Matrices et applications linéaires

Exercice 1. Calcul matriciel d'un antécédent. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.*
2. *Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$.*
   Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Correction.

1. *La matrice A est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible.*
   On peut l'inverser par la méthode des bimatrices :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad [L_2 \leftarrow L_1 - L_2]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{bmatrix}$$

   donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. *On calcule :* $\Delta(1) = 1$, $\Delta(X) = 1+X$ *et* $\Delta(X^2) = 2X+X^2$, *donc* $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A}$.

   D'après 1., A est inversible donc, par théorème, $\boxed{\Delta \text{ est un automorphisme}}$, *et sa bijection réciproque vérifie* $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *En particulier, l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$ a une unique solution (car Δ est bijective), à savoir le polynôme $\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2)$, dont la matrice dans la base canonique est*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}(1+X+2X^2)\right) &= \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}\right) \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(1+X+2X^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\Delta^{-1}\left(1+X+2X^2\right)=4-3X+2X^2}.$$

Alternative. *Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :*

$$\begin{aligned}
\Delta(P)=1+X+2X^2 &\iff \underbrace{\mathrm{Mat}_{(1+X+2X^2)}(\Delta)}_{=A}\times \mathrm{Mat}_{(1+X+2X^2)}(P)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\\
&\iff \mathrm{Mat}_{(1+X+2X^2)}(P)=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\\
&\iff P=4-3X+2X^2
\end{aligned}$$

Exercice 2. Puissances d'un endomorphisme. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f:(x,y,z)\mapsto(x-z,y,y)$.*

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.*
2. *Calculer A^2, A^3 et A^4. Conjecturer A^n, puis la démontrer, par récurrence.*
3. *En déduire l'expression de f^n.*

Correction.

1. $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}}$.
2. *On vérifie par récurrence que* $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix}1&-(n-1)&-1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}}$. *De plus, $A^0=I_3$ et A n'est pas inversible (sa troisième colonne est proportionnelle à la première, mais ses deux premières colonnes forment une famille libre, donc $\mathrm{rg}(A)=2\neq 3$) donc on ne parlera pas de puissances négatives de A.*
3. *On en déduit que* $\boxed{\text{pour } n\in\mathbb{N}^*,\ f^n:(x,y,z)\mapsto(x-(n-1)y-z,y,y)}$.

Exercice 3. Noyau, image et matrice de la composée. *On considère les deux applications linéaires f et g définies par*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P'(0), P'(1)) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z+t, x-t) \end{array}.$$

1. *Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^4$ et la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$. On les notera respectivement A et B.*
2. *En déduire* $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$.
3. *Déterminer la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.*

Correction.

1. *Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathscr{B}_2 = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors :*

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4,\mathscr{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

2.
   - *Soit* $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. *On a :* $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff a = b = c = 0$,

     donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}}$ *donc f est injective.*
   - *On sait que* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3)$. *Par ailleurs, d'après le théorème du rang,* $\mathrm{rg}(f) = 3$. *On en déduit donc que* (C_1, C_2, C_3) *est libre. Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,0,2))}$.
   - *Soit* $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. *On a :*

     $$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(g) \iff t = x \text{ et } z = -2x - y.$$

     Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\,((1,0,-2,1),(0,1,-1,0))}$ *(famille libre donc* $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$.
   - *D'après le théorème du rang, et la question précédente, on sait que* $\mathrm{rg}(g) = 2$. *De plus,* $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}^2$ *donc* $\boxed{\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2}$. *Ainsi, g est surjective.*

3. $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4,\mathscr{B}_2}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$.

Exercice 4. Matrices d'applications linéaires. *Montrer que les applications linéaires suivantes sont bien définies et déterminer leurs matrices dans les bases canoniques.*

1. $\begin{array}{ccl} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_5[X] \\ P & \mapsto & 2X^3P' + P'(X^2) - P(1) \end{array}$;
2. $\begin{array}{ccl} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \mapsto & (P(-1), P'(0) + P''(1)) \end{array}$;
3. $\begin{array}{ccl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$;
4. $\begin{array}{ccl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & 2P + (X-1)P'. \end{array}$

Correction. *À chaque fois, on notera f l'application de l'énoncé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\mathscr{C}_n = (1, X, \ldots, X^n)$$

la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. On notera par ailleurs

$$\mathfrak{can}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

À chaque fois que le codomaine est un espace vectoriel de polynômes (c'est-à-dire dans toutes les questions sauf la deuxième), si l'on note $\mathbb{K}_p[X]$ et $\mathbb{K}_q[X]$ les domaine et codomaine de f, il est au moins clair que la formule donnant f définit une application linéaire $\widetilde{f} : \mathbb{K}_p[X] \to \mathbb{K}[X]$. L'enjeu est de montrer que le codomaine $\mathbb{K}_q[X]$ est adapté, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{K}_p[X],\ \deg \widetilde{f}(P) \leq q$.

Par linéarité, il suffit de le vérifier pour des polynômes P décrivant la base canonique de E (ce qui est de toute façon un calcul à faire pour calculer la matrice de f).

En effet, si $\widetilde{f}(1), \ldots, \widetilde{f}(X^p) \in \mathbb{K}_q[X]$ et que $P \in \mathbb{K}_p[X]$, on peut écrire P en fonction de ses coefficients : $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, et on obtient par linéarité de $\widetilde{f}$

$$\widetilde{f}(P) = \sum_{i=0}^{p} a_i \underbrace{\widetilde{f}(X^i)}_{\in \mathbb{K}_q[X]},$$

ce qui entraîne $\widetilde{f}(P) \in \mathbb{K}_q[X]$ par stabilité par combinaison linéaire.

(On redonne cet argument à la première question, mais on l'omet dans les suivantes.)

1. *L'application*

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccl} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & 2X^3P' + P'(X^2) - P(1) \end{array}$$

est bien définie (puisqu'on a étendu le codomaine), et on vérifie facilement qu'elle est linéaire (il s'agit d'une conséquence directe de linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de la composition à droite $R \mapsto R(X^2) = R \circ X^2$).

On a

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(1) &= -1 \in \mathbb{K}_5[X]\\ \widetilde{f}(X) &= 2X^3 + 1 - 1\\ &= 2X^3 \in \mathbb{K}_5[X]\\ \widetilde{f}(X^2) &= 4X^4 + 2X^2 - 1 \in \mathbb{K}_5[X]\\ \widetilde{f}(X^3) &= 6X^5 + 3X^4 - 1 \in \mathbb{K}_5[X].\end{aligned}$$

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit

$$\forall P \in \underbrace{\operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^3\right)}_{=\mathbb{K}_3[X]}, \quad \widetilde{f}(P) \in \underbrace{\operatorname{Vect}\left(\widetilde{f}(1), \widetilde{f}(X), \widetilde{f}(X^2), \widetilde{f}(X^3)\right)}_{\subset \mathbb{K}_5[X]},$$

ce qui assure que f est bien définie.

En outre,

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_5}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{6,4}(\mathbb{K})}.$$

2. *Ici, la bonne définition de f est claire, et sa linéarité se vérifie directement (conséquence de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation).*

   On a, après calcul

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(X) = \begin{pmatrix} -1\\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(X^2) = \begin{pmatrix} 1\\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(X^3) = \begin{pmatrix} -1\\ 6 \end{pmatrix},$$

   donc

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_3,\mathfrak{can}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{K})}.$$

3. *On reprend la discussion comme à la première question, en notant provisoirement*

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}[X]\\ P & \mapsto & XP', \end{array}$$

   évidemment bien définie, et dont on vérifie la linéarité facilement (par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit).

   On a alors $\widetilde{f}(1) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{f}(X^k) = X \times \left(kX^{k-1}\right) = kX^k.$$

En particulier, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\widetilde{f}(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. *Cela montre que* f *est un endomorphisme bien défini et l'on a*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_n}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(0,1,2,3,\ldots,n) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})}.$$

4. *On procède comme à la question précédente. On note provisoirement*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & P & \mapsto & 2P + (X-1)P', \end{array}$$

évidemment bien définie, et dont on vérifie la linéarité facilement (par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit).

On a alors $\widetilde{f}(1) = 2$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & (X^k)' = kX^{k-1} \\ \text{donc} \quad & (X-1)(X^k)' = kX^k - kX^{k-1} \\ \text{donc} \quad & \widetilde{f}(X^k) = (k+2)X^k - kX^{k-1}. \end{aligned}$$

En particulier, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\widetilde{f}(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. *Cela montre que* f *est un endomorphisme bien défini et l'on a*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_n}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})}.$$

Exercice 5. Matrices d'endomorphismes, noyau, image.

1. *Montrer que* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ & P & \mapsto & X^2P'' + 2XP' \end{array}$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}_3[X]$.
   Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$ *et en déduire* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.

2. *L'application* $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ & P & \mapsto & (X^2-1)P' - (2X+1)P \end{array}$ *est-elle un automorphisme ?*

Correction.

1. *Il est clair que l'application* $P \mapsto X^2P'' + 2XP'$ *(vue par exemple comme application de* $\mathbb{K}[X]$ *dans*

lui-même) est linéaire (par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit).
Calculons $X^2P'' + 2XP'$, *pour* $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$.

- *Si* $P = 1$, $P' = P'' = 0$, *et* $X^2P'' + 2XP' = 0$.
- *Si* $P = X$, $P' = 1$, $P'' = 0$, *et* $X^2P'' + 2XP' = 2X$.
- *Si* $P = X^2$, $P' = 2X$, $P'' = 2$, *et* $X^2P'' + 2XP' = 6X^2$.
- *Si* $P = X^3$, $P' = 3X^2$, $P'' = 6X$, *et* $X^2P'' + 2XP' = 12X^3$.

Comme tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{K}_3[X]$, *cela montre, par stabilité par combinaison linéaire, que* $\underline{\forall P \in \mathbb{K}_3[X],\ X^2P'' + 2XP' \in \mathbb{K}_3[X]}$, *c'est-à-dire que l'application* f *de l'énoncé est bien définie.*
Par la linéarité déjà remarquée, cela montre que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}_3[X]}$.
Par ailleurs, les calculs que l'on vient d'effectuer permettent de donner sa matrice dans la base canonique $\mathscr{C}_3$ *de* $\mathbb{K}_3[X]$:

$$\boxed{A := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(0, 2, 6, 12)}.$$

Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^4$. *On déduit de la matrice précédente (sans aucun calcul) que* $\mathrm{rg}(f) = 3$,

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}\,(2e_2, 6e_3, 12e_4) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)$$

(pour le noyau, on a clairement $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}A$ *donc* $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1) \subset \mathrm{Ker}A$ *et l'égalité des dimensions grâce au théorème du rang, d'où l'égalité).*
On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Im}f = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) \in \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\} = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, X^3\right)}$$

et

$$\boxed{\mathrm{Ker}f = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) \in \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)\} = \mathrm{Vect}\,(1) = \mathbb{K}_0[X]}.$$

2. *Le même raisonnement qu'à la question précédente, joint aux calculs :*

- *si* $P = 1$, $(X^2 - 1)P' - (2X + 1)P = -2X - 1$;
- *si* $P = X$, $(X^2 - 1)P' - (2X + 1)P = (X^2 - 1) - (2X + 1)X = -X^2 - X - 1$;
- *si* $P = X^2$, $(X^2 - 1)P' - (2X + 1)P = (X^2 - 1) \times (2X) - (2X + 1)X^2 = -X^2 - 2X$

montre que g *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}_2[X]$ *bien défini et que*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

L'endomorphisme g est donc un automorphisme si et seulement si cette matrice est inversible, ce que l'on peut tester par échelonnement.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} && \left[L_1 \leftarrow -L_1\right] \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} && \left[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\right] \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} && \left[L_3 \leftarrow L_2 + L_3\right].
\end{aligned}$$

La matrice finale est de rang 3 (égal à sa taille) donc elle est inversible. Il en va donc de même de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(g)$*, et* $\boxed{g \text{ est donc un automorphisme}}$.

Exercice 6. Un nilpotent chez les polynômes. *Soit* $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. *Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image de M, ainsi qu'une base du noyau.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.*
3. *Soit $f : P \longmapsto -3XP(X) + X^2P'(X)$.*
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
   Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image et du noyau de f.

Correction.

1. *On a*

$$\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{C_1, C_2, C_3}_{\textit{famille libre}}\Big) \qquad \textit{donc } \boxed{\mathrm{rg}(M) = 3}.$$

   D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}M = 1$.

   De plus, le quatrième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *est un vecteur non nul de la droite vectorielle* $\mathrm{Ker}M$, *donc une base de* $\mathrm{Ker}M$.

