Calculs d'équivalents

Exercice 1. *Déterminer un équivalent simple au point considéré des fonctions suivantes.*

1. $x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x\cos x)}$ *en* $x = 0$.
2. $x \mapsto x^{1/x} - 1$ *quand* $x \to +\infty$.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ *en* $x = 0$.
4. $x \mapsto x^{\sin x} - (\sin x)^x$ *en* $x = 0$.

Correction.

1. *N est défini sur $\mathbb{R}$ et D sur $]-\pi/4, \pi/4[$. Ainsi, $\underline{f \text{ est définie sur } \mathcal{D} :=]-\pi/4,\pi/4[}$. N et D ne s'annulent pas sur $\mathcal{D}\setminus\{0\}$. On peut donc faire des quotients d'équivalents.*
   $\sin x \underset{0}{\sim} x$ *et* $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ *donc* $\cos x - 1 = o(\sin x)$. *Ainsi,* $\underline{N(x) \underset{0}{\sim} x}$.
   Le produit $x(1-\cos x) \to 0$ et $\tan u \underset{0}{\sim} u$ donc par substitution dans un équivalent : $\underline{D(x) \underset{0}{\sim} x(1-\cos x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}}$.
   Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}}$. *En particulier,* $\underline{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

2. *Soit $x > 0$ (car $x \to +\infty$). On a :* $x^{1/x} - 1 = e^{\frac{\ln x}{x}} - 1$, $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$. *Donc par substitution :*
$$\boxed{x^{1/x} - 1 = e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}}.$$

3. *Puisque* $\tan^2 x \to 0$, *on a* $\sqrt{1+\tan^2(x)} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}\tan^2 x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$. *De plus,* $\tan x \underset{0}{\sim} x$ *donc par quotient d'équivalents,* $\boxed{f(x) \sim \frac{x}{2}}$.

4.
   - *Notons* $u(x) = x^{\sin x} - (\sin x)^x = e^{\sin x \ln x} - e^{x\ln(\sin x)} = e^{\sin x \ln x}(1 - e^{w(x)})$, *où*
   $$w(x) = x\ln(\sin x) - \sin x \ln x.$$
   $\lim w(x) = 0$ *et* $1 - e^h \underset{h\to 0}{\sim} -h$ *donc* $\underline{1 - e^{w(x)} \sim -w(x)}$.
   De plus, $\sin x \ln x \to 0$ *donc* $e^{\sin x \ln x} \to 1$ *d'où* $\underline{e^{\sin x \ln x} \underset{x\to 0}{\sim} 1}$.
   Ainsi, $\boxed{u(x) \sim -w(x)}$.
   - *Équivalent de $w(x)$? <u>Idée</u> : Pour x au voisinage de 0^+ on écrit*
   $$\begin{aligned} w(x) &= x\ln(\sin x) - \sin x \ln x \\ &= x\ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right) - \sin x \ln x \\ &= \underbrace{(x - \sin x)\ln x}_{=\alpha(x)} + \underbrace{x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{=\beta(x)}, \end{aligned}$$

où $\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3 \ln x}{6}$ *et*

$$\begin{aligned}\beta(x) &\underset{x\to 0}{\sim} x\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \sin x - x\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln x}$ *et* $-\dfrac{1}{\ln x} \to 0$ *donc* $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

Finalement, $\boxed{w(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3 \ln x}{6}}$

- *Conclusion :* $\boxed{u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3 \ln x}{6}}$.

Calculs de développements limités

Exercice 2. Faire ses gammes. *Déterminer les développements limités suivants.*

1. $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$;
2. $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto \sin(x)\ln(1+x)$;
3. $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$;
4. $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto (e^x - 1)\sin x$;
5. $DL_2(0)$ *de* $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$;
6. $DL_2(0)$ *de* $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
7. $DL_8(0)$ *de* $x \mapsto (\sin x)^4$;
8. $DL_4(0)$ *de* $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$;
9. $DL_{100}(2)$ *de* $x \mapsto x^4$;
10. $DL_2(1)$ *de* $x \mapsto \sqrt{x}$;
11. $DL_2(1)$ *de* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$;
12. $DL_3(1)$ *de* $\exp$;

Indication :

1. *produit de 2* $DL_3(0)$
2. *produit + prévision*
3. *substitution de* x *par* $\sin x$
4. *produit + prévision*
5. *quotient + prévision*
6. *composée*
7. *composée + prévision*
8. $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1} = x \underbrace{e^{-x}}_{DL_3(0)} \underbrace{\dfrac{1}{1+2x}}_{DL_3(0)}$
9. *Se ramener en 0 + Newton*
10. *Se ramener en 0 + DL d'une puissance*
11. *Se ramener en 0 + somme géométrique*
12. *Se ramener en 0*

Correction.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ *et* $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = \ldots = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$ *donc* $\boxed{e^x \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \frac{23}{81}x^3 + o(x^3)}$ *; (Vérif OK)*

2. $\sin x \sim x$ *et* $\ln(1+x) \sim x$ *donc il suffit de faire des* $DL_2(0)$ *:* $\sin x = x + o(x^2)$ *et* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *donc* $\boxed{\sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}$ *; (Vérif OK)*

3. $\boxed{\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)}$ *; (Vérif OK)*

4. $(e^x - 1) \sim x$ *et* $\sin x \sim x$ *donc il suffit de faire des* $DL_2(0)$ *:* $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *et* $\sin x = x + o(x^2)$*, donc* $\boxed{(e^x - 1)\sin x = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}$ *; (Vérif OK)*

5. $DL_3(0)$ *du dénominateur car on va perdre un ordre... Pour* $x \neq 0$ *:*
$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + u(x)},$$
où $u(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$*, puis* $DL_2(0)$*... Après calculs,* $\boxed{\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}$ *; (Vérif OK)*

6. *Différence de deux* $DL_2(0)$*, mais* $DL_3(0)$ $x \mapsto \ln(1+x)$*.*
$\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ *et* $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$*.*
Après calculs, on obtient $\boxed{e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}x - \frac{23}{24}ex^2 + o(x^2)}$ *; (Vérif OK)*

7. $\boxed{(\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)}$ *;*
En effet, $(\sin x)^4 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\right) = x^4\left(1 + \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)\right)^4$*.*
En faisant un $DL_4(0)$ *de* $(1+u)^4$*, avec* $u = -\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$*, on obtient :*
$(1+u)^4 = 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)$*, d'où le résultat.*

8. $\frac{xe^{-x}}{2x+1} = xe^{-x} \times \frac{1}{1+2x} = x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + o(x^3))$
$= x\left(1 - 3x + \frac{13}{2}x^2 - \frac{79}{6}x^3 + o(x^3)\right)$ *d'où* $\boxed{\frac{xe^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)}$ *;*

9. *On pose* $h = x - 2 \to 0$*. Alors* $x^4 = (2+h)^4 = 2^4 + 4 \times 2^3 h + 6 \times 2^2 h^2 + 4 \times 2h^2 + h^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 + o(h^{100})$ *donc*
$$\boxed{x^4 = 16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4 + o((x-2)^{100})};$$

10. *On pose* $h = x - 1 \to 0$*.* $\sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$ *donc* $\boxed{\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}$ *;*

11. *En posant $h = x - 1$, on a* $f(1+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + o(h^2)$ *d'où* $\boxed{\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}$ *;*

12. $\boxed{e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \underset{1}{o}((x-1)^3)}$ *; La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un $DL_4(1)$. On pose $h = x - 1$ pour se ramener en 0, alors $e^x = e^{1+h} = ee^h$ et en utilisant le $DL_4(0)$ de* $\exp$, *on obtient* $e^x = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3 + o(h^3)$.

