Écriture algébrique et trigonométrique

Exercice 1. *Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.*

$A = (2+i)(3+i)+4i$

$B = (1+i)^4$

$C = (1+i)^2(5+2i^3)+i\sqrt{2}$

$D = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$

$E = \dfrac{3-2i}{3i-4}$

$F = \dfrac{2}{1-i} - \dfrac{5}{1+i}$

$G = z\bar{z}$ $(z \in \mathbb{C})$

$\boxed{A = 5+9i}$

$\boxed{B = -4}$ $(i+1)^2 = 2i$

$\boxed{C = (10+\sqrt{2})i+4}$

$\boxed{D = 1-i\sqrt{3}}$

$\boxed{E = -\dfrac{18}{25} - \dfrac{1}{25}i}$

$\boxed{F = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i}$

$\boxed{G = |z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

Exercice 2. *Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.*

$A = -2+2\sqrt{3}i.$

$B = (-1-i)^{15}$

$C = (1+i\tan(\theta))^2$ $(\theta \in [0, \pi/2[)$

$D = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

- $|A| = 4$ *donc en factorisant* $\boxed{A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$
- $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ *et* $75 = 9\times 8+3$ *donc* $\boxed{B = 2^{15/2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$
- $|1+i\tan\theta| = \dfrac{1}{|\cos\theta|}$ *donc en factorisant* $\boxed{C = \dfrac{1}{\cos^2\theta}e^{i2\theta}}$
- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ *donc* $\boxed{D = 2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

Exercice 3. *Soit* $\theta \in]0, 2\pi[$. *Écrire sous forme algébrique le complexe* $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Remarquons que puisque $\theta \in]0, 2\pi[$, *on a :* $e^{i\theta} \neq 1$ *donc le complexe est bien défini.*

En factorisant par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur on obtient : $\boxed{\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}i}$.

Remarque : *Si* $\theta \neq \pi$ *alors* $\theta/2 \neq \pi/2$ *et* $\cos(\theta/2) \neq 0$ *puis* $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\tan(\theta/2)}i$.

Exercice 4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Déterminer une écriture exponentielle du complexe* $z = \dfrac{\sin(2\alpha)}{2} + i\sin^2(\alpha)$.

Correction : *On a*

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sin(2\alpha)}{2} + i\sin^2(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\alpha) + i\sin^2(\alpha) \\ z &= \sin(\alpha)e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

Or, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *donc* $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$ *donc* $\sin\alpha \neq 0$.

- *Si* $\underline{\sin(\alpha) > 0}$, *alors* $|z| = \sin(\alpha)$. *Donc une écriture trigonométrique de z est*

$$\boxed{z = \sin(\alpha)e^{i\alpha},\ \text{si } \alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[}.$$

- *Sinon, i.e. si* $\underline{\sin(\alpha) < 0}$, *alors* $|z| = -\sin(\alpha)$ *et* $z = -\sin(\alpha)(-e^{i\alpha}) = -\sin(\alpha)e^{i(\alpha+\pi)}$. *Donc une écriture trigonométrique de z est*

$$\boxed{z = -\sin(\alpha)e^{i(\alpha+\pi)},\ \text{si } \alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}](2k-1)\pi, 2k\pi[}.$$

Exercice 5. Un nombre réel. *Soit* $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{U}^n$. *Montrer que*

$$Z := \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1\, z_2\, \cdots\, z_{n-1}\, z_n} \in \mathbb{R}.$$

Correction : *On note θ_k un argument de z_k de sorte que $z_k = e^{i\theta_k}$. On factorise $z_k + z_{k+1}$ sous la forme* $2\cos\left(\dfrac{\theta_k - \theta_{k+1}}{2}\right) e^{i\frac{\theta_k+\theta_{k+1}}{2}}$, *et on constate que les arguments des numérateur et dénominateur sont égaux. Ainsi,*

$$\boxed{Z = 2^n \cos\left(\frac{\theta_n - \theta_1}{2}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{2}\right) \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 6. *Soient a et b deux complexes tels que $a\,b \neq -1$. On pose*

$$p = \frac{a+b}{1+a\,b}\ ;\ q = i\,\frac{a-b}{1+a\,b}\ ;\ r = \frac{1-a\,b}{1+a\,b}.$$

1. *Montrer que* $r \in \mathbb{R} \iff ab \in \mathbb{R}$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Correction :

1. *Par équivalences successives, on a :*

$$r \in \mathbb{R} \iff r = \overline{r} \iff \dots \iff ab - \overline{a}\overline{b} = 0 \iff ab \in \mathbb{R}.$$

2. *De même,*

$$(p, r) \in \mathbb{R}^2 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } p = \overline{p} \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } a + b = \overline{a} + \overline{b} \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{Im}(b) = -\mathrm{Im}(a).$$

Par ailleurs,

$$(q, r) \in \mathbb{R}^2 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } q = \overline{q} \iff \dots \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{Re}(b) = \mathrm{Re}(a).$$

Or,

$$(\mathrm{Re}(b) = \mathrm{Re}(a) \text{ et } \mathrm{Im}(b) = -\mathrm{Im}(a)) \iff b = \overline{a}.$$

Donc,

$$(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \iff ab \in \mathbb{R} \text{ et } b = \overline{a}.$$

Mais, pour $b = \overline{a}$, on a $ab = |a|^2 \in \mathbb{R}$ donc finalement,

$$\boxed{(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \iff b = \overline{a}}.$$

Exercice 7. Trois points de $\mathbb{U}$ à somme nulle.
Trouver tous les couples $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ tels que $1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$.

Correction :

- **Analyse.** *Soit $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ tel que $1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$.*
  Méthode 1 . En factorisant par l'angle moitié, *on trouve $1 + 2\cos\frac{x-y}{2} e^{i\frac{x+y}{2}} = 0$ donc*

$$\cos\frac{x-y}{2} e^{i\frac{x+y}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

  En prenant le module, il vient : $\left|\cos\frac{x-y}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc $\cos\frac{x-y}{2} = \pm\frac{1}{2}$.