2. *On a*

$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $n \geq 4$, on a $M^n = M^{n-4} \times M^4 = M^{n-4} \times 0 = 0$.

3. • *Linéarité : à vous.*

   • *Montrons que l'image de f est incluse dans $\mathbb{K}_3[X]$.*

   Fixons $P \in \mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire $\deg P \leq 3$ et examinons le degré de $f(P)$.

   Il est clair que $\deg f(P) \leq 4$.

   Reste à vérifier que le terme en X^4 de $f(P)$ est nul.

   En notant a le coefficient en X^3 de P, le terme en X^4 de $f(P) = -3XP(X) + X^2P'(X)$ vaut

   $$-3X \times (aX^3) + X^2 \times (3aX^2)$$

   donc est nul.

   • ***Matrice dans la base canonique.*** *On a*

   $$\begin{cases} f(1) &= -3X \\ f(X) &= -2X^2 \\ f(X^2) &= -X^3 \\ f(X^3) &= 0 \end{cases} \qquad d'où \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = M.$$

   • *D'après la question 1., une base de $\mathrm{Im}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(f)\Big)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$*

   donc $\boxed{\textit{une base de } \mathrm{Im} f \textit{ est la famille } (-3X, -2X^2, -X^3)}$.

   Remarque : *cela concorde avec le fait que*

   $$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\right) = \mathrm{Vect}\left(-3X, -2X^2, -X^3\right).$$

   • *Une base de $\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(f)\Big)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ donc* $\boxed{\textit{une base de } \mathrm{Ker} f \textit{ est la famille } (X^3)}$.

Des précisions pour ceux qui veulent. *Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$ que l'on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a les équivalences suivantes :*

$$P \in \mathrm{Ker} f \iff \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker} M = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \iff P \in \mathrm{Vect}\left(X^3\right).$$

Exercice 7. Multiplication à gauche par une matrice. *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M \end{array}$ dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Généraliser.*

Correction. *On a* $\boxed{\mathrm{Mat}_{(E_{1,1},E_{2,1},E_{1,2},E_{2,2})}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}}$.

De même, on vérifie que si $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est la base canonique « ordonnée par colonnes » et que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'application $\psi : M \mapsto AM$ est une matrice $n^2 \times n^2$ diagonale par blocs, dont les blocs sont tous A :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A & & 0 \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{K}).$$

En méditant cette forme, on peut se rendre compte que cette forme diagonale par blocs vient du fait que la multiplication à gauche par la matrice A « agit indépendamment » sur les différentes colonnes.

Exercice 8. *Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$.*

1. *Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Sans calcul, déterminer $\mathrm{Ker} f$.*

Correction.

1. *Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule $f(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.*

   Ainsi, $f(E_{1,1}) = 0$, $f(E_{1,2}) = -E_{1,2}$, $f(E_{2,1}) = E_{2,1}$ et $f(E_{2,2}) = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. *Il est clair que* $\mathrm{rg} f = 2$ *et* $E_{1,1}, E_{2,2} \in \mathrm{Ker}(f)$. *On a donc* $\mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2}) \subset \mathrm{Ker} f$ *et ces deux ssev sont tous deux de dimension 2 (conséquence du théorème du rang), donc ils sont égaux :* $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2})}$. *En particulier,* f *non injective donc* $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

Exercice 9. Matrice d'un projecteur. *Soit* f *l'endomorphisme canoniquement associé à* $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f *est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.*

Correction.

- *Par produit matriciel, on trouve que* $A^2 = A$. *Donc les deux endomorphismes* f^2 *et* f *ont la même représentation matricielle dans la base canonique donc* $\underline{f^2 = f \text{ et } f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ *donc* $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$. *D'après le cours,* f *est le projecteur sur* $\mathrm{Im} f$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker} f$. *Déterminons* $\mathrm{Im} f$ *et* $\mathrm{Ker} f$.
- *Soit* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *On a* $V \in \mathrm{Ker} A \iff \dots \iff \begin{cases} y = 2x \\ y = z \\ x \text{ quelconque} \end{cases}$, *donc* $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.
  D'où $\boxed{\mathrm{Ker} f = \{(x, 2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,2,2))}$. *Comme* $(1,2,2) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, *on a* $\underline{\dim(\mathrm{Ker} f) = 1}$.
- **Méthode 1.** *Par théorème du rang, on a* $\mathrm{rg}(A) = 2$. *De plus,* $\mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3) \supset \mathrm{Vect}\left(\underbrace{C_1, C_2}_{\text{libre}}\right)$. *Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit par exemple que* $\boxed{\mathrm{rg} A = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2)}$.
  Méthode 2. *Comme* f *est un projecteur, on a*

  $$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\} = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0), (-2,0,1))}.$$

  La famille de vecteurs $((-2,1,0), (-2,0,1))$ *étant libre, on a* $\underline{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

Remarques :
- $\mathrm{Tr}(A) = \frac{18}{9} = 2 = \mathrm{rg}(A)$ *: ce qui sera toujours vrai pour un projecteur (cf fin du TD).*
- *Notons* $e_1 := (-2,1,0)$ *et* $e_2 := (-2,0,1)$ *et* $e_3 := (1,2,2)$. *Alors* $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *(la base adaptée à la décomposition* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f)$*) et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale très simple, qui représente aussi l'endomorphisme* f...

Exercice 10. Une symétrie de $\mathbb{R}^3$**.** *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{array}$.

1. *Donner la matrice* $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *canoniquement associée à* f.
2. *Calculer* A^2 *et en déduire* f^2.
3. *Montrer que* $\frac{1}{3} f$ *est une symétrie.*
4. *En déduire que* $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ *et exprimer* f^{-1} *en fonction de* f.

Correction.

1. $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. *On a* $\boxed{A^2 = 9I_3}$ *i.e.* $\mathrm{Mat}_{b.c.}(f^2) = \mathrm{Mat}_{b.c.}(9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. *D'après une propriété du cours, f^2 est l'endomorphisme canoni*
Donc par unicité, $\boxed{f^2 = 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}}$.

3. *D'après la question précédente,* $\left(\frac{1}{3}f\right)^2 = \frac{1}{9}f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. *Par ailleurs,* $\frac{1}{3}f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *donc d'après la caractérisation des symétries,* $\boxed{\frac{1}{3}f \text{ est donc une symétrie}}$.

4. *L'application* $s = \frac{1}{3}f$ *est un automorphisme (c'est une symétrie), donc f, qui est la composée de s et de l'homothétie* $3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$*, en est également un.*
L'égalité $f^2 = 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ *montre directement que*
$$f \circ \left(\frac{1}{9}f\right) = \left(\frac{1}{9}f\right) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \text{ donc } \boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } \boxed{f^{-1} = \frac{1}{9}f}.$$

Remarque. *Si on avait $f^2 = 9f$, qui serait un projecteur non nul ?*
Réponse : $\frac{f}{9}$ *! En effet, pour* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $(\lambda f)^2 = \lambda^2 f^2 = 9\lambda^2 f$ *donc* $(\lambda f)^2 = \lambda f \iff 9\lambda^2 f = \lambda f \iff \lambda(9\lambda - 1)f = 0$. *Ainsi,* $\lambda = \frac{1}{9}$ *convient.*

Exercice 11. Somme directe. *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Établir* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. *u est-il un projecteur ?*
3. *Déterminer toutes les puissances de A.*

Correction.

1.
   - $(y_1, y_2, y_3) \in \mathrm{Ker}(u) \iff \begin{cases} 0 = -y_2 + y_3 \\ 0 = y_1 - y_3 \\ 0 = -y_1 + y_2 \end{cases} \iff y_1 = y_2 = y_3$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)}$.
   - *D'après la formule du rang,* $\mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = 2$.
   De plus, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, C_3\right) \supset \mathrm{Vect}\left(C_2, C_3\right)$ *et l'égalité des dimensions, donc l'égalité* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_2, C_3\right) = \mathrm{Vect}\left(-C_2, C_3\right)$ *d'où* $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)}$.
   - $(y_1, y_2, y_3) \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0$. *Ainsi,* $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \subset \{(0,0,0)\}$ *puis* $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{(0,0,0)\}$ *donc la somme est directe et* $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
   - *On a déjà* $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$, *et leurs dimensions sont égales, donc* $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3}$.

2. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq A$ *donc* $u^2 \neq u$ *donc* $\boxed{u \text{ n'est pas un projecteur}}$.

3.
   - $\mathrm{Ker}(u) \neq \{(0,0,0)\}$ *donc u n'est pas injective donc u n'est pas bijective. Ainsi, A n'est pas inversible donc on ne parlera pas de puissances négatives de A.*
   - $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -3A$.
   - *Ainsi,* $A^3 = -3A$, $A^4 = -3A^2$, $A^5 = (-3)^2 A$, $A^6 = (-3)^2 A^2$, $A^7 = (-3)^3 A$.
     Donc $\boxed{A^0 = I_3, \text{ pour } p \geq 1,\ A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2 \text{ et pour } p \geq 0,\ A^{2p+1} = (-3)^p A}$.

Matrices particulières

Exercice 12. Formes spéciales de matrices. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $r \in [\![0, n]\!]$.*
On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et on calcule $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Déterminer quelles propriétés de f traduisent le fait que M présente les formes suivantes (quand une matrice est présentée « par blocs »), il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (resp. de colonnes) est composé de r lignes (resp. colonnes).

1. $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$;
2. $M = I_n$;
3. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;
4. $\mathrm{rg} M = r$;
5. $M = \left(\begin{array}{ccc} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$;
6. $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$;
7. $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$;
8. $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$.

Correction.

1. *On a* $\boxed{M = 0_n \text{ si et seulement si } f = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.
   En effet, $M = 0_n$ signifie que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = 0_E$ c'est-à-dire que f est nul sur une base de E i.e. $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. *On a* $\boxed{M = I_n \text{ si et seulement si } f = \mathrm{Id}_E}$.

En effet, $M = I_n$ signifie que $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = e_j$ et on conclut le raisonnement de la même façon qu'à la question précédente.

3. *On a* $\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } f \text{ est un automorphisme}}$ *(cf cours).*

4. *On a* $\boxed{\mathrm{rg}M = r \text{ si et seulement si } \mathrm{rg}f = r}$ *(cf cours).*
   Notons que cette question généralise les première et troisième questions. La première correspond au cas $r = 0$ et la troisième au cas $r = n$.

5. *Étant donné un vecteur $y \in E$, dire que les $n - r$ derniers coefficients de sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$ sont nuls signifie que dans sa décomposition*
   $$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$
   les $n-r$ derniers coefficients sont nuls : $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. C'est donc équivalent à l'appartenance $y \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$.
   Ainsi, dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$.
   Puisque $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, cette condition est donc équivalente à l'inclusion
   $$\boxed{\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)}.$$

6. *Dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1,r]\!],\ f(e_j) = 0_E$. Par stabilité par combinaison linéaire, c'est donc équivalent à l'inclusion*
   $$\boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r) \subset \mathrm{Ker}f}.$$

7. *En reprenant le raisonnement exposé au début de la question 5., on peut dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1,r]\!],\ f(e_j) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$.*
   On voit facilement (par linéarité de f, et par stabilité par combinaison linéaire de $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$) que cela est équivalent à la condition
   $$\forall x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)\,,\ f(x) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$$
   que l'on peut redire de manière plus concise sous la forme
   $$\boxed{f\,(\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)}.$$
   On dit alors naturellement que $\boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r) \text{ est stable par } f}$.

8. *Exactement comme dans la question précédente, on voit que M est de la forme de l'énoncé ssi* $\boxed{\text{les sous-espaces vectoriels } \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r) \text{ et } \mathrm{Vect}\,(e_{r+1}, \ldots, e_n) \text{ sont tous les deux stables par } f}$.
   (En particulier, dans ce cas, $\boxed{E \text{ se décompose en somme directe de deux sous-espaces stables par } f}$, *ce qui est une propriété intéressante).*

Exercice 13. Endomorphisme nilpotent. *Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à A et on considère un vecteur $x \in \mathbb{C}^4$ tel que $\phi^2(x) \neq 0$.*

1. *Montrer que $(\phi^2(x), \phi(x), x)$ est libre.*
2. *Soit a un vecteur de $\mathbb{C}^4$ tel que $\mathscr{B} := (\phi^2(x), \phi(x), x, a)$ soit une base de $\mathbb{C}^4$.*
   - *(a) Justifier l'existence de a.*
   - *(b) Montrer que $\phi(a) \in \operatorname{Vect}(\phi^2(x), \phi(x))$, et déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$.*
3. *En déduire le rang de A.*

Correction.

