Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. EDL1 à coefficients constants. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles*

a) $y' + y = x^2 \quad (E_1)$ *b)* $y' + y = 2\sin x \quad (E_2)$ *c)* $y' + y = x^2 + 2\sin x \quad (E_3)$

Pour les trois équations différentielles, $\boxed{S(H) = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$. *Il reste à déterminer une solution particulière.*

a)
- *Première méthode : on cherche une solution du même type que le second membre, i.e. polynomiale.* $y_P : x \mapsto x^2 + ax + b \in S(E_1) \Leftrightarrow a = -2$ *et* $b = 2$. *Ainsi,* $x \mapsto x^2 - 2x + 2 \in S(E_1)$.
- *Deuxième méthode : Variation de la constante. Soit* $y_P(x) = \lambda(x)e^{-x}$ *avec* λ *dérivable.*
  $y_P \in S(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = x^2e^x$.
  Deux IPPs donnent $\int x^2e^x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$ *donc* $\lambda(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ *puis* $y_P(x) = x^2 - 2x + 2$.

Dans tous les cas, $\boxed{S(E_1) = \{(x \mapsto x^2 - 2x + 2 + \lambda e^{-x}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

b)
- *Première méthode : le second membre est du type* $\mathrm{Im}(2e^{ix})$. *On introduit* $(E_{\mathbb{C}}) : y' + y = 2e^{ix}$ *: cas favorable où* i *n'est pas racine de* $X + 1$. *Donc on peut chercher une solution particulière de* $(E_{\mathbb{C}})$ *de la forme* $y_P : x \mapsto Ce^{ix}$. $y_P \in S(E) \Leftrightarrow C = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$. *Ainsi,* $x \mapsto (1-i)e^{ix} \in S(E_{\mathbb{C}})$ *puis sa partie imaginaire* $x \mapsto \sin x - \cos x \in S(E_2)$.
- *Deuxième méthode : Variation de la constante. Soit* $y_P(x) = \lambda(x)e^{-x}$ *avec* λ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *à déterminer.*
  $y_P \in S(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{-x} = 2\sin x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 2\sin x e^x = \mathrm{Im}(2e^{(1+i)x})$.
  Or, $\int 2e^{(1+i)x} = (1-i)e^{(1+i)x}$. *Posons donc* $\lambda : x \mapsto (\sin x - \cos x)e^x$. *Alors* $y_P : x \mapsto \sin x - \cos x$ *est une solution de* (E_2).

Dans tous les cas, $\boxed{S(E_2) = \{(x \mapsto \sin x - \cos x + \lambda e^{-x}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

c) Superposons les solutions particulières précédentes pour avoir une solution particulière de (E_3). *Puis,*
$\boxed{S(E_3) = \{(x \mapsto x^2 - 2x + 2 + \sin x - \cos x + \lambda e^{-x}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 2. Ouvrez les yeux ! *Résoudre sur* $]-1,+\infty[$ *l'équation différentielle*

$$(t^2+3t+2)y'+(2t+3)y=\frac{1}{1+t^2} \quad (E)$$

Posons $u: t \mapsto t^2+3t+2$. *Alors* $u': t\mapsto 2t+3$.
Soit $y \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$. *On remarque que :*

$$\begin{aligned} y\in S(E) &\Leftrightarrow \forall t \in]-1,+\infty[, (uy)'(t)=\frac{1}{1+t^2} \\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R},\ \forall t\in]-1,+\infty[, (uy)(t)=\arctan t + C \\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R},\ \forall t\in]-1,+\infty[,\ y(t)=\frac{\arctan t + C}{t^2+3t+2} \qquad \textit{car } \forall t\in]-1,+\infty[, t^2+3t+2>0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S(E)=\left\{\left(t\mapsto \frac{\arctan t + C}{t^2+3t+2}\right) \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}}$.

Exercice 3. Un calcul de primitive et EDL1 avec variation de la constante.

1. *Montrer qu'une primitive de* $t\mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ *sur* $]0,\pi[$ *est* $t\mapsto \ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right|$.