Exercice 3. Sans calcul ! *Donner le $DL_{12}(0)$ de* $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Correction. *On écrit*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} &= e^x - \frac{x^{12}}{12!} + o(x^{12}) \\ &= e^x\left(1 - \frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x}\right).$$

Comme $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ *et* $-\frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, *on a par substitution*

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x}\right) &\sim -\frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x} \\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!}e^{-x} \\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!},\end{aligned}$$

donc

$$\ln\left(1 - \frac{x^{12}}{12!}e^{-x} + o(x^{12})e^{-x}\right) = -\frac{x^{12}}{12!} + o(x^{12}),$$

puis

$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right) = x - \frac{x^{12}}{12!} + o(x^{12})}.$$

Exercice 4. *Faire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :*

1. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$
2. $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

Correction.

1. *On raisonne au voisinage de* 0. *Ce développement limité existe car la fonction* $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^4$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(même* $\mathscr{C}^\infty$*). De plus, on a* $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = -\ln(\cos(x))$. *Notons* $u : x \mapsto \cos(x)-1$. *Alors* $u(x) \to 0$ *et puisque* $u(x) \sim -\frac{x^2}{2}$, *il suffit d'aller à l'ordre* 2 *pour avoir un développement à l'ordre* 4. *Ainsi,*

$$\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = -\ln\left(1+u(x)\right) = -u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + o(u(x)^2).$$

De plus,

$$u(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \qquad u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad o(u(x)^2) = o(x^4).$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \quad \text{donc} \quad \boxed{\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)}.$$

Alternative (primitiver le DL de sa dérivée). *En effet, on a* $f'(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ *donc* $f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

2.
   - *On rappelle que*

   $$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}u^4 + o(u^4)$$

   N.B. : grâce aux termes prépondérants, on aura en fait seulement besoin du $DL_2(0)$.
   En particulier $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.
   Donc $\underline{\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)}$.
   - *Puis*

   $$\begin{aligned} f(x) &= \left(2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1+v(x))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

   avec $v(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{16}x^4 + o(x^4)$, $\quad v^2(x) = \dfrac{1}{16}x^4 + o(x^4)$.

- *Ainsi :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}v(x)-\frac{1}{8}v^2(x)+o(v^2(x))\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{8\times 16}x^4+o(x^4)\right) \\ f(x) &= \boxed{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x^2-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^4+o(x^4)}. \end{aligned}$$

Exercice 5. *Déterminer les limites suivantes.*

1. $x\mapsto\left(\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}\right)^{x\ln x}$ *en* $+\infty$. *2.* $x\mapsto\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}$ *en* 1. *3.* $x\mapsto\dfrac{e^x-1+x^2+\sin^3(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ *en* 0.

Correction.

1. *Notons* $f(x)=\left(\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}\right)^{x\ln x}=\left(1+\dfrac{1}{x\ln x}\right)^{x\ln x}=e^{x\ln x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)}$. *FI du type* $+\infty\times 0$.
   Utilisons des équivalents : puisque $\frac{1}{x\ln x}\to 0$, *on a* $\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x\ln x}$ *puis*
   $x\ln x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}\right)\underset{x\to 0}{\sim}1$. *Par continuité de l'exponentielle en 1, on a* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\ln x+1}{x\ln x}\right)^{x\ln x}=e}$.
   Sinon, avec un DL : $f(x)=e^{x\ln x\left(\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)}=e^{1+o(1)}\to e^1$.
2. *Posons* $h=x-1$ *pour se ramener en 0. Dès lors,* $h\xrightarrow[x\to 1]{}0$.
   - *D'une part, on fait un équivalent pour le dénominateur :*
   $$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi h}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{\pi h}{2}\underset{x\to 1}{\sim}-\frac{\pi(x-1)}{2}.$$
   - *D'autre part, on ré-écrit le numérateur :*
   $$e^{x^2+x}-e^{2x}=e^{2x}(e^{x^2-x}-1)=e^{2x}(e^{x(x-1)}-1)\underset{1}{\sim}e^{2x}x(x-1)\underset{1}{\sim}e^2(x-1).$$
   - *Ainsi, le quotient* $\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\underset{x\to 1}{\sim}\dfrac{-2e^2}{\pi}$, *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\dfrac{-2e^2}{\pi}}$.
3. *D'une part :* $e^x-1+x^2+\sin^3(x)=1+x+o(x)-1+o(x)=x+o(x)$. *Donc* $e^x-1+x^2+\sin^3(x)\underset{0}{\sim}x$.
   D'autre part : $\sqrt[3]{1+x}-1\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{3}x$.
   Ainsi, $\dfrac{e^x-1+x^2+\sin^3(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1}\underset{0}{\sim}3$. *Donc par conservation de la limite dans les équivalents :*
   $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+x^2+\sin^3(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3}.$$

Remarque : quand on a des sommes, on préfère les DL car on ne peut pas faire de somme d'équivalents.

Exercice 6. DL hors 0. *Déterminer le DL à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de $f : x \mapsto \sin x \cos(3x)$.*

On pose $h = x - \frac{\pi}{3} \to 0$. Alors

$$f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\cos(3h+\pi).$$

Or, par formule d'addition :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) &= \frac{1}{2}\sin h + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos h \\ &= \frac{1}{2}\left(h + o(h^2)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}h - \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 + o(h^2),\end{aligned}$$

et

$$\cos(3h+\pi) = -\cos(3h) = -1 + \frac{9}{2}h^2 + o(h^2).$$

Donc

$$f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{10\sqrt{3}}{4}h^2 + \underset{0}{o}(h^2)$$

d'où

$$\boxed{f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{10\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{0}{o}(h^2)}.$$

Exercice 7. DL de tan**.** *Déterminer le DL à l'ordre 7 en 0 de* tan*.*

Correction. tan *est dérivable en 0, de dérivée 1 en 0 donc* $\tan(x) = x + o(x)$.
D'où $\tan^2 x = x^2 + o(x^2)$ *puis* $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^2)$.
En intégrant, et sachant que $\tan(0) = 0$, *il vient :* $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
D'où $\tan^2(x) = x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^6) = x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$, *puis* $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
En intégrant, et sachant que $\tan(0) = 0$, *il vient :* $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
D'où $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \dfrac{x^6}{9} + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{4}{15}x^6 + o(x^6) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6)$.
Enfin, en intégrant, on obtient finalement :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)}.$$

Exercice 8. DL de $\tan$**.** *Justifier que la fonction* $\tan$ *admet un développement limité à tout ordre en 0. On pose*

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Calculer a_n *en fonction de* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

A TAPER. Réponse : $\boxed{a_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2a_k a_{n-1-k}}{2n+1}}$ *et* $\boxed{a_{2p+1} = \frac{a_p^2}{2n+1} + \sum_{k=0}^{p} \frac{2a_k a_{n-1-k}}{2n+1}}$.

Exercice 9. Développement limité d'une primitive.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. *En déduire le développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *des fonctions* arcsinus *et* arccosinus.

Correction.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}(-x^2)^2 + o(x^4)$ *donc* $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4)}$.
2. - $\arcsin$ *est* $\mathscr{C}^\infty(]-1,1[)$ *donc admet un* $DL_5(0)$ *puis* $\arcsin'$ *admet un* $DL_4(0)$. *Soit* $x \in]-1,1[$. $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ *et* $\arcsin(0) = 0$ *donc* $\boxed{\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$.
   - *On a* $\underline{\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)}$ *donc* $\boxed{\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$.
   Ou alors on fait comme pour arcsin...