1. *Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\alpha\phi^2(x) + \beta\phi(x) + \gamma x = 0$.*
   En appliquant ϕ^2, qui est linéaire, dans cette égalité, on obtient : $\gamma\phi^2(x) = 0$. Comme $\phi^2(x) \neq 0$ et que $\mathbb{C}$ est intègre, on en déduit que $\gamma = 0$.
   L'équation de départ devient : $\alpha\phi^2(x) + \beta\phi(x) = 0$.
   En appliquant ϕ, qui est linéaire, il vient : $\beta\phi^2(x) = 0$. Comme $\phi^2(x) = 0 \neq 0$, on a donc $\beta = 0$.
   On a alors : $\alpha\phi^2(x) = 0$, d'où $\alpha = 0$.
   Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $\boxed{\text{la famille } (\phi^2(x), \phi(x), x) \text{ est libre}}$.

2. *(a)* $\dim \mathbb{C}^4 = 4$ *et $\mathscr{B} := (\phi^2(x), \phi(x), x)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^4$. Le Théorème de la base incomplète assure l'existence de $a \in \mathbb{C}$ tel que $(\phi^2(x), \phi(x), x, a)$ soit une base de $\mathbb{C}^4$.*

   (b)
   - *$\phi(a) \in \mathbb{C}^4$ et $(\phi^2(x), \phi(x), x, a)$ est une base de $\mathbb{C}^4$ donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tels que $\phi(a) = \alpha\phi^2(x) + \beta\phi(x) + \gamma x + \delta a$. Ainsi,* $\boxed{M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}}$.

     Méthode 1. *Des produits matriciels et l'égalité $M^3 = 0$ mènent à $\gamma = \delta = 0$.*
     Méthode 2.
   - *Déterminons certains des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.*
     On a :
     $$\phi(a) = \alpha\phi^2(x) + \beta\phi(x) + \gamma x + \delta a. \qquad (*)$$
     En appliquant ϕ et ϕ^2, qui sont linéaires, et sachant que $\phi^3 = 0$, on obtient :
     $$\phi^2(a) = 0 + \beta\phi^2(x) + \gamma\phi(x) + \delta\phi(a)$$
     et
     $$0 = \gamma\phi^2(x) + \delta\phi^2(a).$$
     Or, en remplaçant $\phi^2(a)$ et $\phi(a)$ par leurs expressions dans la base $\mathscr{B}$, on a :
     $$(\delta\beta + \gamma + \delta^2\alpha)\phi^2(x) + (\delta\gamma + \delta^2\beta)\phi(x) + \delta^2\gamma x + \delta^3 a = 0.$$
     La liberté de $\mathscr{B}$ permet d'obtenir que $\delta^3 = 0$ puis $\boxed{\delta = 0}$ et $\boxed{\gamma = 0}$.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2}$.

3. *D'après le cours,* $\underline{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi))}$.
   Méthode 1. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{rg}(C_2, C_3) = 2$, *car* (C_2, C_3) *est libre.*
   Méthode 2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)) = \mathrm{rg}(L_1, L_2, L_3, L_4) = \mathrm{rg}(L_1, L_2) = 2$, *car* (L_1, L_2) *est libre.*

Exercice 14. Racine carrée d'une matrice nilpotente. *Soit* u *un endomorphisme nilpotent d'indice* $p \in \mathbb{N}$ *d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* $n \geq 2$.

1. *Montrer que* $p \leq n$ *et* $u^n = 0$.
2. *On suppose* $u^{n-1} \neq 0$. *Justifier qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* E *telle que la matrice représentant* u *dans* $\mathscr{B}$ *soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & \dots & & 0 \end{pmatrix}$.
3. *Résoudre l'équation* $X^2 = A$ *d'inconnue* $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

1. *Alors* $u^p = 0$ *et* $u^{p-1} \neq 0$. *On peut donc trouver* $x \in E$ *tel que* $u^{p-1}(x) \neq 0$ *i.e.* $x \in E \setminus \mathrm{Ker} u^{p-1}$. *Classiquement, la famille* $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ *est une famille libre, constituée de* p *vecteurs de* E. *En dimension finie, on sait que le cardinal d'une famille libre est* $\leq$ *à celui d'une base, donc* $\boxed{p \leq n}$.
   De plus, $u^n = u^{p-n} \circ u^p$, *avec* $u_p = 0$ *et* $p - n \geq 0$, *donc* $\boxed{u^n = 0}$.
2. *On a ici* $u^n = 0$ *et* $u^{n-1} \neq 0$, *donc* u *est nilponent d'indice* n. *Il suffit de considérer* $x \in E \setminus \mathrm{Ker} u^{n-1}$ *et* $\mathscr{B} = (u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$ *(classiquement,* $\mathscr{B}$ *est libre et maximale donc une base de* E*), et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$.
3. *Soit* $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $X^2 = A$. *On sait que* A *est nilpotente d'indice* n, *donc* X *est également nilpotente et d'après 1, on a* $X^n = 0$.
   Mais, $0 \neq A^{n-1} = X^{2n-2}$, *alors que* $X^{2n-2} = X^n \times X^{n-2} = 0$. *Contradiction. Donc* $\boxed{S = \varnothing}$.

Exercice 15. Matrice sans racine carrée.

1. *Soit* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. *Déterminer* $\mathrm{rg}J$, $\mathrm{Im}J$ *et* $\mathrm{Ker}J$.

2. *Dans cette question, on propose de montrer (par l'absurde) qu'il n'existe pas de matrice* $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ *telle que* $M^2 = J$.

   Supposons qu'il existe une telle matrice.

   (a) *En utilisant la question précédente et les propriétés du cours, déterminer* $\mathrm{rg}M$.

   (b) *En déduire que* $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Ker}J$ *et* $\mathrm{Im}M = \mathrm{Im}J$.

   (c) *Qu'est-ce que les égalités précédentes nous apprennent sur la forme de la matrice* M *?*

   (d) *Aboutir à une contradiction, par un calcul raisonnable. Conclure.*

3. *On considère l'endomorphisme de dérivation* $\partial : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \to & \mathbb{C}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

   (a) *Trouver une base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) = J$.

   Commencer par interpréter sur les vecteurs de $\mathscr{B}$ *ce que voudrait dire* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) = J$.
   On n'oubliera pas de vérifier que la famille $\mathscr{B}$ *construite est bien une base de* $\mathbb{C}_2[X]$.

   (b) *En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme* $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[X])$ *tel que* $\phi^2 = \partial$.

Correction. *Dans tout l'exercice, on notera* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{C}^3$.

1. *Notons* (C_1, C_2, C_3) *les colonnes de* J. *On a :*

$$\begin{aligned} \boxed{\mathrm{Im}J} &= \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3) \\ &= \mathrm{Vect}\,(0_{\mathbb{C}^3}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}, \end{aligned}$$

   et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est libre (en tant que sous-famille d'une famille libre), donc* $\boxed{\mathrm{rg}J = 2}$.
   De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}J = 3 - \mathrm{rg}J = 3 - 2 = 1.$$

   Comme $C_1 = 0_{\mathbb{C}^3}$, *on a* $J\varepsilon_1 = 0_{\mathbb{C}^3}$, *c'est-à-dire* $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}J$. *On en déduit* $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1) \subset \mathrm{Ker}J$ *par stabilité par combinaison linéaire, puis* $\boxed{\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1) = \mathrm{Ker}J}$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

2. (a) *Puisque* $J = M^2$, *on a* $\mathrm{rg}J \leq \mathrm{rg}M$, *c'est-à-dire* $\mathrm{rg}M \geq 2$.
   Par ailleurs, $\mathrm{rg}M \leq 3$ *car* $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
   On en déduit que $\mathrm{rg}M \in \{2, 3\}$.
   Cela étant, si $\mathrm{rg}M = 3$, *alors* M *serait inversible, donc* M^2 *aussi, donc* J *aussi, ce qui est exclu puisque* $\mathrm{rg}J = 2$.
   Finalement, $\boxed{\mathrm{rg}M = 2}$.

   (b) *On a les inclusions automatiques*

$$\mathrm{Ker}M \subset \mathrm{Ker}M^2 = \mathrm{Ker}J \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Im}M \supset \mathrm{Im}M^2 = \mathrm{Im}J.$$

Or, on sait que $\dim \mathrm{Im} M = \mathrm{rg} M = 2 = \mathrm{rg} J = \dim \mathrm{Im} J$ *et, d'après le théorème du rang, on sait que* $\dim \mathrm{Ker} M = 1 = \dim \mathrm{Ker} J$.
On en déduit donc que $\boxed{\mathrm{Ker} M = \mathrm{Ker} J \text{ et } \mathrm{Im} M = \mathrm{Im} J}$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

(c) *D'après les calculs de la première question, on a donc* $\mathrm{Ker} M = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ *et* $\mathrm{Im} M = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
La première égalité implique que $\varepsilon_1 \in \mathrm{Ker} M$, *donc* $\boxed{\text{la première colonne de } M \text{ est nulle}}$.
La deuxième égalité (ou plutôt l'inclusion $\mathrm{Im} M \subset \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$*) montre que* $\boxed{\text{la troisième ligne de la matrice } M \text{ est nulle}}$. *On en déduit que*

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(d) *D'après ce qui précède, on peut trouver* $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ *tel que* $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Après calcul, on en déduit que*

$$J = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & ac & ad \\ 0 & c^2 & cd \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité du coefficient des coefficients en position $(2, 2)$ *entraînerait* $c^2 = 0$, *donc* $\underline{c = 0}$. *En regardant le coefficient en position* $(1, 2)$, *on aurait* $0 = 1$: $\boxed{\text{contradiction}}$.
Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de matrice } M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \text{ telle que } M^2 = J}$.

3. (a) *Remarquons déjà que* $\forall P \in \mathbb{C}_2[X],\ P' \in \mathbb{C}_2[X]$, *donc que l'endomorphisme* $\partial \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[X])$ *est bien défini.*

Analyse cachée, au brouillon. *Une base* $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) = J$ *est une base telle que* $Q_0' = 0$, $Q_1' = Q_0$ *et* $Q_2' = Q_1$.
On voit qu'il y a alors beaucoup de possibilités : on peut partir de n'importe quel polynôme Q_0 *constant non nul, lui choisir une primitive* Q_1, *et encore choisir une primitive* Q_2 *de* Q_1.

Synthèse visible. *Posons*

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(\underbrace{1}_{Q_0}, \underbrace{X}_{Q_1}, \underbrace{\frac{1}{2}X^2}_{Q_2} \right)}.$$

$\mathscr{B}$ *est une famille de trois polynômes non nuls et à degré échelonnés de* $\mathbb{C}_2[X]$, *avec* $3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$, *donc il s'agit d'une famille libre et maximale de* $\mathbb{C}_2[X]$, *donc* $\underline{\text{d'une base de } \mathbb{C}_2[X]}$.
On a

$$\partial(Q_0) = 0, \qquad \partial(Q_1) = Q_0 \qquad \text{et} \qquad \partial(Q_2) = Q_1,$$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) = J}$.

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[X])$ tel que $\phi^2 = \partial$.
On aurait alors

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) && \textit{(question précédente)} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi^2) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)^2. && \textit{(« la composition correspond au produit »)} \end{aligned}$$

Or, on a vu qu'il n'existait pas de matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dont le carré valût J. Cela donne la contradiction souhaitée, et conclut.

Exercice 16. Interpolation de Lagrange et matrice de Vandermonde. *Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts.*

1. *Montrer que* $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{array}$ *est un isomorphisme.*

2. *En déduire que la* ***matrice de Vandermonde*** $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Correction.

1. *L'application ϕ est bien définie (pas de problème) et on vérifie directement qu'elle est linéaire (conséquence directe de la linéarité de l'évaluation).*
Montrons que ϕ est injective.

Soit $P \in \mathrm{Ker}\phi$. On a donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\phi(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0.$$

Comme les éléments de la famille $(x_i)_{i=0}^n$ sont tous distincts, on en déduit que P a au moins $n+1$ racines.
Puisque $\deg P \leq n$, le critère radical de nullité entraîne que $P = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\phi \subset \{0\}$, donc ϕ est injective.
Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1} = n+1$, on en déduit que $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme}}$.

2. *On a vu dans le cours que si $u : E \to F$ est un isomorphisme et que $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$) est une base de E (resp. F), alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est inversible (c'est même une équivalence).*
Grâce à la question précédente, il suffit d'appliquer ce fait à l'isomorphisme $\phi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ et aux bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$: la matrice de ϕ dans ce couple de bases est en effet la

matrice de l'énoncé, car

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \phi(X^j) = \begin{pmatrix} x_0^j \\ x_1^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. Rang de la matrice de Vandermonde. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.*

Déterminer le rang de $V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Correction. *La matrice de Vandermonde V associée aux scalaires $x_0, \dots, x_n$ est de rang* $\boxed{\mathrm{rg} V = \mathrm{Card}\{x_0, \dots, x_n\}}$.