  - **Cas où $\cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2}$.** *Alors $e^{i\frac{x+y}{2}} = 1$. On en déduit que*

$$\frac{x-y}{2} \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{x+y}{2} \equiv 0\ [2\pi]$$

  d'où

$$x - y \equiv \pm\frac{4\pi}{3}\ [4\pi] \qquad \text{et} \qquad x + y \equiv 0\ [4\pi].$$

  En faisant la somme et la différence, on obtient :

$$2x \equiv \pm\frac{4\pi}{3}\ [4\pi] \qquad \text{et} \qquad 2y \equiv \mp\frac{4\pi}{3}\ [4\pi]$$

d'où

$$x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \qquad et \qquad y \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

– **Cas où** $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$. *Alors* $e^{i\frac{x+y}{2}} = -1$. *On en déduit que*

$$\frac{x-y}{2} \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \qquad et \qquad \frac{x+y}{2} \equiv \pi\ [2\pi]$$

d'où

$$x-y \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [4\pi] \qquad et \qquad x+y \equiv 2\pi\ [4\pi].$$

En faisant la somme et la différence, on obtient :

$$2x \equiv \pm\frac{4\pi}{3}\ [4\pi] \qquad et \qquad 2y \equiv \mp\frac{4\pi}{3}\ [4\pi]$$

d'où

$$x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \qquad et \qquad y \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Dans tous les cas, $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ *donc* $x, y \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$.
Remarquons que si $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *ou* $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$ *alors* $x - y = 0$, *ce qui contredit* $x - y \equiv \pm\frac{4\pi}{3}\ [4\pi]$. *Donc* $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *ou* $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Méthode 2. Par unicité de l'écriture algébrique, *on obtient :* $\begin{cases} \cos(x) + \cos(y) = -1 \\ \sin(x) + \sin(y) = 0 \end{cases}$.
La deuxième équation assure que $\sin x = -\sin y = \sin(-y)$ *donc* $x \equiv \pi + y\ [2\pi]$ *ou* $x \equiv -y\ [2\pi]$.
Si $x \equiv \pi + y\ [2\pi]$, *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = \pi + y + 2\pi k$ *donc* $\cos x + \cos y = \cos(\pi + y) + \cos y = -\cos y + \cos y = 0 \neq 1$ *: contradiction.*
Donc

$$x = -y\ [2\pi].$$

D'où $\cos x = \cos y$ *et d'après la première équation* $2\cos x = -1$ *donc*

$$x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Comme $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$, *il vient que* $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *ou* $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

- **Synthèse.** *Réciproquement, si* $(x, y) = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *ou* $(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$, *alors*

$$1 + e^{ix} + e^{iy} = 1 + j + \overline{j} = 1 + j + j^2 = 0.$$

- **Conclusion.** $\boxed{S = \left\{\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) ; \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)\right\}}$.

Complexes de module 1

Exercice 8. *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Donner une forme simplifiée des produits $(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$ et $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$.*

Correction :

- *Tout d'abord, on a :*

$$\begin{aligned}(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) &= \begin{array}{ccccccc} & a^2 & + & ab\,j^2 & + & ac\,j \\ + & ab\,j & + & b^2 & + & bc\,j^2 \\ + & ac\,j^2 & + & bc\,j & + & c^2 \end{array} \\ &= a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ac)\,(j+j^2) \\ &= a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc.\end{aligned}$$

- *On en déduit*

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ &= \begin{array}{ccccccccccc} & a^3 & + & ab^2 & + & ac^2 & - & a^2b & - & a^2c & - & abc \\ + & a^2b & + & b^3 & + & bc^2 & - & ab^2 & - & abc & - & b^2c \\ + & a^2c & + & b^2c & + & c^3 & - & abc & - & ac^2 & - & bc^2 \end{array} \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc.\end{aligned}$$

Exercice 9. *Soient $a,b,z \in \mathbb{U}$, deux à deux distincts. Montrer que $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$.*

Preuve 1. *$a,b,z \in \mathbb{U}$ donc il existe $\alpha,\beta,\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$ et $z=e^{i\theta}$. En factorisant par l'angle moitié,*

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{i\alpha}}{e^{i\theta}-e^{i\beta}}\right)^2 \\ &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}}\left(\frac{e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}2i\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta+\beta}{2}}2i\sin\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}\right)^2 \\ &= \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}}\frac{e^{i(\theta+\alpha)}\sin^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{e^{i(\theta+\beta)}\sin^2\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque z et a sont distincts, $z-a \neq 0$, et $b \neq 0$ (car de module 1), d'où $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*}$.

Preuve 2. *Rappelons que si $u \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{u} = \overline{u}$ donc $u = \frac{1}{\overline{u}}$. On a :*

$$(z-a)^2 = (z-a)\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{a}}\right) = (z-a)\frac{\overline{a}-\overline{z}}{\overline{a}\overline{z}} = -a\frac{|z-a|^2}{\overline{z}},$$

donc

$$\frac{1}{a}(z-a)^2 = -\frac{|z-a|^2}{\overline{z}}.$$

De même,

$$\frac{1}{b}(z-b)^2 = -\frac{|z-b|^2}{\overline{z}}.$$

Puis, comme a, b et z sont distincts, on a

$$\boxed{\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 \in \mathbb{R}_+^*}.$$

Preuve 2 bis. *Notons $Z = \frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2$. Montrons que $Z = |Z|$, ce qui assurera que $Z \in \mathbb{R}_+$.*
On a :

$$\begin{aligned}
|Z| &= \frac{|b|}{|a|}\left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 && (|a| = |b| = 1 \text{ car } a, b \in \mathbb{U})\\
&= \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(z-b)(\overline{z}-\overline{b})}\\
&= \frac{(z-a)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)}{(z-b)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)} && (\text{car } \forall w \in \mathbb{U},\ \overline{w} = \frac{1}{w})\\
&= \frac{(z-a)\frac{a-z}{az}}{(z-b)\frac{b-z}{bz}}\\
&= \frac{-(z-a)^2}{(z-b)^2} \times \frac{b}{a}\\
&= Z,
\end{aligned}$$

d'où $\underline{Z \in \mathbb{R}_+}$. Par ailleurs, on a $Z \neq 0$ donc $\boxed{Z \in \mathbb{R}_+^*}$. ATTENTION : pour $w \in \mathbb{C}$, on n'a généralement pas $w^2 = |w|^2$ (contrairement au cas où $w \in \mathbb{R}$). Par exemple, pour $w = i$, on a $w^2 = -1$, alors que $|w|^2 = 1$.

Exercice 10. Une CNS d'inclusion des $\mathbb{U}_n$. *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.*
Montrer que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$ si et seulement si n divise m.

Correction :

- *Supposons $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$. Alors, en particulier $e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{U}_m$, donc $\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^m = e^{\frac{2mi\pi}{n}} = 1$. On en déduit que $\frac{2m\pi}{n}$ est un multiple de 2π donc n divise m.*

- *Supposons que n divise m. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = np$.*
  Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $z^n = 1$. On en déduit $z^m = (z^n)^p = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_m$.
  On a donc $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.

Exercice 11. *On veut résoudre l'équation $z^5 = \overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

Méthode 1 (analyse-synthèse).