Exercice 10. Développement limité d'une primitive. *Soit* $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. *Donner un développement limité de* f *en 0 à l'ordre 4.*
2. *Donner l'allure de la courbe représentative de* f *en 0.*

Correction.

1. *Commençons par montrer que la fonction* f *est dérivable. En notant* G *une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction continue* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, *on a*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(x^2) - G(x) \qquad (\star)$$

Méthode 1. *La fonction* G *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc par composition et somme de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$, *la fonction* f *l'est aussi. On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 de f, donnons un développement limité à l'ordre 3 de sa dérivée. Partons du développement limité : $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + o(u)$, ce qui mène à

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3),$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + o(x^3) \text{ d'où } \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} = 2x + o(x^3).$$

On a donc

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Par primitivation de ce développement limité, et puisque $f(0) = 0$, on trouve $\boxed{f(x) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}$.

Méthode 2. *Grâce à $(\star)$, il suffit de déterminer un $DL_4(0)$ de G, donc un $DL_3(0)$ de g. On a*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

donc par primivation, on a

$$G(x) = G(0) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Par substitution, et puisque $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a

$$G(x^2) = G(0) + x^2 + o(x^4).$$

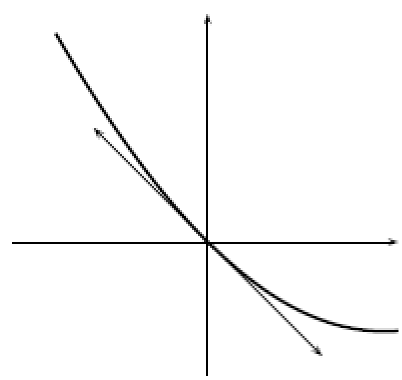
Finalement, d'après $(\star)$, on retrouve

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} G(x^2) - G(x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{6}o(x^4)}.$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est :

$$f(x) = -x + x^2 + o(x^2),$$

nous indique que la courbe représentative de f admet donc une tangente d'équation $y = -x$ en 0, et que la courbe est située localement au-dessus de sa tangente.



Exercice 11. Développement limité d'une réciproque. *Soit* $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. *Montrer que f est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On admet que $f \in \mathscr{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f.*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f^{-1}.*

Correction.

1.
   - *f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $\dfrac{e^{x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.*
   - *Pour montrer que f est bijective, on va utiliser le T.B.M..*
     f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée et somme.
     $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ où $\varphi : x \mapsto e^{x^2}(2x^2-1)+1$ et $\varphi'(x) = 2x\underbrace{(2x^2+1)e^{x^2}}_{>0}$, donc $\varphi'(x)$ est du signe de x.
     Ainsi, φ décroît strictement sur $\mathbb{R}_-$ et croît strictement sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0)=0$, donc $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en va de même pour f' : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) > 0$.
     Légère alternative. *On écrit $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)+1}{x^2} = \dfrac{e^{x^2}g(x)}{x^2}$, où $g : x \mapsto 2x^2-1+e^{-x^2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = ... = 2x\underbrace{(2-e^{-x^2})}_{>0}$.*

     Il est à noter que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\alpha} \in]0,1[$.

     Ainsi, $g'(x)$ est du signe de x. Donc, g décroît strictement sur $\mathbb{R}_-$ et croît strictement sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0)=0$, donc $g>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en va de même pour f' : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) > 0$.
   - *Étude de la dérivabilité de f en 0.*
     En faisant un DL(1) de f, on obtient : $f(x) = x + o(x)$. Comme de plus f est définie et continue en 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 > 0$.
   - *Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}}$.*
   - *Ainsi, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection monotone induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[= \mathbb{R}$ (par croissance comparée), donc $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est bijective}}$.*

2. *$x \mapsto e^{x^2}-1$ est de classe $\mathscr{C}^6$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un $DL_6(0)$: $e^{x^2}-1 = x^2 + \dfrac{(x^2)^2}{2} + \dfrac{(x^2)^3}{6} + o(x^6)$.*
   Donc pour $x \neq 0$,
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)}.$$
   Remarque : c'est cohérent avec le fait que f est impaire et $f'(0) = 1$.

3. *Par hypothèse, $f \in \mathscr{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc on a aussi $\underline{f^{-1} \in \mathscr{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. D'après le théorème de Taylor-Young, $\underline{f^{-1}\text{ admet alors un } DL_5(0)}$.*
De plus, f étant impaire, f^{-1} l'est aussi donc f^{-1} n'a que des monômes de degré impair dans son développement. De plus, $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(0)} = 1$ donc $\boxed{f^{-1}(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)}$, avec $(a_3, a_5) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
Première méthode. *On a $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par substitution dans le $DL_0(5)$ de f, on obtient :*

$$x = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) + \frac{1}{2}(f^{-1}(x))^3 + \frac{1}{6}(f^{-1}(x))^5 + o((f^{-1}(x))^5).$$

Or, $(f^{-1}(x))^2 = x^2 + 2a_3x^4 + o(x^5)$; $(f^{-1}(x))^3 = x^3 + 3a_3x^5 + o(x^5)$; $(f^{-1}(x))^5 = x^5 + o(x^5)$ et $o((f^{-1}(x))^5) = o(x^5)$.
En remplaçant dans la première égalité, il vient : $x = x + (a_3 + \dfrac{1}{2})x^3 + (a_5 + 3a_3 + \dfrac{1}{6})x^5 + o(x^5)$.
Par unicité du DL de la fonction identité en 0, on déduit que : $\underline{a_3 = -\dfrac{1}{2}}$ puis $\underline{a_5 = \dfrac{7}{12}}$.
Finalement, $\boxed{f^{-1}(x) = x - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{7}{12}x^5 + o(x^5).}$
Deuxième méthode. *On a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par substitution dans le $DL_0(5)$ de f^{-1}, on obtient :*

$$x = f^{-1}(f(x)) = f(x) + a_3f(x)^3 + a_5f(x)^5 + o(f(x)^5),$$

avec $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$; $f(x)^2 = x^2 + x^4 + o(x^5)$; $f(x)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$; $f(x)^5 = x^5 + o(x^5)$ et $o(f(x)^5) = o(x^5)$. Donc, en remplaçant, il vient :

$$x = x + \left(\frac{1}{2} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} + \frac{3a_3}{2} + a_5\right)x^5 + o(x^5).$$

Par unicité du DL de la fonction identité en 0, on obtient : $\underline{a_3 = -\dfrac{1}{2}}$ puis $\underline{a_5 = \dfrac{7}{12}}$.
Même conclusion : $\boxed{f^{-1}(x) = x - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{7}{12}x^5 + o(x^5).}$

Exercice 12. Développements limités en 1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 1 de*

1. $x \mapsto e^x$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Correction.