Notons $r = \mathrm{Card}\{x_0, \dots, x_n\}$ et montrons que $\mathrm{rg} V = r$.
Quitte à renuméroter, on peut supposer que $x_0, \dots, x_{r-1}$ sont distincts.

Justification 1 (structurelle).
Considérons l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)). \end{array}$
Dans les bases canoniques, la matrice de φ est la matrice V.
D'après le cours, on a $\boxed{\mathrm{rg} V = \mathrm{rg} \varphi}$.
En vertu du théorème du rang, il suffit de trouver la dimension de $\mathrm{Ker} \varphi$.
Déterminons $\mathrm{Ker} \varphi$.
Soit $P \in \mathrm{Ker} \varphi$. Alors, en particulier, $P(x_0) = \cdots = P(x_{r-1}) = 0$ et les scalaires $x_0, \dots, x_{r-1}$ sont distincts, donc par théorème de factorisation, on sait que $(X - x_0) \cdots (X - x_{r-1})$ divise P. Par un argument de degré, on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-r}[X]$ tel que $P = (X - x_0) \cdots (X - x_{r-1}) Q$. En notant pour tout $k \in [\![0, n - r]\!]$, $Q_k = (X - x_0) \cdots (X - x_{r-1}) X^k$, on a $P \in \mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_{n-r})$, ce qui montre que $\mathrm{Ker} \varphi \subset \mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_{n-r})$.
Réciproquement, il est clair que chaque $Q_k \in \mathrm{Ker} \varphi$, donc on a l'égalité

$$\boxed{\mathrm{Ker} \varphi = \mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_{n-r}) \quad \text{où } Q_k = (X - x_0) \cdots (X - x_{r-1}) X^k}.$$

La famille $(Q_0, \dots, Q_{n-r})$ est libre (c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré), donc $\dim \mathrm{Ker} \varphi = n - r + 1$.
Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, le théorème du rang donne $\boxed{\mathrm{rg} \varphi = r}$*, ce qui conclut.*

Justification 2 (matricielle).

> ***Rappel de cours (résulte de la définition).*** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.*
> *On retire UNE colonne à A et on note $\widehat{A}$ la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathscr{M}_{n,p-1}(\mathbb{K})$.*
> *On a*
> $$\mathrm{rg}(\widehat{A}) = \begin{cases} \mathrm{rg}(A) & \text{si la colonne retirée est CL des autres} \\ \mathrm{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

> ***Rappel de cours.*** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.*
> *On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.* ***Conséquence (non triviale).*** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.*
>
> *On retire UNE ligne à A et on note A' la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathscr{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$.*
> *On a*
> $$\mathrm{rg}(A') = \begin{cases} \mathrm{rg}(A) & \text{si la ligne retirée est CL des autres} \\ \mathrm{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En itérant un nombre fini de fois cet énoncé, on a :

> ***Corollaire.*** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.*
> *Si A possède des lignes identiques, on peut les enlever sans changer son rang (bien sûr le format de la matrice change !).*

Retour à l'exercice.

Avec le corollaire précédent, le rang de V (qui est une matrice carrée de taille $n+1$) est le même que le rang de V', qui est la matrice rectangulaire :

$$V' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{r,n+1}(\mathbb{K})$$

Montrons que $\mathrm{rg}(V') = r$.

- *Le rang de la matrice V' est majoré par le minimum de ses tailles, donc $\mathrm{rg}(V') \leq r$.*
- *Montrons que la famille formée par les r premières colonnes de V' est libre, ce qui montrera que $\mathrm{rg}(V') \geq r$.*
  Notons V'' la matrice carrée de taille r telle que $Col_j(V'') = Col_j(V')$, autrement dit :

  $$V'' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{r-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K}).$$

  *C'est la matrice de Vandermonde associée aux scalaires **distincts** $x_0, \ldots, x_{r-1}$. D'après l'exercice précédent, on sait qu'une telle matrice est inversible (il faut savoir redonner l'argument rapidement).*
  L'inversibilité de V'' fournit la liberté de ses colonnes, d'où la liberté des r premières colonnes de V'.

Bilan. *On a* $\begin{cases} \mathrm{rg}V = \mathrm{rg}V' \\ \mathrm{rg}V' = r \end{cases}$ *, d'où* $\boxed{\mathrm{rg}V = r}$.

Exercice 18. Endomorphisme de dérivation. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : x \mapsto x^k \, \mathrm{e}^{\alpha x}$ (que l'on voit comme un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$) et $E = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.*

1. *Quelle est la dimension de E ?*
2. *Montrer que l'opérateur de dérivation ∂ définit un endomorphisme de E, et que cet endomorphisme est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.*

Correction.

1. *On montre directement que $\mathscr{B} := (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, donc $\boxed{\dim E = n+1}$.*
   En effet, considérons $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.
   Alors (en multipliant par $\mathrm{e}^{-\alpha x}$), il vient $\forall x \in \mathbb{R}, \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k = 0$.
   $\mathbb{R}$ étant infini, on obtient l'égalité polynomiale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k = 0$. La liberté de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ implique directement que $\forall k \in [\![0, n]\!], \ \lambda_k = 0$, ce qui conclut.

2. *Quel que soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a*
   $$\partial(f_k) = \begin{cases} \alpha\, f_k & \text{si } k = 0 \\ k\, f_{k-1} + \alpha\, f_k & \text{si } k > 0, \end{cases}$$
   d'où l'on tire directement :
   - *que ∂ définit bien un endomorphisme de E ;*
   - *que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial)$ est triangulaire supérieure, avec des α sur la diagonale, donc $\boxed{\partial \text{ est un automorphisme ssi } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\partial) \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ ssi } \alpha \neq 0}$.*

Changements de base et matrices de passage

Exercice 19. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère :*

- $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *;*
- *les vecteurs* $e_1 = (1,1)$ *et* $e_2 = (1,-1)$ *;*
- $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ *;*
- $E_1 := \mathrm{Vect}\,(e_1)$ *et* $E_2 := \mathrm{Vect}\,(e_2)$ *;*
- p *la projection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* E_1 *parallèlement à* E_2 *;*
- s *la symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_2*.*

1. *Déterminer, sans calcul, les matrices de p et de s dans la base $\mathscr{C}$.*
2. *Déterminer les matrices de p et de s dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Correction. *Remarquons que* $\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ e_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{e_1+e_2}{2} \\ \varepsilon_2 = \frac{e_1-e_2}{2} \end{cases}$.

1. *Par définition de p, on a : $E_1 = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$. Or, $e_1 \in E_1$ donc $p(e_1) = e_1$ et $e_2 \in E_2$ donc $p(e_2) = 0$. Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   Par définition de s, on a : $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. Donc $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = -e_2$, d'où $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

2. *D'une part, $p(\varepsilon_1) = p\left(\frac{e_1+e_2}{2}\right) = \frac{1}{2}e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $p(\varepsilon_2) = p\left(\frac{e_1-e_2}{2}\right) = \frac{1}{2}e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ donc* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

   D'autre part, $s(\varepsilon_1) = s\left(\frac{e_1+e_2}{2}\right) = \frac{e_1-e_2}{2} = \varepsilon_2$ et $s(\varepsilon_2) = s\left(\frac{e_1-e_2}{2}\right) = \frac{e_1+e_2}{2} = \varepsilon_1$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

   Sinon : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p) P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

Exercice 20. Changement de bases. *Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé dans la base $\mathscr{B}$ à la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. *Vérifier que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.*
2. *Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.*
3. *Déterminer la matrice de passage $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ et son inverse.*
4. *Exprimer A en fonction de D et P.*
5. *En déduire une expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Correction.

1. *On va montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est libre. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \nu e'_3 = 0_E$.*

   En remplaçant les trois vecteurs par leur expression et en rassemblant les termes, on obtient

$$\lambda(e_2 + e_3) + \mu(e_1 - e_2 + e_3) + \nu(e_1 - e_2) = 0 \quad \text{donc} \quad (S) \quad \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu - \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

   par liberté de $\mathscr{B}$.

   Après résolution, on obtient que la seule solution de ce système est $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que $\mathscr{B}'$ est libre.

   Comme elle a $3 = \dim E$ vecteurs, on en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

   Remarque. *On peut raisonner très légèrement différemment : le cours garantit que*

$$\mathscr{B}' \text{ est une base} \iff \mathrm{rg}\mathscr{B}' = 3 \iff \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right) = 3.$$

   On peut alors calculer le rang de $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en échelonnant cette matrice.

   On obtient alors que la forme échelonnée réduite de cette matrice est I_3, donc le rang de cette matrice est 3, ce qui conclut.

   Même si on ne prononce pas les mêmes mots, on fait en fait le même calcul, puisque la matrice M est la matrice du système (S).

2. *Calculons :*

$$\begin{aligned}
f(e_1') &= f(e_2+e_3)\\
&= (-e_1+2e_2+2e_3)+(e_1-e_2-e_3)\\
&= e_2+e_3\\
&= e_1'\\
f(e_2') &= f(e_1-e_2+e_3)\\
&= (-3e_1+4e_2+e_3)-(-e_1+2e_2+2e_3)+(e_1-e_2-e_3)\\
&= -e_1+e_2-e_3\\
&= -e_2'\\
f(e_3') &= f(e_1-e_2)\\
&= (-3e_1+4e_2+2e_3)-(-e_1+2e_2+2e_3)\\
&= -2e_1+2e_3\\
&= -2e_3'.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Diag}(1,-1,-2)}$.

3. *On a*

$$\boxed{P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}.$$

On calcule P^{-1} *par la méthode des bimatrices :*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
&\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) && \left[L_1 \leftrightarrow L_3\right]\\
&\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) && \left[L_2 \leftarrow L_2 - L_1\right]\\
&\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) && \left[L_2 \leftrightarrow L_3\right]\\
&\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right) && \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2\\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2\end{bmatrix}\\
&\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right). && \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. *C'est une question de cours : on a*

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \\ &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

5. *Puisque le produit de deux matrices diagonales s'effectue « coefficient par coefficient », on obtient par une récurrence immédiate*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \mathrm{Diag}(1, (-1)^n, (-2)^n).$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PDP^{-1}\right)^n \\ &= PDP^{-1}\,PDP^{-1}\,PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} \\ &= P\,D\,I_n\,D\,I_n\cdots I_n\,D\,P^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}, \end{aligned}$$

ce qu'une récurrence facile montrerait également.

In fine, on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (-2)^n \\ 1 & -(-1)^n & -(-2)^n \\ 1 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n \\ 1 + (-1)^n - 2(-2)^n & 1 + (-1)^n - (-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n \\ 1 - (-1)^n & 1 - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 21. Changement de bases.

1. *Montrer que* $\mathscr{B} = ((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1))$ *et* $\mathscr{C} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$*, respectivement.*

2. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $u = (1,-2,5,6)$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *:*
   - *en résolvant un système linéaire ;*
   - *en calculant la matrice de passage de la base* $\mathscr{B}$ *vers la base canonique.*

3. *Soit* $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-2y+2z+5t, x-2y+3z+4t, -x+2z-3t). \end{array}$
   (a) *Déterminer la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Déterminer* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Correction.

1. *Notons* can_4 *et* can_3 *les bases canoniques de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$*. On a alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_4}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_3}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_4}(\mathscr{B})\right)$*, donc il suffit de montrer que cette matrice est de rang 4 (c'est-à-dire inversible) pour en conclure que* $\mathscr{B}$ *est une base, et de même pour l'autre matrice. On peut faire cela sans difficulté.*

2. *Pour déterminer* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix}$*, on peut :*
   - *résoudre le système*

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda + \nu + \xi = 1 \\ \nu = -2 \\ \mu + \nu = 5 \\ \mu + \nu + \xi = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 5 \\ \nu = -2 \\ \xi = 1. \end{cases}$$

   - *ou calculer le produit* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathsf{can}_4 \to \mathscr{B}}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_4}(u) = P_{\mathscr{B} \to \mathsf{can}_4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ *en inversant la matrice* $P_{\mathsf{can}_4 \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. On a* $P_{\mathscr{B} \to \mathsf{can}_4} = P_{\mathsf{can}_4 \to \mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans tous les cas, on trouve $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. (a) $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_4,\mathsf{can}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}}$.

