq n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{i}D_i\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=i}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{i}\right]D_i && \text{en permutant les sommes}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}0\times D_i + (-1)^n D_n && \text{d'après 2.}\\
&= (-1)^n D_n.
\end{aligned}$$

En multipliant l'égalité précédente par $(-1)^n$, et puisque $(-1)^{2n} = 1$, on obtient :

$$\boxed{D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}} \qquad (\ell = n-k).$$

Exemple d'application de la formule d'inversion de Pascal : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k = n! \iff D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!$.