1. *La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ (même $\mathscr{C}^\infty$) donc admet un $DL_4(1)$. On pose $u = x-1$ pour se ramener en 0, alors*
$$e^x = e^{1+u} = ee^u$$
et en utilisant le $DL_4(0)$ de exp, on obtient
$$e^x = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)\right)$$
i.e.
$$\boxed{e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + \underset{1}{o}((x-1)^4)}.$$
Remarque : *ou bien Taylor en 1 car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(1) = \exp(1) = e$.*

2.
- *$f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R}_+^*)$ donc d'après le théorème de Taylor-Young, f admet un $DL_4(1)$.*
- *On se ramène en 0 en posant $h = x-1$. On a bien $h \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. Déterminons le $DL_4(0)$ de la fonction $h \mapsto f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2}$.*
- *Prévision des ordres : $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$ donc il suffit de faire le $DL_3(0)$ de $h \mapsto \dfrac{1}{(1+h)^2}$.*
- *D'une part, $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + o(h^4)$.*
- *D'autre part :*
  Première méthode : $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 = 1 + v$ *avec* $v = 2h + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
  donc $\dfrac{1}{(1+h)^2} = \dfrac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + o(v^3)$,
  où $v = 2h + h^2$; $v^2 = 4h^2 + 4h^3 + o(h^3)$; $v^3 = 8h^3 + o(h^3)$ et $o(v^3) = o(h^3)$.
  Ainsi : $\dfrac{1}{(1+h)^2} = 1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)$.
  Deuxième méthode :
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+h)^2} &= (1+h)^{-2} = 1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2}h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3 + o(h^3)\\ &= 1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$
- *Ainsi*
$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2} &= \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)\right)\left(1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)\right)\\ &= h - \frac{5}{2}h^2 + \frac{13}{3}h^3 - \frac{77}{12}h^4 + \underset{0}{o}(h^4).\end{aligned}$$

En conclusion : $\boxed{\dfrac{\ln(x)}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + \underset{1}{o}((x-1)^4)}$.

Applications

Exercice 13. Extremum local. *Soit $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) > 0$. Montrer que f admet un extremum local en x_0.*

Comme $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$, f admet un $DL_4(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + o((x-x_0)^4).$$

Donc

$$f(x) - f(x_0) \sim \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 > 0,$$

par hypothèse. Par conservation du signe dans les équivalents, on a $f(x) \geq f(x_0)$ au voisinage de x_0 i.e. $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } x_0}$.

Exercice 14. Dérivées n-ième. *Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Sans calcul, déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = x\dfrac{1}{1-x^2} = x\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n} x^{2p} + o(x^{2n})\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$.
Par ailleurs, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc d'après la formule de Taylor-Young, f admet un $DL_{2n+1}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^{2n+1}).$$

Par imparité de f, on sait que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)}(0) = 0}$. *Par unicité du $DL_{2n+1}(0)$, on en déduit aussi que* $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p+1)}(0) = (2p+1)!}$.

Exercice 15. Premières dérivées de $\sin^n$. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f = \sin^n$. Calculer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(0)$.*

<u>**Correction.**</u> *On a*

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^n(x) &= (x + o(x))^n \\ &= x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Taylor-Young et l'unicité du DL, on obtient

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{f^{(n)}(0) = n!}.$$

Exercice 16. Une somme binomiale. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1)^n$, calculer, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la somme*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

Correction. *On a*

$$\begin{aligned} x^n + o(x^n) = (e^x - 1)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{(kx)^p}{p!} + o(x^n) \right] \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p \right) x^p + o(x^n) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!}.$$

Exercice 17. Fonctions tangentes à l'ordre 6. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}$.*

Correction. *Le théorème de Taylor-Young donne des $DL_6(0)$*

$$f(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^6) \qquad \textit{et} \qquad g(x) = x + \alpha x^3 + \beta x^5 + o(x^6).$$

Après calcul, on obtient

$$f(g(x)) = x + (a + \alpha)x^3 + (b + \beta + 3a\alpha)x^5 + o(x^6).$$

Les développements limités de f et g jouant des rôles symétriques dans cette expression, on en déduit que

$$\boxed{f(g(x)) - g(f(x)) = o(x^6)},$$

et $\boxed{\textit{la limite cherchée est } 0}$.

Exercice 18. Approximations de e. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.*

2. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.*

Étudier la croissance de la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction.

1. *On a* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. *On a par ailleurs* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$, *donc* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $\boxed{u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$.

2. *On obtient par le calcul que :*

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

   Cela démontre que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) > 0$ *à partir d'un certain rang, i.e. que* $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante à partir d'un certain rang donc que* $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante à partir d'un certain rang}}$.

Exercice 19. Une étude locale de fonction. *Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1 + x^2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.*

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.*

2. *En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note à nouveau f ce prolongement continu. Justifier que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$. Donner une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente. Faire un dessin local.*

3. *Montrer que : $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire une équation de l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.*

4. *Déterminer la parité de f et en déduire une équation de l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. Préciser sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.*

5. *Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ sans faire de tableau de variations (on fera apparaître les asymptotes et la tangente en 0).*

Correction.

1. *La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - 1 + x^2$ est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ donc elle admet un développement limité à l'ordre 4 en 0. De plus, au voisinage de 0, en utilisant les développements usuels en 0, puisque*

$x^2 \to 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}-1+x^2 &= \left(1+x^2\right)^{1/2}-1+x^2\\ &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^4+o(x^4)-1+x^2\\ &= \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}x^3+\underset{0}{o}(x^3)}.$$

2. *On déduit du développement limité précédent que f possède une limite finie en 0 qui vaut 0, donc que* $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0}$*. On note encore f ce prolongement continu en 0.*
   Dès lors, f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{3}{2}$.

   > *On rappelle que*
   > $$\forall x\neq 0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3}{2}.$$

   Une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est donc $\boxed{y=\frac{3}{2}x}$.
   En utilisant le développement limité précédent, on a $f(x)-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{8}x^3+\underset{0}{o}(x^3)$, donc

   $$f(x)-\frac{3}{2}x\underset{0}{\sim}-\frac{1}{8}x^3.$$

   Par conservation du signe dans les équivalents, on en déduit que :

   - *si $x>0$, alors au voisinage de 0, on a $f(x)-\frac{3}{2}x\leq 0$ c'est-à-dire que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente ;*
   - *si $x<0$, alors au voisinage de 0, on a $f(x)-\frac{3}{2}x\geq 0$ c'est-à-dire que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente.*

3. *Soient $x\in\,]0,+\infty[$ et $t=\frac{1}{x}$. Puisque $t>0$, on peut écrire $t=\sqrt{t^2}$ donc*

   $$f\left(\frac{1}{t}\right)=t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t^2}\right)=\boxed{\sqrt{1+t^2}-t+\frac{1}{t}}.$$

   Au voisinage de 0 pour t, on a

   $$\begin{aligned}tf\left(\frac{1}{t}\right)&=t\sqrt{1+t^2}-t^2+1\\ &=t\left(1+o(t)\right)-t^2+1\\ tf\left(\frac{1}{t}\right)&=1+t-t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{x}f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

et

$$\boxed{f(x) - (x+1) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}}.$$

Par conservation de la limite et du signe dans les équivalents, et vu que $\frac{1}{x} \to 0$, *on en déduit que* $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = x+1}$, *et que* $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se situe en dessous de cette asymptote au voisinage de } +\infty}$.

4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, *on* $f(-x) = -f(x)$ *donc* $\boxed{f \text{ est impaire}}$. *Quand* x *est au voisinage de* $-\infty$, *on a* $-x$ *au voisinage de* $+\infty$, *donc d'après la question précédente*

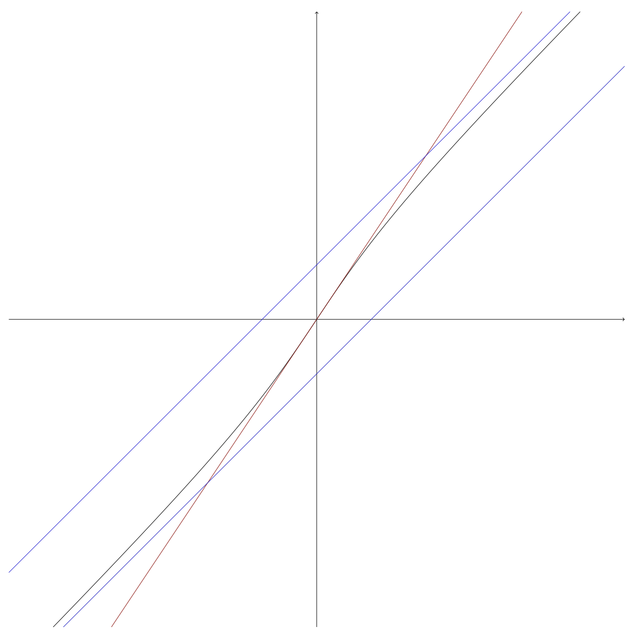
$$f(x) = -f(-x) = -\left(-x + 1 - \frac{1}{-x} + \underset{-x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

donc

$$\boxed{f(x) - (x-1) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{1}{x}}.$$

Par conservation de la limite et du signe dans les équivalents, on en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x-1 \text{ est}}$ *et, comme* $\left(-\frac{1}{x} \geq 0\right)$, *on sait que* $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se situe au-dessus de cette asymptote au voisinage de } -\infty}$.