   (b) *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = P^{-1}_{\mathsf{can}_3\to\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathsf{can}_4,\mathsf{can}_3}P_{\mathsf{can}_4\to\mathscr{B}}$.
   On calcule l'inverse $P^{-1}_{\mathsf{can}_3\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *On en déduit*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Simimitudes

Exercice 22. Endomorphisme nilpotent maximal. *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $u^3 = 0$ *et* $u^2 \neq 0$.

1. *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* u *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Notons* $Z(A) := \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ *l'ensemble des matrices qui commutent avec* A.
   (a) *Déterminer* $Z(A)$.
   (b) *Montrer que* $Z(A)$ *est un espace vectoriel de dimension 3, stable par produit.*

Correction.

1. $u^2 \neq 0$ *donc il existe* $x \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $u^2(x) \neq 0$. *Alors* $u(x) \neq 0$ *et* $x \neq 0$ *(sinon...). Notons* $\mathscr{B} := (x, u(x), u^2(x))$ *et montrons que* $\mathscr{B}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.
   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$. *En composant par* u^2 *et sachant que* $u^3 = 0$, *on obtient :* $au^2(x) = 0$. *Or* $u^2(x) \neq 0$ *et* $\mathbb{R}$ *est intègre donc* $\underline{a = 0}$. *Ainsi,* $bu(x) + cu^2(x) = 0$. *En composant par* u, *on obtient :* $bu^2(x) = 0$ *d'où* $\underline{b = 0}$. *Enfin,* $cu^2(x) = 0$ *et donc* $\underline{c = 0}$.
   Ainsi, $\mathscr{B}$ *est une famille libre de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension finie égale à 3, donc* $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$. *De plus, on a bien* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A}$.

2. *Il est clair que* $Z(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, *et qu'il contient* 0_3, I_3, A *et toute puissance de* A.

   (a) *Raisonnons par analyse-synthèse/double inclusion.*

- *Soit $M \in Z(A)$. Alors il existe des réels tels que* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

  Les produits matriciels donnent

  $$MA = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

  L'égalité matricielle $AM = MA$ implique que $\begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \\ g \textit{ quelconque} \end{cases}$,

  d'où $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI_3 + dA + gA^2$, *ce qui montre* $\underline{Z(A) \subset \mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)}$.

- *Réciproquement, I_3, A et A^2 commutent avec A donc appartiennent à $Z(A)$. De plus, par stabilité de $Z(A)$ par combinaison linéaire, on a* $\underline{\mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right) \subset Z(A)}$.

On obtient donc l'égalité $\boxed{Z(A) = \mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)}$.

(b)

- *On a $Z(A) = \mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)$, donc $Z(A)$ est un ssev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.*

- *Soit $(a, d, g) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aI_3 + dA + gA^2 = 0_3$. Alors* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ *puis, par unicité des coefficients d'une matrice, il vient $a = d = g = 0$. Ainsi, la famille $\left(I_3, A, A^2\right)$ est libre. Comme elle est de plus génératrice de $Z(A)$, on en conclut que $\left(I_3, A, A^2\right)$ est une base de $Z(A)$ et donc que* $\boxed{Z(A) \textit{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \textit{ de dimension 3}}$.

- *Soit $(M, N) \in Z(A)^2$. Alors par associativité du produit matriciel, on a :*

  $$(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN).$$

  Ainsi, $\underline{\forall (M, N) \in Z(A)^2,\ MN \in Z(A)}$ *d'où* $\boxed{Z(A) \textit{ est stable par produit}}$.

Exercice 23. Matrices semblables et trace. *On pose* $A = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$*, où* $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$.

1. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

2. *On suppose que* $A \neq 0$ *et* $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. *Montrer que* A *est semblable à* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Indication : *on pourra noter* a *l'endomorphisme canoniquement associé à* A *et montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{C}^3$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = N$.

Correction.

1.
   - *On écrit :* $A = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = XX^T$ *où* $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.
   - *On a* $A^2 = XX^TXX^T = X(u^2 + v^2 + w^2)X^T = (u^2 + v^2 + w^2)A$.
   - $A^3 = (u^2 + v^2 + w^2)A^2 = (u^2 + v^2 + w^2)^2A$.
   - *Par récurrence immédiate, on montre* $\boxed{A^n = (u^2 + v^2 + w^2)^{n-1}A \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } A^0 = I_2}$.

2.
   - *Sous ces hypothèses et d'après la question précédente,* $A^2 = (u^2 + v^2 + w^2)A = 0$ *et* $A \neq 0$ *donc* A *(et* a*) est nilpotente d'indice 2.*
   - *Analyse-brouillon : on cherche* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* $\mathbb{C}^3$ *telle que* $e_1, e_2 \in \mathrm{Ker}a$ *et* $a(e_3) = e_2$.
     - *Déterminons le rang de* A *ou le noyau de* A.

       Méthode 1. *On a :* $a^2 = 0$ *donc* $\mathrm{Im}a \subset \mathrm{Ker}a$ *d'où* $\mathrm{rg}(a) \leq \dim(\mathrm{Ker}a) = 3 - \mathrm{rg}(a)$, *d'après le théorème du rang. Ainsi,* $\mathrm{rg}(a) \leq 3/2$, *mais* $\mathrm{rg}(a) \in \mathbb{N}^*$ *(car* $a \neq 0$*) donc* $\mathrm{rg}(a) = 1$ *et* $\dim(\mathrm{Ker}a) = 2$.

       Méthode 2. *En notant* $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, *on a* $C_1 = uX$, $C_2 = vX$ *et* $C_3 = wX$, *et*

       $\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}\,(X)$ *avec* $X \neq 0$ *(sinon* $u = v = w = 0$ *et* $A = 0$, *ce qui est exclu) donc* $\mathrm{rg}(A) = 1$, *et d'après le théorème du rang* $\dim \mathrm{Ker}A = 2$.

       Méthode 3. *Pour* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, *on a* $x \in \mathrm{Ker}a \iff ux_1 + vx_2 + wx_3 = 0$. *Ainsi* $\mathrm{Ker}a = \mathrm{Ker}\phi$, *où* $\phi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & ux_1 + vx_2 + wx_3 \end{array}$ *est une forme linéaire non nulle (pourquoi ?) sur* $\mathbb{R}^3$ *donc* $\mathrm{Ker}a = \mathrm{Ker}\phi$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$ *donc* $\dim \mathrm{Ker}a = 2$.

       Comme précédemment, on justifie que $X \neq 0$. *SPG, supposons que* $u \neq 0$. *Alors* $\phi(u, 0, 0) = u^2 \neq 0$*).*

     - $a \neq 0$ *donc il existe* $e_3 \in \mathbb{C}^3$ *tel que* $a(e_3) \neq 0$.

       Sinon : *on a remarqué que* $X \neq 0$. *Supposons par exemple que* $u \neq 0$. *Alors* $(1, 0, 0) \notin \mathrm{Ker}a$ *et on peut poser* $e_3 := (1, 0, 0)$.

       Dans tous les cas, on pose $e_2 = a(e_3)$.

- *$a^2 = 0$ donc $e_2 = a(e_3) \in \mathrm{Ker} a$. Or, (e_2) est une famille libre (car $e_2 \neq 0$) de $\mathrm{Ker} a$ et $\dim(\mathrm{Ker} a) = 2$, donc d'après le TBI, il existe $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker} a$.*
- *On pose alors $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ et on vérifie que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.*
  Méthode 1. *On sait déjà que (e_1, e_2) est libre (en tant que base du noyau).*
  Si e_3 appartenait à $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, e_3 serait dans le noyau, ce qui n'est pas.
  Donc $e_3 \notin \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, donc (e_1, e_2, e_3) est libre, maximale, de vecteurs de $\mathbb{C}^3$, donc une base de $\mathbb{C}^3$. **Méthode 1 bis.** *Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. En appliquant l'endomorphisme a, on obtient $\gamma a(e_3) = 0$, avec $a(e_3) \neq 0$ donc $\gamma = 0$. L'équation précédente devient $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$. Or la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker} a$ donc libre d'où $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre, maximale, de vecteurs de $\mathbb{C}^3$, donc une base de $\mathbb{C}^3$.*
  Méthode 2. *On a trouvé que $\mathrm{Ker} a$ est un ssev de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$, donc un hyperplan de $\mathbb{C}^3$. Comme $e_3 \notin \mathrm{Ker} a$, on a par propriété des hyperplans :*

$$\mathrm{Ker} a \oplus \mathrm{Vect}\,(e_3) = \mathbb{C}^3.$$

  Comme (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker} a$, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ (adaptée à la décomposition précédente).

  Par construction de $\mathscr{B}$, on a $a(e_1) = a(e_2) = 0$ et $a(e_3) = e_2$, donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Exercice 24 (Mines PC 2017). **Astucieux !** *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ces matrices sont-elles semblables sur $\mathbb{C}$? Le sont-elles sur $\mathbb{R}$?

Correction. *Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.*
Alors $f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ et $f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$.
La famille (e_3, e_2, e_1) est aussi une base de $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{B}'$.
Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
A et B sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
Ainsi $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables sur } \mathbb{R} \text{ et sur } \mathbb{C}}$.

Exercice 25. Un exo de khôlle amusant ! *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $\mathrm{Im} A = \mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Im} B = \mathrm{Ker} B$. Montrer que A et B sont semblables.*

Correction. • *Notons $r = \mathrm{rg}(A)$.*
D'après le théorème du rang et l'hypothèse, on a $n = r + r$, donc n est pair et $r = n/2$.
Comme A et B vérifient les mêmes hypothèses, on a aussi $\mathrm{rg}(B) = n/2$, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
• *L'hypothèse induit en particulier $\mathrm{Im} A \subset \mathrm{Ker} A$ donc $A^2 = 0$ (donc A est nilpotente).*
• *Soit f_A l'application linéaire canoniquement associée à A.*
Considérons une base de l'image $(e_1, \ldots, e_r)$ (c'est-à-dire du noyau ici !).

Donnons des antécédents, e_i', aux e_i, par f_A.
Considérons la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_1', \dots, e_r')$.
On a que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & I_r \\ \hline 0_r & 0_r \end{array}\right)$.

> *Soit $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{K}^{2r}$ tel que $\sum_{i=1}^r a_i e_i + \sum_{i=1}^r b_i e_i' = 0$.*
> *En appliquant f_A, on a $0 + \sum_{i=1}^r b_i e_i$.*
> *Par liberté des e_i, on a $\forall i \in [\![1, r]\!],\ b_i = 0$.*
> *L'égalité initiale devient $\sum_{i=1}^r a_i e_i = 0$.*
> *Encore par liberté des e_i, on a $\forall i \in [\![1, r]\!],\ a_i = 0$.*
> *On en déduit que $\mathscr{B}$ est une famille libre, de $2r = n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$, donc une base de $\mathbb{K}^n$.*

- *Idem pour B.*
- *Les matrices A et B sont semblables à la même matrice (même forme et mêmes tailles de blocs), donc* $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$.

Diagonalisation

Exercice 26. Projecteur et symétrie. *Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par*

$$f : (x, y, z) \mapsto (3x - 4y - 2z, 4x - 7y - 4z, -5x + 10y + 6z)$$
$$g : (x, y, z) \mapsto (5x - 8y - 4z, 8x - 15y - 8z, -10x + 20y + 11z).$$

1. *Montrer que f est un projecteur et déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.*
2. *Montrer que g est une symétrie et déterminer une base dans laquelle la matrice de g est diagonale.*

Correction.

1. *La matrice dans les bases canoniques est* $F := \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ *vérifie $F^2 = F$, donc f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.*
   De plus,
   $$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_2} \right) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=e_3} \right).$$
   Par propriétés des projecteurs, on sait que $\underline{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f)}$.
   L'endomorphisme $\boxed{f \text{ est alors un projecteur sur } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f)}$.
   La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base adaptée à la décomposition précédente et vérifie $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(1, 1, 0).}$

2. - **Méthode 1.** *La matrice de g dans les bases canoniques est* $G := \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$, *et*

vérifie $G^2 = I_3$, ce qui assure que g est une symétrie de $\mathbb{R}^3$. De plus, on vérifie que

$$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{=e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_2}\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}}_{=e_3}\right),$$

ce qui montre que $\boxed{\textit{g est une symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}),\ \textit{parallèlement à } \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$.
De plus, par propriété des symétries, on sait que $\underline{\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3}$, *et* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *adaptée à cette décomposition.*
Par ailleurs, on a $g(e_1) = e_1$, $g(e_2) = e_2$ *et* $g(e_3) = -e_3$, *donc* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Diag}(1, 1, -1)}$.