Analyse. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = \overline{z}$. En passant au module, il vient $|z|^5 = |z|$ donc $|z|(|z|^4 - 1) = 0$ donc $|z| = 0$ ou $|z|^4 = 1$ d'où $z = 0$ ou $|z| = 1$.*
Supposons désormais $z \neq 0$. Alors $z \in \mathbb{U}$ et $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, si bien que l'équation devient $z^5 = \dfrac{1}{z}$ donc $z^6 = 1$.
Ainsi, $\underline{z = 0 \text{ ou } z \in \mathbb{U}_6}$.

Synthèse. *Il est clair que 0 est solution.*
Considérons maintenant $z \in \mathbb{U}_6$. Alors $z^6 = 1$, donc $z \neq 0$ et $z^5 = \dfrac{1}{z}$. En particulier $z \in \mathbb{U}$ donc $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ d'où $z^5 = \overline{z}$.

Conclusion. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } z^5 = \overline{z} \text{ est } \{0\} \cup \mathbb{U}_6}$*, donc l'équation admet 7 solutions.*

Méthode 2 (équivalence). *0 est bien sûr solution. Déterminons les solutions non nulles de cette équation.*
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ On a :

$$\begin{aligned}
z^5 = \overline{z} &\iff |z|^5 e^{i5\theta} = |z|e^{-i\theta} \\
&\iff \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5\theta \equiv -\theta \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^4 = 1 & \text{car } z \neq 0 \\ 6\theta \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta \equiv 0 \ \left[\frac{\pi}{3}\right] \end{cases} \\
&\iff z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j, e^{i\frac{2\pi}{3}} = j, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}, e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 + \overline{j} \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{S = \left\{ 0, e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j, e^{i\frac{2\pi}{3}} = j, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}, e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 + \overline{j} \right\}}$.

Remarque.
$\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} = \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\} = \{1, -1\}$
$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^4 = 1\} = \{1\}$.

Exercice 12. Trois points de $\mathbb{U}$ à somme nulle. *Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*
Montrer que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Longrightarrow e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

Correction : *Supposons que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.*
Quitte à multiplier par e^{-ix}, on peut supposer $x = 0$.
Dès lors, $e^{iy} + e^{iz} = -1$. D'après l'exercice 7, on sait alors que alors que $y + z \equiv 0\ [2\pi]$ puis $y \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

- *Si $y \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ alors $e^{iy} = j$ et $e^{iz} = e^{-iy} = \overline{j} = j^2$.*
  Dans ce cas, $e^{i2x} = e^0 = 1$, $e^{i2y} = j^2$, et $e^{i2y} = j^4 = j$ donc $e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.
- *Si $y \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ alors $e^{iy} = \overline{j} = j^2$ et $e^{iz} = e^{-iy} = j$.*
  Dans ce cas, $e^{i2x} = e^0 = 1$, $e^{i2y} = j$, et $e^{i2y} = j^2$ donc $e^{i2x} + e^{i2y} + e^{i2z} = 0$.

Dans tous les cas, on a montré la conclusion, ce qui prouve l'implication.

Exercice 13. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est un algébrique de degré 3. *En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 à coefficients entiers dont $\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ est solution.*

Correction : *Posons $\zeta_7 = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.*
On a

$$\mathbb{U}_7 = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \zeta_7^4, \zeta_7^5, \zeta_7^6\right\} = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \overline{\zeta_7^3}, \overline{\zeta_7^2}, \overline{\zeta_7}\right\}.$$

Classiquement, la somme des éléments de $\mathbb{U}_7$ vaut 0, donc

$$0 = 1 + \left(\zeta_7 + \overline{\zeta_7}\right) + \left(\zeta_7^2 + \overline{\zeta_7^2}\right) + \left(\zeta_7^3 + \overline{\zeta_7^3}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right). \qquad (*)$$

La formule de doublement de l'angle donne $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(\theta + 2\theta)\\ &= \cos\theta\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta)\\ &= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

ou bien, on utilise $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(e^{3i\theta})$ puis la formule du binôme de Newton.
En posant $\underline{x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)}$, on obtient $\underline{\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) = 2x^2 - 1}$ et $\underline{\cos\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) = 4x^3 - 3x}$.
En reportant dans $(*)$, il vient $1 + 2x + 2(2x^2 - 1) + 2\left(4x^3 - 3x\right) = 0$, i.e.

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \text{ est solution de l'équation de degré 3 : } 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0}.$$

Inégalités

Exercice 14. Comparaison des normes. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Montrer* $\dfrac{|\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z|$.

Correction : *L'inégalité de droite est évidente :*

$$|z|^2 = |\mathrm{Re} z|^2 + |\mathrm{Im} z|^2 \leq |\mathrm{Re} z|^2 + |\mathrm{Im} z|^2 + 2\,|\mathrm{Re} z|\,|\mathrm{Im} z| = (|\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z|)^2 .$$

Pour l'inégalité de gauche, écrivons $z = x + iy$ sous forme algébrique. On a

$$\begin{aligned} |z|^2 - \left(\frac{|\mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z|}{\sqrt{2}}\right)^2 &= x^2 + y^2 - \frac{(|x| + |y|)^2}{2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2|x|\,|y|}{2} \\ &= \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 15. Inégalité exponentielle. *Montrer que* $\forall z \in \mathbb{C},\ |e^z| \leq e^{|z|}$ *et déterminer les cas d'égalité.*

Correction : *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a*

$$\begin{aligned} |e^z| &= e^{\mathrm{Re} z} \\ &\leq e^{|z|} && \text{par l'inégalité } \mathrm{Re} z \leq |z| \text{ et la croissance de l'exponentielle.} \end{aligned}$$

Par croissance stricte de l'exponentielle, $\boxed{\text{il y a égalité ssi } |z| = \mathrm{Re} z, \text{ c'est-à-dire ssi } z \in \mathbb{R}_+}$.

Exercice 16. Inégalité triangulaire. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Montrer l'implication* $|z^2 - 1| \leq 8 \Longrightarrow |z - 2| \leq 5$.

- **Preuve directe :** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z^2 - 1| \leq 8$. On a $|z^2 - 1| = |z - 1|\,|z + 1|$.*
  Méthode 1 (Distinguons deux cas.)
  - *Si $|z - 1| \leq 4$, alors d'après l'inégalité triangulaire, $|z - 2| = |z - 1 - 1| \leq |z - 1| + 1 \leq 5$.*
  - *Si $|z - 1| > 4$, alors $|z + 1| \leq \dfrac{8}{4} = 2$, et par inégalité triangulaire $|z - 2| = |z + 1 - 3| \leq |z + 1| + 3 \leq 5$.*

  Méthode 2 (par inégalité triangulaire renversée), *on a $|z^2| - |1| \leq |z^2 - 1|$ donc $|z|^2 \leq 9$ d'où $0 \leq |z| \leq 3$.*
  Ainsi, par inégalité triangulaire, on obtient $|z - 2| \leq |z| + 2 \leq 3 + 2 = 5$.