5. *On en déduit le graphe de* f *(légende à compléter par vos soins) :*



Exercice 20. Une étude globale de fonction. *Étudier la fonction* $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Correction.

- *f est définie sur $D_f := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De plus, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f.*

- *Soit $x \in D_f$. On a : $f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2}{(x+1)^2+1} = x\phi(x)$*
  où $\phi(x) := 2\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{1+(x+1)^2}$.
  Après calculs, on obtient : $\phi'(x) = -\frac{x^2+4x+6}{(1+(1+x)^2)^2} < 0$ (en effet, $x \mapsto x^2+4x+6$ est une fonction polynômiale de degré 2 de discriminant négatif, donc sans racine réelle et de signe fixe, et valant 6 en 0). On en déduit que ϕ est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.
  De plus, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x}{1+(x+1)^2} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

  donc chacun des termes tend vers 0 en $\pm\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0$ et comme ϕ est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$, on en déduit que $\boxed{\phi \text{ est négative sur }]-\infty,-1[\text{ et positive sur }]-1,+\infty[}$

- *Le tableau de signe pour f' (**à faire**) nous mène à la caractérisation :*

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) \leq 0 \iff x \in]-1, 0],$$

  *et permet de déduire les variations de f sur D_f (**tableau à faire**).*

- *On complète le tableau de variations de f avec ses limites : $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = 0$. De plus, on a déjà vu que*

$$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{d'où} \quad f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x.$$

  On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- **Étude au voisinage de l'infini.** *On a vu que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ donc $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 1$. Étudions ce quotient au voisinage de l'infini. Posons $u = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ et faisons un DL à l'ordre 2 de $u \mapsto uf\left(\frac{1}{u}\right)$ au voisinage de 0. On a, pour $u \neq 0$:*

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}\arctan\left(\frac{u}{1+u}\right).$$

Faisons donc un DL à l'ordre 3 de $u \mapsto \arctan\left(\frac{u}{1+u}\right)$ *au voisinage de 0. Commençons par un* $DL_3(0)$ *de* $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ *:*

$$\frac{u}{1+u} = u\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} u(1-u+u^2+o(u^2)) = u-u^2+u^3+o(u^3).$$

Ensuite, posons $v := \frac{u}{1+u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. *On sait que* $\arctan v = v - \frac{v^3}{3} + \underset{0}{o}(v^3)$.

Après substitution et calculs, on obtient : $\arctan\left(\frac{u}{1+u}\right) = u - u^2 + \frac{2}{3}u^3 + o(u^3)$ *puis*

$$\underline{uf\left(\frac{1}{u}\right) = 1 - u + \frac{2}{3}u^2 + o(u^2),}$$

d'où

$$\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ainsi, $[f(x)-(x-1)] \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2}{3x} \to 0$. *Donc* *la droite d'équation* $y = x-1$ *est asymptote (oblique) à* $\mathcal{C}_f$ *au voisinage de* $\pm\infty$. *De plus,* $\mathcal{C}_f$ *est en dessous de son asymptote en* $-\infty$ *et au-dessus en* $+\infty$.
Faire un dessin local.

- **Étude au voisinage de** -1**.** *On pose maintenant* $h = x+1 \xrightarrow[x\to -1]{} 0$.
  On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$f(h-1) = (h-1)^2 \arctan\frac{1}{h} = (1-2h+h^2)\left(\varepsilon(h)\frac{\pi}{2} - \arctan h\right),$$

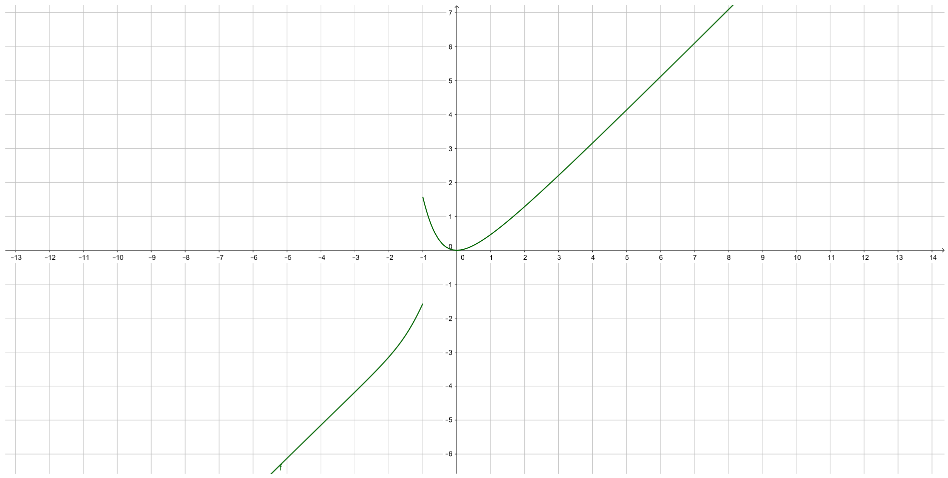
en utilisant le fait que $\underline{\text{pour tout } h \in \mathbb{R}^*,\ \arctan h + \arctan\frac{1}{h} = \varepsilon(h)\frac{\pi}{2}}$, *où* $\varepsilon(h) = \pm 1$ *désigne le signe de* h. *De plus,* $\arctan h = h + o(h^2)$ *donc après développement et simplifications, on obtient*

$$\boxed{f(h-1) = \frac{\varepsilon(h)\pi}{2} - (1+\varepsilon(h)\pi)h + \left(2 + \frac{\varepsilon(h)\pi}{2}\right)h^2 + o(h^2)}.$$

- **Étude au voisinage de** -1^-**.** $f(h-1) = -\frac{\pi}{2} - (1-\pi)h + (2-\frac{\pi}{2})h^2 + o(h^2)$.
  f *peut être prolongée par continuité à gauche en* -1, *en posant* $f_g(-1) = -\frac{\pi}{2}$. *Dès lors,* f_g *est dérivable à gauche en* -1 *et* $f_g'(-1) = \pi - 1$ *et* $f(x) - [-\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1)] \underset{-1^-}{\sim} (2-\frac{\pi}{2})(x+1)^2 > 0$ *donc* $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente en } -1^-}$. **Faire un dessin local**.

- **Étude au voisinage de** -1^+**.** $f(h-1) = \frac{\pi}{2} - (1+\pi)h + (2+\frac{\pi}{2})h^2 + o(h^2)$.
  f *peut être prolongée par continuité à droite gauche en* -1, *en posant* $f_d(-1) = \frac{\pi}{2}$. *Dès lors,* f_d *est dérivable à droite en* -1 *et* $f_d'(-1) = -\pi - 1$ *et* $f(x) - [\frac{\pi}{2} - (1+\pi)(x+1)] \underset{-1^+}{\sim} (2+\frac{\pi}{2})(x+1)^2 > 0$ *donc* $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente en } -1^+}$. **Faire un dessin local**.