- **Méthode 2.** *On aurait pu remarquer dès le début que* $g = 2f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$*... Cela aurait conclu, car, en notant* $\mathscr{C}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *on en aurait déduit* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) - I_3$, *donc*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\
&= P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} \left(2\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) - I_3\right) P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\
&= 2P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} - P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} I_3 P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\
&= 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - I_3 \\
&= \mathrm{Diag}(1, 1, -1).
\end{aligned}$$

Exercice 27. Une diagonalisation. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé à la matrice* A.

1. *Montrer que les applications* $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ *et* $f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ *ne sont pas injectives.*
2. *Déterminer une base* $\mathcal{B}'$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est la matrice* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. *On note* P *la matrice de passage de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *à la base* $\mathcal{B}'$. *Déterminer* P *et* P^{-1} *et donner l'expression de* A *en fonction de* D, P *et* P^{-1}.
4. *Déterminer* A^n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Correction. *Notons* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

1. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. *Les colonnes de cette matrice sont clairement liées, donc son rang est 1 : elle n'est pas inversible. Cela montre que* $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ *n'est pas un isomorphisme. Comme il s'agit d'un endomorphisme, cela entraîne qu'elle n'est pas injective.*
   On raisonne de même pour $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Prenons un vecteur non nul* $e_1 \in E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ *et un autre vecteur non nul* $e_2 \in \mathrm{Ker}(f -$

$2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = E_2$. Les familles à un vecteur (e_1) et (e_2) sont clairement des bases de E_1 et E_2, car ces sous-espaces vectoriels sont de dimension 1 (soit parce que l'on sait qu'ils sont non triviaux d'après la question précédente et qu'ils ne sont manifestement pas $\mathbb{R}^2$ tout entier, puisque l'on a $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $f \neq 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, soit parce que les matrices $A - I_2$ et $A - 2I_2$ calculées à la question précédente sont manifestement de rang 1, donc leurs noyaux E_1 et E_2 doivent être de dimension 1 d'après le théorème du rang).

Les droites E_1 et E_2 sont en somme directe (si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$, donc $x = 0$), donc supplémentaires (car $\dim E_1 + \dim E_2 = \mathbb{R}^2$), donc $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Comme par construction $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Diag}(1, 2) = D$.

Remarque : on aurait pu choisir des vecteurs non nuls explicites $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$ mais que l'on n'en a pas eu besoin à cette question. Pour la question suivante, on choisit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. *Avec le choix que l'on vient de faire, on a $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par échelonnement ou grâce à la formule pour les matrices 2×2) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après le cours, on a*
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = PDP^{-1}.$$

4. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors*
$$A^n = \underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. Diagonalisation. *On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.*

1. *Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.*

   f est une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même et pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha M + N) = \alpha f(M) + f(N)$ donc f est linéaire. Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. *Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base et la dimension.*

   Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a $M \in \mathrm{Ker} f \iff f(M) = 0 \iff AM = 0 \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$

   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)}$.

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ étant libre, c'est une base de $\mathrm{Ker} f$ donc $\boxed{\dim \mathrm{Ker} f = 2}$.

3. *f est-il surjectif ?*

$\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$ *donc* $\underline{f \text{ n'est pas injectif}}$. $\underline{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ *qui est de* $\underline{\text{dimension finie}}$ *(égale à 4). Ainsi,* $\underline{f \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est injectif}}$. $\boxed{f \text{ n'est donc pas surjectif}}$.

4. *Déterminer* $\mathrm{Im}(f)$ *et en donner une base et la dimension.*

Pour tout $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$ *donc*

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(M) \;\middle|\; M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\} \underset{(*)}{\subset} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Plusieurs conclusions possibles :

(a) $(*)$ *est une égalité car* $\mathbb{R} = \{x+z | (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$ *vu que* $(x,z) \mapsto x+z$ *est surjective de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *;*

(b) *par théorème du rang,* $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim \mathrm{Ker} f = 4-2 = 2$ *et la famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ *est libre, donc par inclusion et égalité des dimensions,* $(*)$ *est une égalité.*

Dans tous les cas, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$ *et* $\boxed{\mathrm{rg} f = 2}$.

5. *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique* $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ *de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$*, où :*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$f(E_1) = AE_1 = E_1 + E_3$, $f(E_2) = AE_2 = E_2 + E_4$, $f(E_3) = AE_3 = E_1 + E_3$, $f(E_4) = AE_4 = E_2 + E_4$, *d'où*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

6. *Montrer que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *est semblable à* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche une base $\mathscr{B}' = (E_1', E_2', E_3', E_4')$ *de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$ *i.e. telle* E_1' *et* E_2' *appartiennent à* $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ *et* E_3' *et* E_4' *appartiennent à* $\mathrm{Ker}(f)$.

- $\boxed{\text{Posons } E_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_4' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. *D'après la question 2,* $\underline{E_3', E_4' \in \mathrm{Ker}(f)}$.

- **Déterminons** $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$. *Soit* $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *On a :*

$$M\in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \Longleftrightarrow AM=2M \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=t \end{cases}.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\textit{Posons } E_1'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \textit{ et } E_2'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. *Dès lors,* $\underline{E_1', E_2' \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})}$.

- *On vérifie que la famille $\mathscr{B}' := (E_1', E_2', E_3', E_4')$ est libre (en revenant à la définition et en se servant du fait que (E_1, E_2, E_3, E_4) est libre). De plus,* $\mathrm{Card}(\mathscr{B}')=4=\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$, *donc* $\boxed{\mathscr{B}' \textit{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ *et* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=D}$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \textit{ et } D \textit{ sont semblables}}$.

Exercice 29. Diagonalisation. *Soit* $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $u^2+v^2+w^2=1$. *On pose* $A=\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$ *et* $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que A et D sont semblables.*

Correction 1 :

- *Soit a l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors* $A=\mathrm{Mat}_{b.c.}(a)$.

- *Analyse au brouillon : on cherche une base $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $a(e_1)=e_1; a(e_2)=0; a(e_3)=0$ i.e. telle que $e_2, e_3\in \mathrm{Ker}(a)$ et $e_1\in\mathrm{Ker}(a-\mathrm{Id})$.*

- **Déterminons** $\mathrm{Ker}(a)$. *Soit* $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. *On a :* $x\in\mathrm{Ker}(a)\Leftrightarrow ux_1+vx_2+wx_3=0$. *Ainsi* $\mathrm{Ker}(a)=\mathrm{Ker}\phi$, *où* $\phi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & ux_1+vx_2+wx_3\end{array}$, *est une forme linéaire non nulle donc surjective. Ainsi,* $\underline{\mathrm{Ker}(a) \textit{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3}$ *d'où* $\underline{\dim \mathrm{Ker}(a)=2}$. $\boxed{\textit{Posons } (e_2,e_3) \textit{ une base de } \mathrm{Ker}(a)}$.

- **Déterminons** $\mathrm{Ker}(a-\mathrm{Id})$. *Soit* $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. *On a :*

$$x\in\mathrm{Ker}(a-\mathrm{Id})\Leftrightarrow \begin{cases} (u^2-1)x_1+uvx_2+uwx_3=0 \\ uvx_1+(v^2-1)x_2+vwx_3=0 \\ uwx_1+vwx_2+(w^2-1)x_3=0. \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Posons } e_1=(u,v,w)}$. *Puisque* $u^2+v^2+w^2=1$, *on a* $e_1\in\mathrm{Ker}(a-\mathrm{Id})$ *et* $e_1\neq 0$.

Sinon : *On a* $A=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ *donc* $A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(u^2+v^2+w^2)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, *ce qui prouve* *que* $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id})$.

- **Montrons que la famille $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ est libre**. *Comme (e_2, e_3) est libre, si $\mathscr{B}$ était liée, alors e_1 serait une combinaison linéaire des vecteurs e_2 et e_3, donc il existerait $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$e_1 = \alpha e_2 + \beta e_3.$$

En appliquant l'application linéaire a, on aurait $e_1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, la $\mathscr{B}$ est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ donc $\underline{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D}$.

- *Ainsi, $\boxed{\text{A et D représentent toutes les deux l'endomorphisme a dans des bases différentes}}$.*

Correction 2 :

- *D'après la forme de D, on remarque que $D^2 = D$ donc on pense à calculer A^2 et on constate que $A^2 = A$. On en déduit que $a^2 = a$ et comme $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ $\boxed{a \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3}$. Ainsi, $\underline{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(a)}$ (*).*

- *Remarquons encore que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(uX, vX, wX) = 1$, où $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \neq 0$. Puisque a est un projecteur, $\mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Im}(a)$ qui est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.*
Le théorème du rang appliqué à $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ permet d'en déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 2$.

- *Considérons (e_1) une base de $\mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id})$ et (e_2, e_3) une base de $\mathrm{Ker}(a)$.*
Dès lors, la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, adaptée à la décomposition $(*)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = D$, par construction de $\mathscr{B}$.

Rang

Exercice 30. Calcul explicite de rang, de noyau, d'image. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

1. *Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.*
3. *Sans calculs, déterminer le rang de f, une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.*

Correction.

1. *Soit* $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$*. Cela donne* $\begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Après résolution du système linéaire, on obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$*, ce qui montre que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
   De plus, $\mathscr{B}$ *a* $3 = \dim \mathbb{R}^3$ *éléments, donc* $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. *On peut utiliser la formule de changement de bases ou revenir à la définition de* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *:*
   - $f(u_1) = 2u_1$ *;*
   - $f(u_2) = -u_2$ *;*
   - $f(u_3) = 0$,

   donc
   $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(2, -1, 0)}.$$

3. *La matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *est échelonnée, donc on peut lire directement son rang comme nombre de pivots :*
   $$\boxed{\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = 2}.$$
   Puisque $f(u_1) = 2u_1$ *et* $f(u_2) = u_2$*, les deux vecteurs* u_1 *et* u_2 *appartiennent à* $\mathrm{Im} f$*. On a donc, par stabilité par combinaisons linéaires,*
   $$\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) \subset \mathrm{Im} f.$$
   Comme $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f = 2$ *et que* $\dim \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) = 2$ *(la famille* (u_1, u_2) *étant libre, en tant que sous-famille d'une base), on en déduit que* $\boxed{\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) = \mathrm{Im} f}$ *par inclusion et égalité des dimensions.*
   De même, l'expression $f(u_3) = 0$ *entraîne* $\mathrm{Vect}\,(u_3) \subset \mathrm{Ker} f$*, et* $\mathrm{Vect}\,(u_3)$ *est de dimension* 1*. D'après le théorème du rang,* $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg} f = 1$*, donc on conclut que* $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\,(u_3)}$ *par inclusion et égalité des dimensions.*
   Ainsi, $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$ *et* $\boxed{(u_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$.

Exercice 31. Rang de matrices. *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \ (a \in \mathbb{R})$$

Correction.

- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, L_2, L_3) = \mathrm{rg}(L_1) = 1$ *car* $L_1 \neq 0$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1}$.
- $B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *qui est une matrice échelonnée possédant 3 pivots, donc* $\boxed{\mathrm{rg}(B) = 3}$.
- $C \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a+2) & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-3) & 3-a \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{Si } a = 3, \text{ alors } \mathrm{rg}(C) = 2\ ;\ \text{sinon, } \mathrm{rg}(C) = 3}$.

Exercice 32. Rang de matrice. *Soit* $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *Déterminer le rang de la matrice* $X^T X$.

Correction. $X^T X \in \mathscr{M}_5(\mathbb{K})$ *et* $X^T X = \begin{pmatrix} X \\ 2X \\ 3X \\ 4X \\ 5X \end{pmatrix}$. *Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs lignes donc* $\mathrm{rg}(X^T X) = \mathrm{rg}(X, 2X, 3X, 4X, 5X) = \mathrm{rg}(X) = 1$ *car* $X \neq 0$. *Ainsi,* $\boxed{\mathrm{rg}(X^T X) = 1}$.

Exercice 33. Rang d'applications linéaires. *Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques, et calculer leur rang.*

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+y) \end{array}$;
2. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{array}$;
3. $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$;
4. $t : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array}$.

Correction. *Notons* $\mathscr{C}_p$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\boxed{\mathrm{rg}(u) = 2}$.

2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\boxed{\mathrm{rg}(u) = 2}$.

3. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}_1}(\mathrm{Tr}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1}$.

4. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\boxed{\mathrm{rg}(t) = 4}$.

Exercice 34. Rang d'applications linéaires. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $r \in [\![0, n]\!]$.*
Montrer que les applications suivantes sont bien définies, linéaires et déterminer leur rang.