- **Preuve par contraposée :** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 2| > 5$. Montrons que $|z^2 - 1| > 8$.*
  On a : $|z^2 - 1| = |z - 1|\,|z + 1|$.
  D'une part, $|z - 1| = |(z - 2) + 1| \underset{ITR}{\geq} ||z - 2| - 1|| = |z - 2| - 1 > 4$, car $|z - 2| > 5$.
  D'autre part, $|z + 1| = |(z - 2) + 3| \underset{ITR}{\geq} ||z - 2| - 3|| = |z - 2| - 3 > 2$, car $|z - 2| > 5$.

En multipliant deux inégalités de réels positifs, on obtient : $\boxed{|z^2-1|>8}$.

Exercice 17. Inégalité triangulaire à n pattes. *Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$. Montrer* $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Correction : *Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire à la somme* $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ *et d'utiliser la formule* $1+q+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ *pour* $q\neq 1$.

Exercice 18. Inégalité triangulaire généralisée et cas d'égalité. *L'objectif de cet exercice est de démontrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :*

$\forall (z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n,\quad |z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n| \iff z_1,\dots,z_n$ *ont le même argument principal.*

Pour $n=2$, on retrouve le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans le cas où z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

1. *Montrer l'implication indirecte.*
2. *Montrons maintenant l'implication directe.*
   (a) *Montrer que :* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n,\ |z_1+\cdots+z_n|\leq|z_1|+\cdots+|z_n|$.
   (b) *Vérifier que, pour tous z_1 et z_2 non nuls :*
   $$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Longrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument principal.}$$
   (c) *En déduire, par récurrence sur $n\geq 2$, que :*
   $$\forall(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n,\quad |z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n| \Longrightarrow z_1,\dots,z_n \text{ ont le même argument principal.}$$

Correction :

1. *Soient $(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $z_k=|z_k|e^{i\theta}$. Alors*
$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \left|e^{i\theta}\left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)\right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \text{ car } \left|e^{i\theta}\right|=1.$$
$\boxed{\text{On a donc montré l'implication indirecte}}$.

2. (a) *Inégalité triangulaire généralisée, montrée en cours, par récurrence sur $n\geq 2$.*
   (b) *Soient z_1 et z_2 non nuls tels que $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$. Notons θ_1 l'argument principal de z_1. D'après le cours, le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour $n=2$ précise qu'alors $z_1=0$ ou il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $z_2=\lambda z_1$. Or, $z_1\neq 0$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $z_2=\lambda z_1$. Ainsi, $|z_2|=\lambda|z_1|$ et*
   $$z_2=\lambda z_1=\underbrace{\lambda|z_1|}_{=|z_2|}e^{i\theta_1}.$$
   Donc θ_1 est un argument de z_2, appartenant à $]-\pi,\pi]$ donc l'argument principal de z_2. On a donc montré que $\boxed{z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument principal}}$.

(c) Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$P(n) : \text{« } \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Longrightarrow \text{ tous les } z_k \text{ ont le même argument principal ».}$$

Montrons pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ par récurrence simple.
L'initialisation a été montrée dans la question 2b Montrons l'hérédité.
Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ tel que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \underset{ITG(2a)}{\leq} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \underset{ITG(2a)}{\leq} \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Les deux termes extrêmes étant les mêmes, on en déduit que toutes les inégalités précédentes sont en fait des égalités ! En particulier :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \underset{(*)}{=} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \underset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

- *En notant $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k$, l'égalité (*) est $|Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}|$, donc d'après la question 2b, on sait que $\underline{Z \text{ et } z_{n+1} \text{ ont le même argument principal}}$.*
- *L'égalité (**) assure $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, et donc par hypothèse de récurrence, on a $\underline{z_1, \dots, z_n \text{ ont même argument principal, que l'on notera } \theta \in]-\pi, \pi]}$.*

On conclut si on montre que θ est l'argument principal de Z :
Or,

$$Z = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} |z_k| e^{i\theta} = \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right|}_{=|Z|} e^{i\theta},$$

donc $\underline{\theta \text{ est un argument de } Z \text{ appartenant à }]-\pi, \pi] \text{ donc } \theta \text{ est l'argument principal de } Z}$. Ainsi, $\boxed{z_1, \dots, z_{n+1} \text{ ont tous le même argument principal, d'où } P(n+1)}$.
Par théorème de récurrence, $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout } n \geq 2}$.

Trigonométrie

Exercice 19. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :*

$A = \sin^4(x)$ $B = \cos^4(x)$ $C = \sin^2(x)\cos^3(x)$.

$\boxed{A = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)}$. $\boxed{B = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)}$. $\boxed{C = \frac{1}{16}\left(2\cos(x) - \cos(3x) - \cos(5x)\right)}$.

Pour les deux premières, on utilise les formules d'Euler $\left(\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$ *et du binôme de Newton.*

Pour la troisième, les formules d'Euler donnent : $C = -\dfrac{1}{32}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3$. *Newton puis développement donnent :* $C = -\dfrac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix})\right)$, *ce qui permet de conclure.*

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 20. *Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $e^z = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

Correction : *Notons $a \neq 0$ donc $a = |a|e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^{\mathrm{Re}(z)} = |a| \text{ et } e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^{i\alpha} \\ &\iff \mathrm{Re}(z) = \ln|a| \text{ et } \mathrm{Im}(z) \equiv \alpha\ [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}\ :\ z = \ln|a| + i\alpha + i2k\pi. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \{\ln|a| + i\alpha + i2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

Exercice 21. *Déterminer les racines $4^{\text{ème}}$ de 81 et de $16i$.*

- $\sqrt[4]{81} = 3$. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :*

$$\begin{aligned} z^4 = 81 &\iff \left(\frac{z}{3}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z}{3} \in \{1; i; -i; -1\} \\ &\iff z \in \{3; 3i; -3i; -3\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les racines } 4^{\text{ième}} \text{ de 81 sont } \{3; 3i; -3i; -3\}}$.

- $16i = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$. *D'après le cours, les racines $4^{\text{ième}}$ de $16i$ sont les $\sqrt[4]{16}e^{\left(\frac{i\pi}{8} + \frac{i2k\pi}{4}\right)}$ avec $k \in [\![0, 3]\!]$. Ainsi, l'ensemble des racines $4^{\text{ième}}$ de $16i$ est* $\boxed{\left\{2e^{i\frac{\pi}{8}}; 2e^{i\frac{5\pi}{8}}; 2e^{-i\frac{7\pi}{8}}; 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right\}}$.

Exercice 22. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

1. $e^z = i$
2. $z^2 = 2 - 2i$
3. $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$
4. $z^2+(3+2i)z+5+i=0.$

Correction :

1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :*

$$e^z = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow z - i\frac{\pi}{2} \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k \ ; \ k \in \mathbb{Z}.$$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{ i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}}$.