- **Étude au voisinage de** 0 *(pour tracer le graphe de f). D'après le tableau de variations de f,* $\boxed{\text{$f$ admet un minimum local en 0 qui vaut 0}}$.



Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice 21. Une équation à paramètres. *Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'équation $e^{-\alpha x} = x$, d'inconnue x, possède une et une seule solution x_α dans $]0,1[$ et $x_\alpha = 1 - \alpha + \frac{3\alpha^2}{2} + \underset{\alpha\to 0}{o}(\alpha^2)$.*

Correction. *Soit $\alpha > 0$.*

- *La fonction $f : x \mapsto e^{-\alpha x} - x$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1[$, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-\alpha} - 1 < 0$ donc d'après le TBM, 0 possède un unique antécédent $x_\alpha \in]0,1[$ par f.*
- **Méthode 1 (DL successifs).**
  - *On a : $x_\alpha \in]0,1[$ donc par encadrement $e^{-\alpha} \leq e^{-\alpha x_\alpha} \leq 1$. Or, $e^{-\alpha x_\alpha} = x_\alpha$, donc $e^{-\alpha} \leq x_\alpha \leq 1$ avec $e^{-\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1$. Ainsi, par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = 1$ donc*

    $$\underline{x_\alpha = 1 + o(1)} \qquad \text{(ordre 0).}$$

    Sinon : *$(x_\alpha)_\alpha$ bornée et $\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$ donc $\alpha x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$, donc $x_\alpha = e^{-\alpha x_\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1$.*
  - *On poursuit le DL à l'ordre suivant en ré-injectant. On a*

    $$x_\alpha = e^{-\alpha x_\alpha} \underset{\alpha\to 0}{=} e^{-\alpha + o(\alpha)} \underset{\alpha\to 0}{=} \underline{1 - \alpha + o(\alpha)} \qquad \text{(ordre 1).}$$

– *Enfin*

$$\begin{aligned} x_\alpha &= e^{-\alpha x_\alpha} \\ &\underset{\alpha\to 0}{=} e^{-\alpha+\alpha^2+o(\alpha^2)} \\ &\underset{\alpha\to 0}{=} 1+\left(-\alpha+\alpha^2\right)+\frac{1}{2}(-\alpha)^2+o\left(\alpha^2\right) \\ &\underset{\alpha\to 0}{=} \underline{1-\alpha+\frac{3\alpha^2}{2}+o\left(\alpha^2\right)} \qquad \text{(ordre 2).} \end{aligned}$$

- **Méthode 2.** *On pourrait noter $g : \alpha \mapsto x_\alpha$, et comme $e^{-\alpha x} = x \iff \alpha = -\dfrac{\ln x}{x}$, on obtient $g^{-1} : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x}$.*
La question revient à faire le $DL_2(0)$ de g, que l'on pourrait déduire de celui de g^{-1} (plus simple à obtenir car fonction explicite).
Comme précédemment, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to 0} g(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = 1$, donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$; dès lors, g est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $]0,1]$ et $g^{-1} :]0,1] \to \mathbb{R}_+$ est clairement bijective et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1]$. Comme $(g^{-1})' : x \mapsto \dfrac{\ln x - 1}{x^2} < 0$, on a en plus que $(g^{-1})'$ ne s'annule pas sur $]0,1]$, donc on en déduit que $(g^{-1})^{-1}$ i.e. $\underline{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.
D'après le théorème de Taylor-Young, $\underline{g \text{ admet un } DL_2(0)}$ et $\underline{g^{-1} \text{ admet } DL_2(1)}$.
Déterminons le $DL_2(1)$ de g^{-1}.
En posant $h = x-1 \to 0$, on a

$$g^{-1}(1+h) = \frac{-1}{1+h} \times \ln(1+h) = (-1+h+o(h))(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)) = -h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2).$$

Donc

$$\boxed{g^{-1}(x) \underset{x\to 1}{=} -(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}.$$

Déduisons le $DL_2(0)$ de g.
Puisque g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 1$, on sait d'après le théorème de Taylor-Young, que g admet un $DL_2(0)$ de la forme :

$$g(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{=} 1+a\alpha+b\alpha^2+o(\alpha^2), \text{ avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ à déterminer.}$$

Puisque $g(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1$, on peut substituer $g(\alpha)$ à x dans le DL de g^{-1}, ce qui donne :

$$g^{-1}(g(\alpha)) = -(g(\alpha)-1)+\frac{3}{2}(g(\alpha)-1)^2+o((g(\alpha)-1)^2).$$

Donc

$$\alpha = -a\alpha - b\alpha^2 + \frac{3}{2}a^2\alpha^2 + o(\alpha^2).$$

Par unicité du $DL_2(0)$ de Id en 0, on en déduit que $-a = 1$ et $\frac{3}{2}a^2 - b = 0$ donc $a = -1$ et $b = \frac{3}{2}$, d'où

$$\boxed{x_\alpha = g(\alpha) = 1-\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2+\underset{0}{o}(\alpha^2)}.$$

Exercice 22. Une équation à paramètres. *Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par*

$$f_n : x \mapsto n \cos^n x \sin x.$$

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 2$, la fonction f_n possède un maximum, atteint en un unique point x_n. On note $y_n = f_n(x_n)$.*
2. *Trouver un équivalent pour chacune des suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$.*

Correction.

1. *Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :*

$$f_n'(x) = n \left[\cos^{n+1} x - n \cos^{n-1} \sin^2 x\right] = n \cos^{n-1} x(\cos^2 x - n \sin^2 x).$$

Méthode 1 (étude de fonction). *Vu que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos^{n-1} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, mais f_n n'est pas maximale en $\frac{\pi}{2}$ vu que $f_n(\pi/2) = 0$ et $f_n(\pi/4) > 0$.*
Ainsi, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos^2 x - n \sin^2 x = 0 \Longleftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \tan x = |\tan x| = \frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow x = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}},$$

où la dernière implication utilise $\arctan(\tan x) = x$ vu que $x \in [0, \pi/2[\subset]-\pi/2, \pi/2[$, et

$$f_n'(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos^2 x - n \sin^2 x > 0 \Longleftrightarrow \tan^2 x < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \tan x < \frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow x < \arctan \frac{1}{\sqrt{n}},$$

où la dernière équivalence utilise que $\tan$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2[$ et $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\left[0, \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le tableau de variation de f_n suivant :

x	0		$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0
f_n	0	$\nearrow$	y_n	$\searrow$	0

Ainsi, la fonction f_n atteint son maximum une seule fois sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $\boxed{x_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Méthode 2. *Comme $f \in \mathscr{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$, on sait d'après le TBA, que f_n admet un maximum M sur ce segment (qui est donc est atteint au moins une fois).*

Comme $f_n(0) = 0 = f_n(\pi/2)$ et f_n prend des valeurs > 0 (par exemple en $\pi/4$), on en déduit que le maximum de f_n n'est pas atteint en 0 et $\pi/2$. Il est donc atteint au moins une fois sur $]0, \pi/2[$. Soit

$a \in]0, \pi/2[$ tel que $f(a) = M$. Comme f_n est dérivable en a, on sait d'après la condition nécessaire d'extremum local que $f_n'(a) = 0$.

Or, sur $]0, \pi/2[$, on repère comme dans la méthode précédente que $f_n'(a) = 0 \Longrightarrow a = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$ (donc M est atteint au plus une fois).