(i) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$;

(ii) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P^{(r)} \end{array}$;

(iii) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_8[X] \\ P & \mapsto & (X^4 + 3X^2 - 2X + 7)P \end{array}$;

(iv) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & X(P' - P'(0)) \end{array}$;

(v) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' - P \end{array}$;

(vi) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & P(X^2). \end{array}$

Correction. *On notera à chaque fois f l'application de l'énoncé et on notera $\mathscr{B}_c = \mathscr{B}_c^{(n)} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*
La linéarité ne posant jamais de problème (dans le dernier exemple, c'est une propriété du cours), on ne détaille pas sa vérification.
L'aspect « bien défini » ne relève à chaque fois que d'une vérification de degré : il faut vérifier que pour tout élément P du domaine de f, la formule pour $f(P)$ définit effectivement un élément de l'ensemble d'arrivée de f. Par linéarité de f (et stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble d'arrivée), il suffit de le faire pour P décrivant une base du domaine, ce que l'on fera dans les exemples (iii) et (iv).

(i) *On sait que*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P' = \begin{cases} -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \\ \deg P - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui montre

- *que f est bien définie, car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\deg P' \leq \deg P - 1 \leq \deg P \leq n$;*
- *que $\underline{\mathrm{Ker} f = \mathbb{K}_0[X]}$ est de dimension 1.*

D'après la formule du rang,

$$\boxed{\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{K}_n[X] - \dim \mathrm{Ker} f = (n+1) - 1 = n}.$$

(ii) *Si $r = 0$, l'application est l'identité, dont le rang est* $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1}$.
On suppose donc maintenant $r \in [\![1, n]\!]$, et on procède comme à la question précédente. La formule

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P^{(r)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P < r \\ \deg P - r & \text{sinon,} \end{cases}$$

montre que f est bien définie et que $\mathrm{Ker} f = \mathbb{K}_{r-1}[X]$ est de dimension r.
D'après la formule du rang,

$$\boxed{\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{K}_n[X] - \dim \mathrm{Ker} f = n + 1 - r}.$$

(iii) *On calcule les valeurs suivantes.*

P	1	X	X^2	X^3
$f(P)$	X^4+3X^2-2X+7	$X^5+3X^3-2X^2+7X$	$X^6+3X^4-2X^3+7X^2$	$X^7+3X^5-2X^4+7X^3$

Comme tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{K}_8[X]$, l'application linéaire f est bien définie.

On remarque que f envoie la base canonique $\mathscr{B}_c^{(3)}$ sur la famille échelonnée de polynômes

$$(X^4+3X^2-2X+7, X^5+3X^3-2X^2+7X, X^6+3X^4-2X^3+7X^2, X^7+3X^5-2X^4+7X^3),$$

qui est donc libre. On en déduit que f est injective, donc

$$\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{K}_3[X] = 4.$$

Remarque. *On peut aussi montrer directement que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ en utilisant l'intégrité de $\mathbb{K}[X]$.*

(iv) *On calcule les valeurs suivantes.*

P	1	X	X^2	X^3
$f(P)$	0	0	$2X^2$	$3X^3$

Comme tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{K}_4[X]$, l'application linéaire f est bien définie.

On a par ailleurs

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c^{(3)},\mathscr{B}_c^{(4)}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,4}(\mathbb{K}).$$

Cette matrice est clairement de rang 2, donc

$$\boxed{\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c^{(3)},\mathscr{B}_c^{(4)}}(f) = 2}.$$

(v) *Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on a*

$$f(X^j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = 0 \\ j\,X^{j-1} - X^j, & \text{si } j > 0 \end{cases}.$$

Comme tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{K}_n[X]$, l'application linéaire f est bien définie.

On a par ailleurs

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Cette matrice triangulaire est inversible, donc

$$\boxed{\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = n+1},$$

ce qui montre que $\boxed{f \textit{ est un automorphisme}}$.

(vi) *Comme le polynôme X^2 n'est pas constant, on a*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P(X^2)) = 2\deg P,$$

ce qui montre que f est une application bien définie.
Soit $P \in \mathrm{Ker} f$. On a donc $P(X^2) = 0$.

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(k^2) = 0$. Comme l'ensemble $\left\{ k^2 \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ des carrés parfaits est infini, P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker} f \subset \{0\}$, donc $\underline{f \textit{ est injective}}$. *On en déduit que*

$$\boxed{\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}.$$

Exercice 35. Devinette. *Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Combien vaut $\mathrm{rg}(AB)$? En déduire $\mathrm{rg} A$ et $\mathrm{rg} B$.*
2. *Déterminer $\mathrm{Ker}(AB)$ et $\mathrm{Im}(AB)$. En déduire $\mathrm{Ker} B$ et $\mathrm{Im} A$.*
3. *Que vaut BA ?*

Correction. *Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (où les vecteurs sont écrits en colonne).*

1. *On voit que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(AB) &= \mathrm{Vect}\left(Col_1(AB), Col_2(AB), Col_3(AB)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(0_{\mathbb{R}^3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_2, \varepsilon_3\right), \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{rg}(AB) = \dim \mathrm{Im}(AB) = 2}$.
Par ailleurs, les tailles de ces deux matrices rectangulaires montrent que $\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B) \leq 2$.
En outre, $2 = \mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$, *donc on a les égalités* $\boxed{\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B = 2}$.

2. *On a vu à la question précédente que* $\boxed{\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3)}$.
   On a également $\boxed{\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)}$ *(argument chic :* $AB\varepsilon_1 = Col_1(AB) = 0_{\mathbb{R}^3}$, *d'où l'inclusion* $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1) \subset \mathrm{Ker}(AB)$, *et on conclut par inclusion et égalité des dimensions car la formule du rang donne* $\dim \mathrm{Ker}(AB) = 3 - \mathrm{rg}(AB) = 1$*).*
   On va alors conclure en utilisant les « inclusions automatiques » et des calculs de dimension :
   - *On a* $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)$.
     D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}B = 3 - \mathrm{rg}B = 3 - 2 = 1$.
     Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)}$.
   - *De même, on a* $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$.
     Comme $\dim \mathrm{Im}A = \mathrm{rg}A = 2$, *on en déduit que* $\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3)}$ *par inclusion et égalité des dimensions.*

3. *On va remarquer que A et B ont des formes particulières.*
   - *Comme* $\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, *la première ligne de A est entièrement nulle, donc on peut trouver* $A' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A'} \end{array}\right)$.
     (On a en fait simplement utilisé l'inclusion directe – l'inclusion réciproque nous permettrait même d'en déduire que A' est inversible, mais on ne va pas vraiment en avoir besoin).
   - *Comme* $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)$, *la première colonne de B est entièrement nulle, donc on peut trouver* $B' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $B = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B' \end{array}\right)$.
     (On a en fait simplement utilisé l'inclusion réciproque – l'inclusion directe nous permettrait de même d'en déduire que B' est inversible.)
     On vérifie alors, par la règle des doigts, les calculs « par blocs »
     $$AB = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$A'B'$}} \\ 0 & & \end{array}\right) \qquad et \qquad BA = B'A'.$$
     L'hypothèse sur AB entraîne donc que $\underline{A'B' = I_2}$.
     On sait que cela entraîne que A' et B' sont inversibles (et pas seulement d'un côté) et inverses l'une de l'autre. On en déduit donc que $\boxed{BA = B'A' = I_2}$.

Exercice 36 (Khass)**. Un classique.** *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $A + B$ est inversible.*

1. *Donner un exemple de deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant ces hypothèses.*
2. *Montrer que $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) = n$.*

Correction.

1. *Exemple $(A, B) = (I_2, 0_2)$, ou $(A, B) = (E_{1,1}, E_{2,1})$.*
2. - *D'une part, on a : $AB = 0$ donc $\operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Ker}(A)$ d'où $\operatorname{rg}(B) \leq \dim(\operatorname{Ker}(A)) = n - \operatorname{rg}(A)$, d'après le Théorème du rang. Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \leq n}$.*
   - *D'autre part, $A + B$ est inversible donc $n = \dim(\operatorname{Im}(A + B)) = \operatorname{rg}(A + B)$.*
     Or, $\operatorname{Im}(A + B) \subset \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)$ d'où en passant aux dimensions :
     $$\begin{aligned} n &\leq \dim(\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)) \\ &\leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \qquad \textit{(conséquence de Grassmann)} \end{aligned}$$
     Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \geq n}$.
   - *On conclut des deux inégalités encadrées que $\boxed{\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) = n}$.*

Exercice 37. Autour du rang. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $(C, L) \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{K})$. On pose $A = CL$.*

1. *Justifier que $\operatorname{rg} A \leq r$.*
2. *Montrer que si A est de rang r, alors C et L sont de rang r.*
3. *Montrer que si C et L sont de rang r, alors A est de rang r.*
   Indication : *on pourra considérer les applications linéaires canoniquement associées.*

Correction.

1. *D'après le cours, on a*
   $$\operatorname{rg}(CL) \leq \min\left(\operatorname{rg}(C), \operatorname{rg}(L)\right) \leq \min \operatorname{rg}(C).$$
   De plus, au vu de sa taille, $\operatorname{rg}(C) \leq r$.
   Comme $A = CL$, on a par transitivité $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leq r}$.
2. *On suppose que $\operatorname{rg}(A) = r$.*
   D'une part, on a $r = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(CL) \leq \min(\operatorname{rg}(C), \operatorname{rg}(L))$.
   Or, $\min(\operatorname{rg}(C), \operatorname{rg}(L)) \leq \operatorname{rg}(C)$ et $\min(\operatorname{rg}(C), \operatorname{rg}(L)) \leq \operatorname{rg}(L)$, donc $\underline{r \leq \operatorname{rg}(C)}$ et $\underline{r \leq \operatorname{rg}(L)}$.
   D'autre part, au vu de leurs tailles, $\underline{\operatorname{rg}(C) \leq r}$ et $\underline{\operatorname{rg}(L) \leq r}$.
   Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(C) = r}$ et $\boxed{\operatorname{rg}(L) = r}$.
3. *On suppose que $\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(L) = r$.*
   Soit $u_C \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^n)$ (respectivement $u_L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^r)$) l'application linéaire canoniquement associée à C (respectivement L).
   Alors $u_C \circ u_L$ est l'application linéaire canoniquement associée à CL, donc à A (puisque $A = CL$)

d'où

$$\underline{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u_C \circ u_L)}.$$

Or, $u_L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^r)$ et $\mathrm{rg}(u_L) = \mathrm{rg}(L) = r$, donc $\underline{u_L \text{ est surjective}}$, d'où

$$\mathrm{Im}(u_C \circ u_L) = (u_C \circ u_L)(\mathbb{K}^n) = u_C(\mathbb{K}^r) = \mathrm{Im}(u_C)$$

et en passant aux dimensions, il vient : $\underline{\mathrm{rg}(u_C \circ u_L) = \mathrm{rg}(u_C)}$.

Par transitivité, on obtient $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u_C) = \mathrm{rg}(C) = r}$.

Remarque. *Puisque $u_C \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^n)$ est de rang r (par hypothèse), égale à $\dim(\mathbb{K}^r)$, on sait par théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker} u_C) = 0$ donc $\mathrm{Ker} u_C = \{0\}$, donc $\boxed{u_C \text{ injective}}$.*

Exercice 38. Endomorphisme de rang 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.*

1. *Soit D un supplémentaire de $\mathrm{Ker} v$ dans E.*
   Écrire la matrice de v dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker} v \oplus D$.
2. *En déduire $v^2 = (\mathrm{Tr} v)v$.*
3. *En déduire une condition nécessaire et suffisante (sur sa trace) pour que v soit un projecteur.*

Correction.

1. *Puisque E est de dimension finie n et $v \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1, on sait d'après le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(v)) = n - 1$ ($\mathrm{Ker}(v)$ est un hyperplan de E). Puisque D est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} v$ dans E, on a que $\dim(D) = 1$ donc D est une droite vectorielle de E (on sait aussi que tout supplémentaire de $\mathrm{Ker} v$ dans E est isomorphe à $\mathrm{Im}(v)$ donc est une droite vectorielle).*
   Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker} v \oplus D$. Ainsi,
   - *les $n - 1$ premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ sont dans $\mathrm{Ker} v$ donc leur image par v est nulle ;*
   - *$v(e_n) \in E$ donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $v(e_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.*

   D'où,

   $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \left[\begin{array}{c|c} & \alpha_1 \\ 0_{n,n-1} & \vdots \\ & \alpha_n \end{array}\right].}$$

2. *Avec les notations de la question précédente, on a :*

   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)^2 = \left[\begin{array}{c|c} & \alpha_1\alpha_n \\ 0_{n,n-1} & \vdots \\ & \alpha_n\alpha_n \end{array}\right] = \alpha_n \left[\begin{array}{c|c} & \alpha_1 \\ 0_{n,n-1} & \vdots \\ & \alpha_n \end{array}\right] = \alpha_n \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v).$$

   D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\alpha_n v)$.
   Ce qui se traduit en termes d'endomorphismes par l'égalité $\underline{v^2 = \alpha_n v}$. Par ailleurs, $\underline{\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\Big) = \alpha_n}$.

