Exercice 1. Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{8}$. *Exprimer* $\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}$ *à l'aide de radicaux.*

Correction. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ *donc* $\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ *donc* $\cos\frac{\pi}{8} = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

De même, $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ *donc* $\sin^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ *donc* $\sin\frac{\pi}{8} = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ *et* $\sin\frac{\pi}{8} > 0$*, on en conclut que :*

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

Exercice 2. *Résoudre dans* $[-\pi, \pi]$ *l'équation* $\tan x = -1$.

Correction. *Soit* $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$*. On a :* $\tan x = -1 \iff \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \iff x = -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Ainsi, les ensembles solutions dans $[-\pi, \pi]$ *est* $\boxed{\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}}$.

Exercice 3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Première méthode. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. Puisque* $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$*, on a*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos(2x) = 0 \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Deuxième méthode. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a :*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left\{\begin{array}{c} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \\ \textit{ou} \\ \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \ \textit{ou}\ x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ \textit{ou} \\ x \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \ \textit{ou}\ x \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi] \end{array}\right. \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Dans les deux cas, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 4. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos(2x)+\cos(12x)=\sqrt{3}\cos(5x)$.

Correction. *Notons* $\mathscr{S}=\{x\in\mathbb{R} \mid \cos(2x)+\cos(12x)=\sqrt{3}\cos(5x)\}$. *D'après les formules de factorisation,* $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ *donc* $\cos(2x)+\cos(12x)=2\cos(7x)\cos(5x)$. *Ainsi,*

$$x\in\mathscr{S}\iff 2\cos(7x)\cos(5x)=\sqrt{3}\cos(5x)\iff\cos(5x)\left(2\cos(7x)-\sqrt{3}\right)=0\iff\left(\cos(5x)=0 \text{ ou } \cos(7x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- *D'une part :* $\cos(5x)=0\iff 5x\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\iff x\equiv\dfrac{\pi}{10}\ \left[\dfrac{\pi}{5}\right]$.
- *D'autre part :* $\cos(7x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\iff 7x\equiv\pm\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]\iff x\equiv\pm\dfrac{\pi}{42}\ \left[\dfrac{2\pi}{7}\right]$.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\pm\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{2k\pi}{7}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

Exercice 5. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

1. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\dfrac{1}{2}$
2. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}$
3. $\cos(x)-\cos(3x)+\cos(5x)=0.$

Pour la 3. on pourra commencer par factoriser $\cos(x)+\cos(5x)$.

Correction.

1. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\dfrac{1}{2}\iff\cos(2x)=\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\iff 2x\equiv\pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\iff x\equiv\pm\dfrac{\pi}{6}[\pi]$.

   Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2. $$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}&\iff\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff\frac{\pi}{6}+x\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\ \text{ ou }\ \frac{\pi}{6}+x\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]\\ &\iff x\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]\ \text{ ou }\ x\equiv-\frac{5\pi}{12}[2\pi]\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

3. $\cos p+\cos q=2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ *donc* $\cos x+\cos(5x)=2\cos(2x)\cos(3x)$.

Puis, $\cos(x) - \cos(3x) + \cos(5x) = 2\cos(2x)\cos(3x) - \cos(3x) = \cos(3x)(2\cos(2x) - 1)$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(3x) + \cos(5x) = 0 &\iff \cos(3x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = \frac{1}{2}\\ &\iff 3x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ d'après la question 1.}\\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6}[\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]\\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ en faisant un dessin ou avec } (\star)\end{aligned}$$

$(\star)$ *: détaillons.*

Si $x \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$ *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \underbrace{(3k)}_{\in \mathbb{Z}}\frac{\pi}{3}$ *donc* $x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right]$.

De même, si $x \equiv -\frac{\pi}{6}[\pi]$ *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi == \frac{\pi}{6} + \underbrace{(3k-1)}_{\in \mathbb{Z}}\frac{\pi}{3}$

donc $x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right]$.

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 6. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$.