2. $2-2i = 2^{3/2}e^{-i\pi/4} \in \mathbb{C}^*$ *donc* $2-2i$ *a deux racines carrées distinctes et opposées* $\boxed{S = \{\pm 2^{3/4}e^{-i\pi/8}\}}$

3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i2\pi/3} = j.$
Une racine sixième de j est $z_0 = e^{i\pi/9}$, si bien que

$$\begin{aligned} z^6 = j &\Longleftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_6 = \{e^{i\frac{2k\pi}{6}},\ k \in [\![0,5]\!]\} \\ &\Longleftrightarrow z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{9}} e^{i\frac{k\pi}{3}},\ k \in [\![0,5]\!] \right\} \\ &\Longleftrightarrow z \in \left\{ e^{i\frac{(3k+1)\pi}{9}} \;\middle|\; k \in [\![0,5]\!] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{ e^{i\frac{(3k+1)\pi}{9}} \mid k \in [\![0,5]\!] \right\} = \left\{ e^{i\pi/9}, e^{i4\pi/9}, e^{i7\pi/9}, e^{-i8\pi/9}, e^{-5i\pi/9}, e^{-2i\pi/9} \right\}}$$

4. $\Delta = -15 + 8i = (1+4i)^2$ *donc* $\delta = 1 + 4i$. *Puis :* $\boxed{S = \{z_1 = -2-3i; z_2 = -1+i\}}$.

Exercice 23. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

1. $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$. *(on commencera par chercher une racine imaginaire pure).*

Notons (E) cette équation. Commençons par chercher une solution imaginaire pure : on pose donc $z_0 = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} z_0^3 - (1+2i)z_0^2 + 3(1+i)z_0 - 10(1+i) &= -\alpha^3 i + \alpha^2(1+2i) + 3(1+i)i\alpha - 10(1+i) \\ &= \alpha^2 - 3\alpha - 10 + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10). \end{aligned}$$

Donc

$$z_0 \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } (\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0 \text{ et } -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0).$$

Or, $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = (\alpha+2)(\alpha-5)$. *Donc*

$$z_0 \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } (\alpha \in \{-2, 5\} \text{ et } -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0).$$

Or, $-(-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) - 10 = 0$ *et* $-(5)^3 + 2(5)^2 + 3 \times 5 - 10 = -70$. *Finalement,* z_0 *est solution de* (E) *ssi* $\alpha = -2$, *donc la seule* $\boxed{\text{la solution imaginaire pure de } (E) \text{ est } z_0 = -2i}$.
On en déduit donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)\left(z^2 + az + b\right).$$

Après calculs, on trouve $a = -1-4i$ *et* $b = -5+5i$, *donc*

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)\left(z^2 + (-1-4i)z + (-5+5i)\right).$$

Il nous reste donc à résoudre l'équation

$$z^2 + (-1-4i)z + (-5+5i) = 0.$$

C'est une équation de degré 2 à coefficients complexes. Son discriminant Δ *vaut*

$$\Delta = (-1-4i)^2 - 4(-5+5i) = -15 + 8i + 20 - 20i = 5 - 12i.$$

On cherche maintenant $\delta = x + iy$ *tel que* $\delta^2 = 5 - 12i$.

$$(x+iy)^2 = 5 - 12i \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & 5 \\ xy & = & -6 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{169} = 13 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccll} x^2 & = & 9 & (L_1 + L_3) \\ xy & = & -6 & \\ y^2 & = & 4 & \end{array}\right.$$

On en déduit finalement que les deux racines de $5 - 12i$ *sont* $\underline{3 - 2i \text{ et } -3 + 2i}$. *Les solutions de* $z^2 + (-1-4i)z + (-5+5i) = 0$ *sont donc*

$$z_1 = \frac{1 + 4i - (3-2i)}{2} = -1 + 3i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1 + 4i + (3-2i)}{2} = 2 + i.$$

Enfin, les solutions de l'équation de départ sont $\underline{-2i, -1+3i \text{ et } 2+i}$.

2. $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

   Posons $Z = z^2$.

$$z^4 - 3iz^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow Z^2 - 3iZ + 4 = 0.$$

   $\Delta = -25 = (5i)^2$ *donc* $\delta = 5i$.
   On trouve donc que $Z_1 = -i$ *et* $Z_2 = 4i$ *(Vérif OK avec les relations coef-racines).*
   Ensuite, on résout $z^2 = -i = e^{i3\pi/2}$ *donc* $z = \pm e^{i3\pi/4}$.
   La seconde équation donne : $z^2 = 4i = 4e^{i\pi/2}$ *donc* $z = \pm 2e^{i\pi/4}$. *Finalement,* $\boxed{S = \{\pm e^{i3\pi/4}; \pm 2e^{i\pi/4}\}}$.

3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\iff (-z)^4 + (-z)^3 + (-z)^2 + (-z) + 1 = 0 \\ &\iff \frac{1-(-z)^5}{1+z} = 0 \qquad \text{car } z \neq -1 \\ &\iff (-z)^5 = 1 \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff -z \in \mathbb{U}_5 = \{1; e^{2i\pi/5}; e^{4i\pi/5}; e^{-4i\pi/5}; e^{-2i\pi/5}\} \text{ et } z \neq -1 \\ &\iff z \in \{-1; -e^{2i\pi/5}; -e^{4i\pi/5}; -e^{-4i\pi/5}; -e^{-2i\pi/5}\} \text{ et } z \neq -1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \{-e^{2i\pi/5}; -e^{4i\pi/5}; -e^{-4i\pi/5}; -e^{-2i\pi/5}\} = \{e^{-i\frac{3\pi}{5}}; e^{-i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{3\pi}{5}}\}}$.

4. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

On pourrait développer mais on ne sait pas résoudre une équation de degré 4. L'idée est de mettre l'expression sous la $a^2 - b^2$ *pour le factoriser.*

$$\begin{aligned} (3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 &= (3z^2 + z + 1)^2 - (iz^2 + 2iz + 2i)^2 \\ &= (3z^2 + z + 1 + iz^2 + 2iz + 2i)(3z^2 + z + 1 - iz^2 - 2iz - 2i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) = 0 \text{ ou } (3-i)z^2 + (1-2i)z + (1-2i) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) = 0 \text{ ou } (3+i)\overline{z}^2 + (1+2i)\overline{z} + (1+2i) = 0 \quad \text{en conjuguant le 2e} \\ &\Leftrightarrow P(z) = 0 \text{ ou } P(\overline{z}) = 0 \text{ avec } P(z) = (3+i)z^2 + (1+2i)z + (1+2i) = 0 \end{aligned}$$

P est un polynôme de degré 2. $\Delta_P = -7 - 24i$. On peut chercher δ sous la forme $\delta = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\Delta_p = \delta^2 = (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$. Par unicité de l'écriture algébrique, $ab = -12$ et $a^2 - b^2 = -7$. $a = 3$ et $b = 4$ conviennent. Ainsi, $\Delta_p = \delta^2$ avec $\delta = 3 - 4i$. Puis, les racines de P sont $z_1 = \dfrac{-2+i}{3+i} = \dfrac{-1+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-3i}{3+i} = -i$.