D'où $\boxed{v^2 = (\mathrm{Tr} v)v}$.

3. *D'après ce qui précède, on a les équivalences :*

$$v^2 = v \iff (\mathrm{Tr} v)v = v \iff (\mathrm{Tr}(v) - 1)v = 0 \iff \mathrm{Tr} v = 1,$$

où le sens direct de la dernière équivalence se justifie par le fait que $v \neq 0$ *(puisque* v *est de rang 1).*
Ainsi, $\boxed{v \text{ est un projecteur, si et seulement si, sa trace vaut } 1}$.

Exercice 39. Espaces stables d'un endomorphisme de rang 1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme de rang* 1.
Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ *est stable par* u *si et seulement si* $F \subset \mathrm{Ker} u$ *ou* $\mathrm{Im} u \subset F$.

Correction. *Le sens réciproque est clair.*
Soit F *un sous-espace vectoriel stable par* u. *On a* $u(F) \subset \mathrm{Im} u$, *et* $\dim(\mathrm{Im} u) = 1$, *donc* $\dim u(F) \in \{0, 1\}$.
On en déduit la disjonction de cas suivante :

- *si* $\dim u(F) = 0$, *alors on a* $F \subset \mathrm{Ker} u$;
- *si* $\dim u(F) = 1$, *alors on a* $u(F) = \mathrm{Im} u$ *par inclusion et égalité des dimensions, et la stabilité de* F *montre alors que* $\mathrm{Im} u = u(F) \subset F$, *ce qui conclut.*

Exercice 40. Variante d'un exercice très classique. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et soit* $a \in E$. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que*

$$\forall x \in E,\ u(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, a)\,.$$

Que dire de u *?*

Correction. *Distinguons deux cas.*

- *Si* $a = 0$, *c'est l'exercice classique.*
  Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E.

  D'après l'hypothèse, on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\forall i \in [\![1, n]\!] : u(e_i) = \lambda e_i$.

  En appliquant l'hypothèse au vecteur $e_1 + \cdots + e_n$, *on obtient par ailleurs l'existence d'un scalaire* $\Lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $u(e_1 + \cdots + e_n) = \Lambda(e_1 + \cdots + e_n)$.

  On a ainsi

  $$\begin{aligned} \Lambda(e_1 + \cdots + e_n) &= u(e_1 + \cdots + e_n) \\ &= u(e_1) + \cdots + u(e_n) \\ &= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n. \end{aligned}$$

  Par liberté, il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \Lambda$.

  L'endomorphisme u *coïncide donc avec* $\Lambda \mathrm{Id}_E$ *sur la base* $\mathscr{B}$, *ce qui prouve que* $\boxed{u = \Lambda \mathrm{Id}_E}$, *i.e.* $\boxed{u \text{ est une homothétie}}$.

- *Supposons maintenant* $a \neq 0$. *Alors la famille* (a) *est libre et on peut la compléter en une base* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* E, *avec* $a = e_1$ *et* $e_2, \ldots, e_n \in E$.

D'après l'hypothèse, on peut trouver des scalaires $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ u(e_i) = \mu_i e_1 + \lambda_i e_i.$$

En appliquant l'hypothèse au vecteur $e_2 + \cdots + e_n$, on obtient par ailleurs l'existence de deux scalaires $\Lambda, M \in \mathbb{K}$ tels que $u(e_2 + \cdots + e_n) = Me_1 + \Lambda(e_2 + \cdots + e_n)$. On a donc

$$\begin{aligned} Me_1 + \Lambda(e_2 + \cdots + e_n) &= u(e_2 + \cdots + e_n) \\ &= (\mu_2 + \cdots + \mu_n)e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \end{aligned}$$

Par liberté, il vient $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \Lambda$. On a donc

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ u(e_i) = \mu_i e_1 + \Lambda e_i.$$

Par ailleurs l'hypothèse implique l'existence d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_1) = \alpha e_1$. En posant $\mu_1 = \alpha - \Lambda$, on obtient donc en fait

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = \mu_i e_1 + \Lambda e_i.$$

En posant $m \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}e_1)$ l'application linéaire telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},(e_1)}(m) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix},$$

on a donc montré que les applications linéaires u et $\Lambda \mathrm{Id}_E + m$ coïncident sur $\mathscr{B}$, ce qui montre que

$$\boxed{u = \Lambda \mathrm{Id}_E + m}.$$

Autrement dit, (la réciproque étant claire,) dans tous les cas u est la somme d'une homothétie et d'une application linéaire à valeurs dans $\mathrm{Vect}\,(a)$.

Exercice 41. Théorème du rang appliqué à une restriction. *Soient $p \geq 2$, $n \geq 1$ deux entiers, E un espace vectoriel de dimension $(p+1)n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\mathrm{rg} f = pn$ et $f^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.*

Correction. *L'endomorphisme f induit une application surjective $\widetilde{f} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f^2)$ dont le noyau $\mathrm{Ker}\widetilde{f}$ est*

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f),$$

donc $\dim(\mathrm{Ker}\widetilde{f}) \leq \dim \mathrm{Ker}(f)$.
Or, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg} f = (p+1)n - pn = n$.
Donc $\dim(\mathrm{Ker}\widetilde{f}) \leq n$.

En particulier, le théorème du rang appliqué à l'application $\widetilde{f}$ montre que

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(f^2) &= \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker}(f)\cap \operatorname{Im}(f))\\ &\geq \operatorname{rg}(f) - \dim \operatorname{Ker}(f)\\ &\geq pn - n\\ &\geq (p-1)n.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $f^3 = 0$, on a $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$, ce qui montre que $\operatorname{rg}(f^2) \leq n$.
On en déduit l'encadrement

$$(p-1)n \leq \operatorname{rg}(f^2) \leq n.$$

Comme $p \geq 2$, on a $p-1 \leq 1$ et $n \geq 1$, dont on déduit $\boxed{p=2}$, puis $\boxed{\operatorname{rg}(f^2) = n}$.

Exercice 42. Trace et rang d'un projecteur. *Étant donné $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la trace de A comme la somme des coefficients sur la diagonale, c'est-à-dire* $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. *Montrer que $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.*
2. *En déduire que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(P^{-1}AP)$.*
   Remarque : ceci signifie que la trace est invariante par changement de base et permet de parler de la trace d'un endomorphisme. On définit alors la trace d'un endomorphisme comme la trace de sa matrice dans n'importe qu'elle base.
3. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur sur E. Montrer que :*

$$\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p).$$

Correction.

1. *Déjà fait en TD.*
2. *Déjà fait en cours.*
   Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a : $\operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{Tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(A)$ donc $\boxed{\text{deux matrices semblables ont la même trace}}$.
3. *Déjà fait en cours.*
   p est un projecteur de E donc $E = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p)$. Notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}$.
   $\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie donc possèdent des bases. Soient $r \in [\![0,n]\!]$, $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ et $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(p)$. Posons $\mathscr{B} := (e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$. Alors, par théorème, $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $E = \operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.

   Ainsi $\boxed{\operatorname{rg}(p) = r = \operatorname{Tr}(p)}$.

Exercice 43. Matrices équivalentes à J_r. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que **$A$ et B sont équivalentes** s'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence :*

$$A \text{ et } B \text{ sont équivalentes, si et seulement si, } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B).$$

1. *Montrer que deux matrices équivalentes ont le même rang.*
2. *Montrer que si A est de rang r alors A est équivalente à J_r, où* $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$.

   Indication : *Soit $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application canoniquement associée à A. Notons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement. On a déjà remarqué que deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire mais dans des bases différentes. Il suffit donc de trouver des bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ (resp. de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$) telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = J_r$.*
3. *Conclure.*

Correction.

1. *Si A et B sont équivalentes, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. Or, on sait que le rang d'une matrice est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible donc $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(QAP) = \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$. Cela montre le sens direct.*

2. **Correction 1.**

   - *On a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = r \leq \min(n,p)$ donc d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(u) = p - r$.*
   - *$\mathrm{Ker}(u)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, donc il possède des bases. Considérons $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. En particulier, c'est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ donc d'après le TBI, on peut la compléter en une base $\mathscr{B}' := (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$.*
   - *La famille $(f_1 := u(e_1), \dots, f_r := u(e_r))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.*

     Justification 1 (th du rang géom). $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\,(e_{r+1}, \dots, e_p)$ *et en notant $S = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_r)$, on a $\mathbb{K}^p = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$. Donc $u_{|S}$ est linéaire et injective, et $(e_1, \dots, e_r)$ est libre donc $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est libre.*

     1(bis). *On sait même que $u_{|S}^{|\mathrm{Im} u}$ est un isomorphisme, et $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de S, donc $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im} u$, donc a fortiori une famille libre.*

     Justification 2 (Im). $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_r))$ *car les derniers vecteurs de $\mathscr{B}'$ sont dans le noyau de u. Or, $\mathrm{rg}(u) = r$ donc $\mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_r)) = r$, donc la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est libre.*

     Justification 3 (à la main). *Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i = 0$. Par linéarité de u, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \in \mathrm{Ker}(u)$ donc il existe $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = \sum_{j=r+1}^{p} \alpha_j e_j$. Or, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^p$, donc en particulier une famille libre, d'où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 0$.*

     D'après le TBI, on peut la compléter en une base $\mathscr{C}' := (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

   Correction 2.

- *Soient* $(f_1, \ldots, f_r)$ *une base de* $\mathrm{Im}(u)$ *et* $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ *une base de* $\mathrm{Ker}(u)$. *Par définition de l'image de* u, *il existe* $(e_1, \ldots, e_r) \in \mathbb{K}^r$ *tel que pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$, $u(e_i) = f_i$.
  Remarque. *On rappelle les résultats suivants :*
  - *si* $(e_i)_i$ *est liée et* u *linéaire, alors* $(u(e_i))_i$ *est liée.*
  - *par contraposée, si* u *est linéaire et* $(u(e_i))$ *est libre, alors* (e_i) *est libre.*
- *Posons* $\mathscr{B}' := (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$, *et montrons que* $\mathscr{B}'$ *est une base de* $\mathbb{K}^p$.
  Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i + \sum_{j=r+1}^{p} \alpha_j e_j = 0$. *Alors en appliquant* u, *qui est linéaire, on obtient :* $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i + 0 = 0$. *Or,* $(f_1, \ldots, f_r)$ *est libre donc* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. *On en déduit que* $\sum_{i=r+1}^{p} \alpha_j e_j = 0$. *Or,* $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ *est libre donc* $\alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_p = 0$. *Ainsi,* $\mathscr{B}'$ *est libre. Comme de plus,* $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = p = \dim(\mathbb{K}^p)$, $\underline{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{K}^p}$.
- *Pour finir,* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *et* $(f_1, \ldots, f_r)$ *une base de* $\mathrm{Im}(u)$ *donc une famille libre de* $\mathbb{K}^n$, *que l'on peut compléter en une base* $\mathscr{C}'$ *de* $\mathbb{K}^n$ *grâce au TBI.*
- *Par construction de* $\mathscr{B}'$ *et* $\mathscr{C}'$, *on a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = J_r$, *ce qui conclut.*

Conclusion. *Par construction, on a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = J_r$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$. *Alors, d'après le cours, on a* $J_r = (P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'})^{-1} A P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. *Puisqu'une matrice de passage est inversible, on a bien* $\boxed{A \text{ et } J_r \text{ sont équivalentes}}$.

3.
- *Dans la question 1., on a montré le sens direct.*
- *Montrons le sens indirect : supposons que* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = r$. *D'après 2.,* A *et* B *sont toutes les deux équivalentes à* J_r. *Donc il existe* $Q_1, Q_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $P_1, P_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $A = Q_1 J_r P_1$ *et* $B = Q_2 J_r P_2$. *On peut donc écrire* $J_r = Q_1^{-1} A P_1^{-1}$ *et* $B = Q_2(Q_1^{-1} A P_1^{-1}) P_2 = QAP$, *avec* $Q = Q_2 Q_1^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $P = P_1^{-1} P_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, *ce qui prouve que* A *et* B *sont équivalentes.* <u>*On a donc montré le sens indirect*</u>.

$\boxed{\text{En conclusion, on a l'équivalence annoncée}}$.