On en déduit que le maximum M de f_n est atteint une unique fois sur $[0, \pi/2]$ et c'est en $\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \in]0, \pi/2[$.

2.
- *Puisque $x_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$, on a $\boxed{x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}}$.*
- *Pour donner un équivalent de y_n, partons de :*

$$y_n = n \cos^n(x_n) \sin(x_n).$$

D'une part, puisque $x_n \to 0$, on a $\underline{n \sin x_n \sim n x_n \sim \frac{n}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}}$.

D'autre part, on a $\cos^n(x_n) = e^{n \ln(\cos x_n)}$ (on passe à l'exponentielle car il y a du n à deux endroits !) avec $\cos x_n \to 1$ et $\ln(u) \underset{u \to 1}{\sim} u - 1$, donc

$$\ln(\cos x_n) \sim (\cos x_n - 1) \sim -\frac{x_n^2}{2} \sim -\frac{1}{2n}.$$

Ainsi $n \ln(\cos x_n) \to -\frac{1}{2}$, et donc $\cos^n(x_n) \to \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$ donc $\underline{\cos^n(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{e}}}$.

Par produit d'équivalents, on obtient finalement $\boxed{y_n \sim \sqrt{\frac{n}{e}}}$.

Exercice 23. Somme de Riemann divergente. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.*

1. *Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.*
2. *En déduire la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis déterminer un équivalent simple de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

Correction.

1. *La fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f est en particulier continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]n, n+1[$ tel que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, on en déduit que

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

ce qui est équivalent à l'encadrement demandé.

2. *Il y a plusieurs façons de s'en sortir, mais je propose de faire quelque chose de systématique, c'est-à-dire de « réécrire » l'encadrement de la question précédente « en échangeant les rôles », c'est-à-dire en encadrant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en fonction d'une quantité qui va se télescoper quand on la sommera. Soit $k \geq 2$.*

   - *En appliquant l'inégalité précédente à k, on a*

   $$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   - *En appliquant l'inégalité précédente à $k-1$, qui est bien un élément de $\mathbb{N}^*$, on a*

   $$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{(k-1)+1} - \sqrt{k-1}\right).$$

   Ainsi, on a montré l'encadrement

   $$\forall k \geq 2, \quad 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$

   Cet encadrement n'étant valable que pour $k \geq 2$, on va sortir le premier terme de S_n avant d'utiliser l'encadrement pour encadrer la somme.
   Soit $n \geq 1$. On a

   $$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} & \\ \text{donc} \quad 1 + 2\sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) & \\ \text{donc} \quad 1 + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}\right) \leq S_n \leq 1 + 2\left(\sqrt{n} - 1\right) & \qquad \text{(télescopage)} \\ \text{donc} \quad 2\sqrt{n+1} + 1 - 2\sqrt{2} \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1. & \end{aligned}$$

   L'idée est maintenant assez limpide : on montre que les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$, et on va en déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
   Pour cela, nul besoin de montrer un « théorème des gendarmes pour les équivalents » : le théorème usuel suffit, en revenant à la définition. En effet, l'encadrement que l'on vient de montrer donne

   $$\forall n \geq 1, \frac{2\sqrt{n+1} + 1 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme

$$\frac{2\sqrt{n+1}+1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

le théorème des gendarmes entraîne

$$\frac{S_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}.$$

Exercice 24. Une étude de suite récurrente non linéaire.

On admet le théorème de Cesàro : si $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$*, alors* $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par récurrence par* $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. *Déterminons un équivalent de* u_n.
   (a) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$.

   On pourra utiliser des équivalents.

   (b) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3}$.

   On pourra penser au théorème de Cesàro.

   (c) *Déterminer un équivalent simple de* $\dfrac{1}{nu_n^2}$ *puis de* u_n.

Correction.

Étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par récurrence par* $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Posons* $D = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   - *Remarquons que la fonction* sin *est définie sur* D*, que* D *est stable par* sin *et que* sin *est croissante sur* D *donc on sait qu'on est dans le cas favorable où* <u>(u_n) *est monotone*</u>*. Montrons-le !*
   - *Notons* g *la fonction définie sur* D *par* $g : x \mapsto \sin(x) - x$. g *est dérivable sur* D *et* $\forall x \in D,\ g'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ *donc* g *est strictement décroissante sur l'intervalle* D*. Comme* $g(0) = 0$*,* g *est négative sur* D*. Ainsi,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = g(u_n) < 0,$$

donc (u_n) est strictement décroissante. Comme, de plus, (u_n) est minorée par 0, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$*. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.*

- *D'une part, la fonction $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en ℓ et (u_n) tend vers ℓ donc $(\sin(u_n))$ tend vers $\sin(\ell)$, i.e. (u_{n+1}) tend vers $\sin(\ell)$.*
  D'autre part, en tant que suite extraite de (u_n), la suite (u_{n+1}) tend vers ℓ.
  Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on a $\sin(\ell) = \ell$, i.e. $g(\ell) = 0$. Or, g ne s'annule qu'en 0, donc $\boxed{\ell = 0}$.

On a donc montré que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

3. (a)
   - *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*
   $$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n + u_{n+1})(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n + \sin u_n)(u_n - \sin u_n)}{u_n^2 (\sin u_n)^2}.$$
   - *Puisque $u_n \to 0$, on a les équivalents usuels :* $\boxed{\sin u_n \sim u_n}$ *et* $\boxed{u_n - \sin u_n \sim \frac{1}{6} u_n^3}$.
   - *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc*
   $$\frac{u_n + \sin u_n}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin u_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
   par opérations sur les limites. Donc $\boxed{u_n + \sin u_n \sim 2u_n}$.
   - *Ainsi,*
   $$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{2u_n \times \frac{u_n^3}{6}}{u_n^4} \sim \frac{1}{3}.$$

   (b) *On a $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$, donc d'après le théorème de Cesàro :* $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}}$.

   (c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)$ est télescopique, égale à $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$. On déduit alors de la question précédente que*
   $$\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$
   Or, $\dfrac{1}{nu_0^2} \to 0$, donc par somme :
   $$\boxed{\frac{1}{nu_n^2} = \left(\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2}\right) + \frac{1}{nu_0^2} \longrightarrow \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}}.$$
   Ainsi,
   $$\boxed{\frac{1}{nu_n^2} \sim \frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Exercice 25. Étude asymptotique de suite implicite.

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera u_n.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.*
3. *En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.*
4. *Montrer que l'on a $u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.*

Correction.

1. *Notons $g : x \mapsto x + \ln x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g' : x \mapsto \frac{1}{x} + 1 > 0$ donc g est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $g(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_0 g, \lim_{+\infty} g[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{R} = g(\mathbb{R}_+^*)$ donc $\boxed{\text{il existe un unique } u_n \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } g(u_n) = n}$.

2.
   - *On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(u_n) = n < n+1 = g(u_{n+1})$ et g croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $u_n < u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante. D'après le TLM, (u_n) CV ou $u_n \to +\infty$.*
   - *Supposons, par l'absurde, que (u_n) CV vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq u_1$ et PPL on a $\ell \geq u_1 > 0$, donc $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque g est continue en ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(u_n) = n$, on obtient $g(\ell) = +\infty$: absurde ! Donc $\boxed{u_n \to +\infty}$.*

3. *Par définition de u_n on a : $n = u_n + \ln u_n$ et $u_n > 0$. En divisant par u_n, on obtient : $\dfrac{n}{u_n} = 1 + \dfrac{\ln u_n}{u_n}$.*
   Or, par croissance comparée, $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $u_n \to +\infty$ donc par substitution, $\dfrac{\ln u_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Puis, par opération dans l'égalité précédente, $\frac{n}{u_n} \to 1$, donc $\boxed{u_n \sim n}$.