Ainsi, les solutions de l'équation de départ sont $\boxed{S = \left\{i, -i, \frac{-1+i}{2}, \frac{-1-i}{2}\right\}}$.

Exercice 24. Une équation à paramètre de degré 2. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$.*
Résoudre l'équation $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction : *On remarque que $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $1 = e^{i\theta}e^{-i\theta}$, donc d'après les relations coefficients-racines, on sait que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les solutions de cette équation.*
Étudions le cas d'égalité. *On a $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \iff \theta \equiv -\theta\ [2\pi] \iff \theta \equiv 0\ [\pi]$.*
De plus, si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $e^{i\theta} = 1$ et si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $e^{i\theta} = -1$.

Conclusion. *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*

$$\begin{cases} \{1\} & si\ \theta \equiv 0\ [2\pi] \\ \{-1\} & si\ \theta \equiv \pi\ [2\pi] \\ \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\} & si\ \theta \not\equiv 0\ [\pi] \end{cases}.$$

Exercice 25. Polynôme minimal. *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Trouver* $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z^2 + pz + q = 0$.

Correction : *On doit montrer seulement montrer une existence. On va donc faire analyse-synthèse, avec analyse au brouillon.*

Analyse au brouillon. *Les relations coefficients-racines doivent guider notre recherche : on cherche un polynôme* **réel** *de degré 2 dont* z *soit solution. On sait que dans ce cas,* $\overline{z}$ *sera également solution. Comme ces deux nombres sont différents, il s'agira des deux solutions de l'équation* $z^2+pz+q=0$. *Les relations coefficients-racines impliquent donc que* $p = -(z+\overline{z}) = -2\mathrm{Re}z$ *et* $q = z\,\overline{z} = |z|^2$.

Synthèse sur la copie. $\boxed{\text{Posons } p = -(z+\overline{z}) = -2\mathrm{Re}z \text{ et } q = z\,\overline{z} = |z|^2}$, *et montrons que ce couple* (p, q) *convient. On a :*

$$\begin{aligned} z^2 - (2\mathrm{Re}z)z + |z|^2 &= z^2 - (z+\overline{z})\,z + z\,\overline{z} \\ &= z^2 - z^2 - z\,\overline{z} + z\,\overline{z} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{ce couple convient}}$.

Exercice 26. Une équation exponentielle. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $e^{4z} = e^{2z} - 1$.

Correction : *Résolvons* $Z^2 - Z + 1 = 0$. *Il s'agit d'une équation du second degré à coefficient réels, ayant pour discriminant* $-3 < 0$. *Elle a donc 2 solutions complexes conjuguées* $Z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$ *et* $Z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$.
On a aussi, pour $z \in \mathbb{C}$ *:*

$$e^{2z} = e^{-i\pi/3} \iff 2z \in -i\frac{\pi}{3} + i2\pi\mathbb{Z} \iff z \in -i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z}$$

et

$$e^{2z} = e^{i\pi/3} \iff 2z \in \frac{i}{\pi}3 + i2\pi\mathbb{Z} \iff z \in i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z}.$$

Ainsi,
$e^{4z} = e^{2z} - 1 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{2z} = e^{-i\pi/3} \text{ ou } e^{2z} = e^{i\pi/3}) \Leftrightarrow \left(z \in -i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z} \text{ ou } z \in i\frac{\pi}{6} + i\pi\mathbb{Z}\right)$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{-i\frac{\pi}{6} + ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{i\frac{\pi}{6} + i\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 27. *Soient* $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\frac{(1-iz)^n}{(1+iz)^n} = \frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha}$.
Combien y a-t-il de solutions ?

Correction : *Remarquons que* $\frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{-2i\alpha}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{(1-iz)^n}{(1+iz)^n} = \frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = e^{-2i\alpha} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{1-iz}{1+iz} = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{-2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{1-iz}{1+iz} = e^{i\theta_k} \text{ avec } \theta_k = \frac{-2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], 1 - iz = e^{i\theta_k} + ie^{i\theta_k} z \text{ car } 2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], 1 - e^{i\theta_k} = iz(1 + e^{i\theta_k}) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], iz = \frac{1 - e^{i\theta_k}}{1 + e^{i\theta_k}} \text{ car } 0 \neq 2 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], iz = \frac{e^{\frac{i\theta_k}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta_k}{2}} - e^{\frac{i\theta_k}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta_k}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta_k}{2}} + e^{\frac{i\theta_k}{2}}\right)} = \frac{-2i\sin\frac{\theta_k}{2}}{2\cos\frac{\theta_k}{2}} = -i\tan\frac{\theta_k}{2} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = -\tan\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\tan\left(\frac{\alpha - k\pi}{n}\right) \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$.
N.B. : cet ensemble contient exactement n *termes car ils sont tous distincts. En effet, on peut remarquer que* $\frac{\alpha - k\pi}{n}$ *décrit* n *valeurs distinctes dans un intervalle de longueur strictement inférieure à* π, *donc par* π*-périodicité et stricte croissance de* $\tan$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *les images de ces valeurs par l'application tangente sont toutes distinctes.*
Sinon, on a les équivalences classiques pour $(k, \ell) \in [\![0, n-1]\!]^2$:

$$\tan\left(\frac{\alpha - k\pi}{n}\right) = \tan\left(\frac{\alpha - \ell\pi}{n}\right) \Longleftrightarrow \frac{\alpha - k\pi}{n} \equiv \frac{\alpha - \ell\pi}{n} \, [\pi] \Longleftrightarrow \frac{(k-\ell)\pi}{n} \in \pi\mathbb{Z} \Longleftrightarrow k - \ell \in n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow k - \ell = 0,$$

car $-n < -(n-1) \leq k - \ell \leq n - 1 < n$, *et le seul multiple de* n *dans* $]-n, n[$ *est 0.*

Exercice 28. Équation $z^n = w^m$. *Trouver $n, m \in \mathbb{N}^*$ minimaux tels que $(1+i\sqrt{3})^m = (1-i)^n$.*

Correction : *Tout d'abord, on a $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.*
Si (n,m) est solution de l'équation, la considération des modules donne $2^m = \sqrt{2}^n$, donc $n = 2m$.
Ensuite, si $n = 2m$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
(1+i\sqrt{3})^m = (1-i)^n &\iff 2^m e^{im\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}^{2m} e^{-im\frac{\pi}{2}} \\
&\iff e^{im\frac{\pi}{3}} = e^{-im\frac{\pi}{2}} \\
&\iff m\frac{\pi}{3} \equiv -m\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
&\iff \frac{5\pi m}{6} \in 2\pi\mathbb{Z} \\
&\iff 5m \in 12\mathbb{Z} \\
&\iff 12|5m \\
&\iff 12|m \qquad\qquad \text{car } 12 \wedge 5 = 1\ .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la solution minimale est } m = 12 \text{ et } n = 2m = 24}$.