Correction. *On sait que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors,*

$$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \iff \cos\theta = 1 \text{ ou } \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Exercice 7. *Résoudre dans* $[0, 2\pi]$ *les inéquations suivantes*

1. $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$
2. $|\tan x| \geq 1$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0.$

Correction.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $|\sin x| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ *donc, grâce au cercle trigonométrique, on obtient*

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}.$$

2. *Soit* $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
   Méthode 1. *On a :* $|\tan x| \geq 1 \Longleftrightarrow \tan x \geq 1$ *ou* $\tan x \leq -1$*, donc d'après le cercle trigonométrique et l'ensemble de définition de* $\tan$*, on a :*

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]}.$$

   Méthode 2. *On a :*

$$x \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \sin^2 x \geq \cos^2 x \Longleftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \leq 0 \Longleftrightarrow \cos(2x) \leq 0 \Longleftrightarrow 2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$$

   (car $2x \in [0, 4\pi]$*). Même conclusion.*

3. **Méthode 1.** *Soit* $x \in [0, 2\pi]$*. Alors* $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$*. On résout donc* $\cos t \geq 0$ *pour* $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$*, ce qui donne* $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$*, et donc* $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$*. Ainsi,* $\boxed{\mathscr{S} = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$.
   Méthode 2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. D'après le cercle trigonométrique, on a :*

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions sur } [0, 2\pi] \text{ de } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \text{ est } \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$.

Exercice 8. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\sin x > \sin(2x)$*.*

Correction. *Cette inéquation est définie sur* $\mathbb{R}$ *et* 2π*-périodique. Soit* $x \in [0, 2\pi]$*. On a :*

$$\begin{aligned}
\sin x > \sin(2x) &\Longleftrightarrow \sin x > 2\sin(x)\cos x \\
&\Longleftrightarrow \sin x(1 - 2\cos x) > 0 \\
&\Longleftrightarrow (\sin x > 0 \text{ et } 1 - 2\cos x > 0) \text{ ou } (\sin x < 0 \text{ et } 1 - 2\cos x < 0) \\
&\Longleftrightarrow \left(\sin x > 0 \text{ et } \cos x < \frac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(\sin x < 0 \text{ et } \cos x > \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

D'après le cercle trigonométrique, on a :

$$\left(\sin x > 0 \text{ et } \cos x < \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$$

et

$$\left(\sin x < 0 \text{ et } \cos x > \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow x \in \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[.$$

Ainsi, $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions de } \sin x > \sin(2x) \textit{ est } \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \pi+2k\pi\right[\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi, 2k\pi\right[\right)}$.

Exercice 9. 1. *Soient deux réels p et q tels que $\cos p \neq 0$ et $\cos q \neq 0$.*
Démontrer que $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$.

2. *Résoudre dans* $]-\pi, \pi]$ *l'inéquation* $\tan x > \tan(3x)$.

Correction.

1. *On écrit la définition de* $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ *et on réduit au même dénominateur.*
2. *L'inéquation est définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\cos x \neq 0$ *et* $\cos(3x) \neq 0$, *et on remarque qu'elle est* π*-périodique. Fixons donc* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $x \neq \pm\dfrac{\pi}{6}$.
D'après la question 1., on a :

$$\tan x > \tan(3x) \iff \tan x - \tan(3x) > 0 \iff \tan x + \tan(-3x) > 0 \iff \frac{\sin(-2x)}{\cos x \cos(3x)} > 0$$
$$\iff \frac{2\sin x \cos x}{\cos x \cos(3x)} < 0 \iff \frac{\sin x}{\cos(3x)} < 0.$$

Un tableau de signes donne :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$\cos(3x)$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$\frac{\sin(x)}{\cos(3x)}$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$

Donc l'ensemble des solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *est* $\left]-\dfrac{\pi}{6}, 0\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, *puis par* π*-périodicité, l'ensemble des solutions sur* $]-\pi, \pi]$ *est*

$$\boxed{\left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[}.$$