4.
   - *D'après la question précédente, on a $u_n \sim n$, donc $u_n = n + o(n)$.*
     Posons $v_n = u_n - n$. On sait déjà que $v_n = o(n)$. Essayons de préciser.
     Comme $g(u_n) = n$, on a $u_n - n = -\ln(u_n)$ donc $v_n = -\ln(u_n)$.
     Méthode 1. *On a*
     $$v_n = -\ln(u_n) = -\ln(n + o(n)) = -\ln n - \ln(1 + o(1)).$$
     Or, $\ln(1+o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $-\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\ln(1+o(1)) = o(\ln n)$ donc $\boxed{v_n = -\ln n + o(\ln n)}$.
     Méthode 2. *Montrons que $v_n \sim -\ln n$.*
     On a $\dfrac{\ln u_n}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1$. Ainsi, $\underline{\ln(u_n) \sim \ln n}$, d'où $\ln(u_n) = \ln n + o(\ln n)$.
     Ainsi, $v_n = -\ln n + o(\ln n)$ donc $\boxed{u_n = n - \ln n + o(\ln n)}$.
   - *Posons $w_n = u_n - n + \ln n$. On a $w_n = -\ln(u_n) + \ln n = -\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)$, où $w_n = o(\ln n)$ d'après le dernier point.*
     Or, on vient de montrer que $\frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

D'où $w_n = -\ln\left(1 \underbrace{- \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)}_{\to 0}\right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Ainsi, $\boxed{u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$.

Exercice 26. Étude asymptotique de suite implicite.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, justifier que l'équation* $e^x + x = n$ *possède une unique solution dans réelle, que l'on notera* u_n*.*

2. *Déterminer la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, puis un équivalent.*

3. *Donner le développement asymptotique à trois termes de* u_n*.*

Correction.

1. *Notons* $g : x \mapsto e^x + x$*.* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $g' : x \mapsto e^x + 1 > 0$ *donc* g *est strictement croissante sur l'intervalle* $\mathbb{R}$*. De plus,* g *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* g *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $g(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $n \in \mathbb{R} = g(\mathbb{R})$ *donc* $\boxed{\text{il existe un unique } u_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(u_n) = n}$.

2.
   - *On a* $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) = n < n+1 = g(u_{n+1})$ *et* g *croît strictement sur* $\mathbb{R}$ *donc* $u_n < u_{n+1}$*. Ainsi,* (u_n) *est strictement croissante. D'après le TLM,* (u_n) *CV ou* $u_n \to +\infty$*.*
     Supposons, par l'absurde, que (u_n) *CV vers un certain* $\ell \in \mathbb{R}$*. Puisque* g *est continue en* ℓ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) = n$*, on obtient PPL* $g(\ell) = +\infty$ *: absurde ! Donc* $\boxed{u_n \to +\infty}$.
   - *Par croissante comparée,* $\dfrac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $u_n \to +\infty$ *donc par substitution,* $\dfrac{u_n}{e^{u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, i.e.* $u_n = o(e^{u_n})$*.*
     Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $n = e^{u_n} + u_n \sim e^{u_n}$*, on a* $\boxed{e^{u_n} \sim n}$.
   - *Montrons que* $u_n \sim \ln n$*.*
     On écrit $\forall n \geq 2$*,* $\dfrac{u_n}{\ln n} = \dfrac{e^{\ln(u_n)}}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1$*. Donc* $\boxed{u_n \sim \ln n}$*, et* $u_n = \ln n + o(\ln n)$*.*

3.
   - *Posons* $v_n = u_n - \ln n$*. On a* $v_n = o(\ln n)$*.*
     On étudie : $e^{v_n} = e^{u_n - \ln n} = \dfrac{e^{u_n}}{n} = \dfrac{n - u_n}{n} = 1 - \frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$*. En particulier,* $e^{v_n} \to 1$ *et par continuité du* $\ln$ *en* 1*, on a* $v_n \to 0$ *donc* $e^{v_n} - 1 \sim v_n$*.*
     Ainsi, on obtient : $v_n \sim -\frac{\ln n}{n}$*. Donc* $\boxed{u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$.
   - *Posons* $w_n = u_n - \ln n + \frac{\ln n}{n}$*. On a* $w_n = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$*.*

On étudie :

$$\begin{aligned} e^{w_n} &= e^{u_n - \ln n + \frac{\ln n}{n}} = \frac{e^{u_n} \times e^{\frac{\ln n}{n}}}{n} = \frac{(n-u_n)\times e^{\frac{\ln n}{n}}}{n} \\ &= \left(1 - \frac{u_n}{n}\right) e^{\frac{\ln n}{n}} && \text{avec } \frac{\ln n}{n} \to 0 \\ &= \left(1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right) && \text{car } \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a $e^{w_n} \to 1$, on a $w_n \to 0$, donc

$$w_n \sim e^{w_n} - 1 \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2.$$

Ainsi, $\boxed{u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)}$ *: développement asymptotique à trois termes de u_n.*

Exercice 27. Une suite récurrente. *On note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \end{cases}$.

Montrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Indication : *on pourra montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n$, *puis* $u_n \sim n$ *puis* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$ *et conclure.*

Correction.

1. *On montre d'abord que* $u_n \sim n$.
   - *Une récurrence immédiate donne :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$, *donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*
   - *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geq n-1$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *par théorème de minoration.*
   - *Montrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n$.
     L'initialisation est évidente.
     Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \leq n$.
     On a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \underset{HR}{\leq} \sqrt{n^2+n} \leq \sqrt{n(n+1)} \leq n+1$.
   - *Ainsi,* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n-1 \leq u_n \leq n$ *d'où* $1 - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} \leq 1$ *et par théorème d'encadrement,* $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc* $\boxed{u_n \sim n}$.

2. *On a* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} = n\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}}$ *et on vient d'obtenir* $u_n = n + o(n)$ *donc* $\frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, *et* $\sqrt{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}v + o(v)$, *donc*

$$u_{n+1} = n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n + \frac{1}{2} + o(1).$$

   Alternative. $u_{n+1} - n = \sqrt{u_n + n^2} - n = n\left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} - 1\right)$, *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0$, *donc :*

$$u_{n+1} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{u_n}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + o(1).$$

   Conclusion commune. $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} (n-1) + \frac{1}{2} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)}$.

3. *Finalement, puisque* $\dfrac{u_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \to 0$, *le* $Dl_2(0)$ *de* $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ *donne :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} = n\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} &= n\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 28. Une intégrale à paramètre. *A l'aide d'une intégration par partie, montrer que*

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Correction. *Soit* $x > 0$.

- *A l'aide d'une IPP (on intègre* $t \mapsto e^{-xt}$ *pour avoir du* x *au dénominateur), on a*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\times\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{2te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} - \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

- *D'une part, par croissance comparée* $xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc a fortiori* $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ *(avoir une limite finie implique localement borné) d'où* $\underline{\frac{e^{-x}}{2x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

- *D'autre part, on a* $\forall t \in [0,1],\ 0 \le t \le 1 \le 1+t^2 \le (1+t^2)^2$, *on a* $0 \le \frac{t}{(1+t^2)^2} \le 1$, *et* $e^{-xt} > 0$ *donc, par croissance de l'intégrale sur* $[0,1]$, *on a*

$$0 \le \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x},$$

ce qui prouve que $\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $\underline{\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

- *Ainsi,*

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$