Exercice 29. Racines de même module. *Soit $(p,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On suppose que les deux racines de $X^2 - pX + q^2$ ont le même module.*
Exprimer le quotient $\frac{p^2}{q^2}$ en fonction des deux racines, et en déduire que $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$.

Correction : *Notons z_1 et z_2 les deux racines de $X^2 - pX + q^2$ (ou, éventuellement, la racine double comptée deux fois). D'après les relations coefficients-racines, on a*

$$p = z_1 + z_2 \qquad \text{et} \qquad q^2 = z_1 z_2.$$

En particulier, l'hypothèse $q \neq 0$ entraîne $z_1, z_2 \neq 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{q^2} &= \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \\
&= \frac{z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{z_1 z_2} \\
&= \frac{z_1}{z_2} + 2 + \frac{z_2}{z_1} \\
&= u + \frac{1}{u} + 2,
\end{aligned}$$

où l'on a noté $u = \frac{z_1}{z_2}$.
Comme $|z_1| = |z_2|$, on a $u \in \mathbb{U}$. On en déduit que $\frac{1}{u} = \overline{u}$ et on obtient la nouvelle expression

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{q^2} &= u + \overline{u} + 2 \\
&= 2\mathrm{Re}(u) + 2.
\end{aligned}$$

Cela montre que $\dfrac{p^2}{q^2} \in \mathbb{R}$ *et même, comme* $\mathrm{Re}(u) \in [-1, 1]$ *(car on a* $|\mathrm{Re}(u)| \leq |u| = 1$*) , que* $\dfrac{p^2}{q^2} \in [0, 4]$.
On en déduit que $\dfrac{p}{q}$ *est un nombre réel, et même que*

$$\boxed{\frac{p}{q} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{q^2}} \in [-2, 2]}.$$

Exercice 30. Application de degré 2. *Montrer l'égalité* $\left\{z \in \mathbb{C}^* \mid z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

Correction : *Notons* $J = \left\{z \in \mathbb{C}^* \mid z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\}$ *et montrons* $J = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$ *par double inclusion.*

Sens direct. *Soit* $z \in J$. *On note* $r = z + \dfrac{1}{z}$, *de telle sorte que* $r \in \mathbb{R}$.

En multipliant par z, *on obtient* $z^2 + 1 = rz$, *c'est-à-dire que* z *est solution de l'équation du second degré à coefficients réels (d'inconnue* x*)*

$$x^2 - rx + 1 = 0. \tag{✠}$$

Le discriminant de (✠) est $\Delta = r^2 - 4$. *On distingue alors deux cas.*

- *Si* $\Delta \geq 0$, *(✠) a deux solutions réelles (ou une solution réelle double). Le produit de ces deux solutions (ou le carré de la solution double) valant* 1, *lesdites solutions sont non nulles.*
  Puisque z *est l'une d'entre elles, on a* $\underline{z \in \mathbb{R}^*}$.
- *Si* $\Delta < 0$, *(✠) a deux solutions complexes non réelles, et on sait qu'elles sont conjuguées. Notons* α *l'une des deux (de telle sorte que l'autre est* $\overline{\alpha}$*).*
  Le produit des deux solutions vaut alors $1 = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$. *Cela prouve que* $\underline{\alpha \in \mathbb{U}}$.
  Que l'on ait $z = \alpha$ *ou* $z = \overline{\alpha}$, *on en déduit dans tous les cas* $z \in \mathbb{U}$.

Cela montre l'inclusion $\boxed{J \subset \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*}$.

Sens réciproque. *Réciproquement, soit* $z \in \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$. *On distingue alors deux cas.*

- *Si* $z \in \mathbb{U}$, *on a évidemment* $z \in \mathbb{C}^*$ *et d'autre part* $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, *donc*

$$z + \frac{1}{z} = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re} z \in \mathbb{R}.$$

- *Si* $z \in \mathbb{R}^*$, *on a (encore plus évidemment)* $z \in \mathbb{R}^*$ *et* $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, on a donc montré $z \in J$, *ce qui montre l'inclusion réciproque* $\boxed{\mathbb{U} \cup \mathbb{R}^* \subset J}$, *et clôt la démonstration.*

Nombres complexes et géométrie

Exercice 31. Orthocentre. *Soient A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique, d'affixes respectives a, b et c.*
Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours des hauteurs.

Il s'agit de démontrer que $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ (les deux autres relations d'orthogonalité obtenues par permutations circulaires s'en déduisant par symétrie). On a :

$$\vec{AH} \perp \vec{BC} \Longleftrightarrow \frac{h-a}{c-b} \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{c+b}{c-b} \in i\mathbb{R}.$$

On a, puisque b et c appartiennent à $\mathbb{U}$:

$$\overline{\left(\frac{c+b}{c-b}\right)} = \frac{\bar{c}+\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}} = \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = \frac{b+c}{b-c} = -\frac{c+b}{c-b},$$

Ainsi on a bien $\dfrac{c+b}{c-b} \in i\mathbb{R}$, donc d'après les équivalences précédentes : $\boxed{\vec{AH} \perp \vec{BC}}$.

Exercice 32. *1. Déterminer les complexes $z \neq 0$ tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module et les représenter géométriquement.*

2. Déterminer les complexes z tels que $(z - i)(\overline{z} - 1) \in \mathbb{R}$ et les représenter géométriquement.

3. Déterminer les complexes z tels que $(z - i)(\overline{z} - 1) \in i\mathbb{R}$ et les représenter géométriquement.

Correction :

1. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :*

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z| \Leftrightarrow \left(|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \text{ et } |z| = |1-z|\right) \Longleftrightarrow \left(|z|^2 = 1 \text{ et } |z|^2 = |1-z|^2\right).$$

Or, $|1 - z|^2 = (1 - z)(1 - \overline{z}) = 1 - (z + \overline{z}) + |z|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}(z) + |z|^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z| &\Longleftrightarrow \left(|z|^2 = 1 \text{ et } \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les complexes } z \text{ qui vérifient } |z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z| \text{ sont } e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

2. *On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z-i)(\overline{z}-1) \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a*

$$\begin{aligned}(z-i)(\overline{z}-1) \in \mathbb{R} &\iff (z-i)(\overline{z}-1) = \overline{(z-i)(\overline{z}-1)}\\ &\iff (z-i)(\overline{z}-1) = (\overline{z}+i)(z-1)\\ &\iff z\overline{z} - z - i\overline{z} + i = \overline{z}z - \overline{z} + iz - i\\ &\iff \overline{z} - z - i(\overline{z}+z) + 2i = 0\\ &\iff -2i\mathrm{Im}(z) - 2i\mathrm{Re}(z) + 2i = 0\\ &\iff -\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + 1 = 0.\end{aligned}$$

En posant $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve donc

$$(z-i)(\overline{z}-1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -y-x+1 = 0 \Leftrightarrow y = -x+1.$$

Finalement, les complexes vérifiant $(z-i)(\overline{z}-1) \in \mathbb{R}$ sont les complexes dont les points images sont situés sur la droite d'équation $y = -x+1$.

3. *On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z-i)(\overline{z}-1) \in i\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a*

$$\begin{aligned}(z-i)(\overline{z}-1) \in i\mathbb{R} &\iff (z-i)(\overline{z}-1) = -\overline{(z-i)(\overline{z}-1)}\\ &\iff (z-i)(\overline{z}-1) = -(\overline{z}+i)(z-1)\\ &\iff z\overline{z} - z - i\overline{z} + i = -\overline{z}z + \overline{z} - iz + i\\ &\iff 2z\overline{z} - (z+\overline{z}) + i(z-\overline{z}) = 0\\ &\iff 2|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0\\ &\iff |z|^2 - \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

En posant $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve donc

$$(z-i)(\overline{z}-1) \in i\mathbb{R} \iff x^2+y^2-x-y = 0.$$

Or,

$$x^2+y^2-x-y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Finalement,

$$(z-i)(\overline{z}-1) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = r^2.$$

Ainsi, les complexes vérifiant $(z-i)(\overline{z}-1) \in i\mathbb{R}$ sont les affixes des points du cercle, de centre Ω d'affixe $\frac{1+i}{2}$, et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

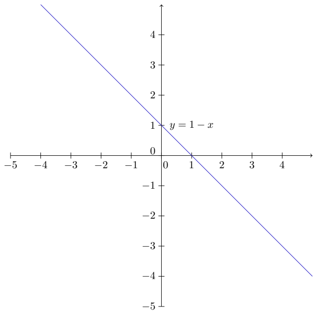

FIGURE 1 – Question 2

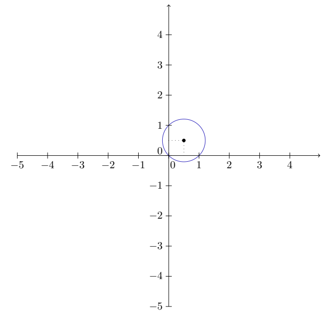

FIGURE 2 – Question 3

Exercice 33.

1. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et N d'affixe iz.*

   - *Si $z = 0$ alors $M = N$*
   - *Si $z = 1$ alors I et N sont confondus et les 3 points sont alignés.*
   - *Si $z = i$, alors I et M sont confondus et les 3 points sont alignés.*
   - *Supposons maintenant que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$. Alors les trois points sont distincts, et d'après le cours :*

   $$I, M, N \text{ sont alignés ssi } \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{IM} \text{ ssi } \frac{z_N - z_I}{z_M - z_I} \in \mathbb{R} \text{ ssi } Z := \frac{iz - i}{z - i} \in \mathbb{R}$$
   $$\text{ssi } \operatorname{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \text{ ssi } \overline{Z} = Z.$$

   Notons $z = x + iy$. Alors, $\dfrac{iz - i}{z - i} = \dfrac{(-y + i(x-1))(x - i(y-1))}{x^2 + (y-1)^2}$ donc

   $$\operatorname{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \iff x(x-1) + y(y-1) = 0 \iff x^2 - x + y^2 - y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

   Ainsi, $\boxed{I, M, N \text{ sont alignés ssi } M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$*, où* $\underline{\Omega \text{ est de point du plan complexe d'affixe } \omega = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}}$.

2. *Déterminer de plus le lieu des points N correspondants.*

Soit M un point du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Première méthode : *N a pour affixe $iz = e^{i\pi/2}z$ donc N est l'image de M par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On conjecture que l'image d'un cercle par une rotation est un cercle, de même rayon, avec un nouveau centre à déterminer.*
En effet, on a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C}(\Omega, \frac{1}{\sqrt{2}}) &\iff \Omega M = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff |z-\omega| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff |iz - i\omega| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff N\Omega' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ où } \Omega' \text{ est le point du plan d'affixe } \omega' = i\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \\
&\iff N \in \mathscr{C}(\Omega', \frac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc les points } N \text{ se trouvent sur le cercle de centre } \Omega' \text{ (d'affixe } \omega' = i\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\text{) et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Deuxième méthode : *Si $z = x+iy$, N a pour affixe $iz = -y + xi$. Posons $x_N = -y$ la partie réelle de iz et $y_N = x$ la partie imaginaire de iz.*
D'après la question 1,

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\
\left(y_N - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-x_N - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\
\left(x_N + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_N - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

donc $\boxed{N \text{ est sur le cercle de centre } \Omega' \text{ d'affixe } -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 34. *Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.*

1. *Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = j$ et que $-e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2$.*
2. *En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.*

Correction :

1.
   - $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3} = j.$
   - $-e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i4\pi/3} = (e^{i2\pi/3})^2 = j^2.$

2.

$$\text{Le triangle } ABC \text{ est équilatéral} \iff A \text{ est l'image de } C \text{ par la rotation de centre } B \text{ et d'angle } \pm\frac{\pi}{3}$$
$$\iff a - b = e^{i\pi/3}(c-b) \text{ ou } a - b = e^{-i\pi/3}(c-b).$$

D'une part, $a - b = e^{i\pi/3}(c-b) \iff a + (e^{i\pi/3} - 1)b - e^{i\pi/3}c = 0 \iff a + bj + cj^2 = 0.$
D'autre part, $a - b = e^{-i\pi/3}(c-b) \iff a + (e^{-i\pi/3} - 1)b - e^{-i\pi/3}c = 0 \iff a + b\overline{j} + c\overline{j^2} = 0 \iff a + bj^2 + cj = 0$, *car* $j^2 = \overline{j}$.
Ainsi, $\boxed{ABC \text{ est équilatéral si et seulement si } a + bj + cj^2 = 0 \text{ ou } a + bj^2 + cj = 0}$.