   (a) *en utilisant l'angle moitié ;*

   Si $t \in]0,\pi[$, $\frac{t}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$ *donc* $\cos\frac{t}{2}>0$ *et* $\tan\frac{t}{2}$ *est bien défini.*
   Par factorisation par l'angle moitié, on obtient : $\sin(t)=\dfrac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$ *donc*

   $$\frac{1}{\sin t}=\frac{1+\tan^2\frac{t}{2}}{2\tan\frac{t}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})}{\tan\frac{t}{2}}=\frac{u'}{u},\ \textit{avec } u: t\mapsto \tan\frac{t}{2},$$

   $\boxed{\textit{dont une primitive est } \ln|u| \textit{ i.e. } t\mapsto \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|}$.

   (b) *en utilisant le changement de variables* $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ *(ce qui revient aussi à faire apparaître l'angle moitié).*

   Soit $x\in]0,\pi[$. *Calculons* $\displaystyle\int_{\pi/2}^{x}\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$. *Rappelons que :*

   $$\forall t\in]0,\pi[,\quad \sin t=\frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \iff \frac{1}{\sin t}=\frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

   Ainsi,

   $$\int_{\pi/2}^{x}\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{x}\frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

   Si on ne reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$, *on peut faire le changement de variable* $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$. $\varphi: t\mapsto$

$\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$. *Alors :*

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\ln|\varphi(t)|\right]_{\pi/2}^{x} = \left[\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right]_{\pi/2}^{x} = \ln\left(\tan\left|\frac{x}{2}\right|\right) - 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{une primitive de } \dfrac{1}{\sin} \text{ sur }]0,\pi[\text{ est la fonction : } \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \end{array}}$

2. *Résoudre sur* $]0,\pi[$ *l'équation différentielle :* $\sin(t)y' + y = t\sin(t)(1+\cos(t))$.

- $\sin(t)$ *ne s'annule pas sur* $]0,\pi[$ *donc il faut résoudre l'équation* (E) *:* $y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{a(t)} y = \underbrace{t(1+\cos t)}_{b(t)}$.

- *Résolution de l'équation homogène* (H) *:* $y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{a(t)} y = 0$.

  $A(t) = \int \frac{1}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right)$ *donc*

  $\boxed{S(H) = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda\in\mathbb{R}\} = \left\{\left(t \mapsto \frac{\lambda}{\tan\frac{t}{2}}\right) \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$.

- *Trouvons une solution particulière de l'équation de départ : on utilise la méthode de la variation de la constante* (λ).

  $y_P(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} \in S(E) \Leftrightarrow y_P'(t) + a(t)y_P(t) = b(t) \Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

  Il faut donc choisir λ *tel que :* $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.

  - *On calcule* $\int b(t)e^{A(t)}$ *:*

    $\int b(t)e^{A(t)} = \int t(1+\cos t)\tan\frac{t}{2} = \int t\times 2\cos^2\frac{t}{2}\times\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = \int t\times 2\cos\frac{t}{2}\times\sin\frac{t}{2} = \int t\sin t$.

    Une IPP donne : $\int t\sin t = -t\cos t + \sin t$.

  - *Dès lors,* $\boxed{y_P(t) = (\sin t - t\cos t)\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \text{ est une solution particulière}}$.

- $S(E) = y_0(t) + S(H)$ *donc* $\boxed{S(E) = \left\{\left(t \mapsto \frac{\sin t - t\cos t + \lambda}{\tan\frac{t}{2}} \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right)\right\}}$

Exercice 4. Recollement de solutions. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - y = 0$.*

Notons

$$(H) : \forall x \in \mathbb{R},\ xy'(x) - y(x) = 0,\ (H_1) : \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y'(x) - \tfrac{1}{x}y(x) = 0,$$
$$(H_2) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) - \tfrac{1}{x}y(x) = 0.$$

- *Résolvons (H_1) et (H_2). On peut voir que Id est solution de (H) donc $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}$ est solution de (H_1) et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (H_2). Par un argument de dimension, on a $\boxed{S(H_1) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}\right)}$ et $\boxed{S(H_2) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}\right)}$.*

  Sinon, avec les notations du cours, on a $a : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ dont une primitive est $A : x \mapsto -\ln|x|$.

  Donc $\boxed{S(H_1) = \{(x \mapsto \lambda_1(-x))\ \mid\ \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}\right)}$ et $\boxed{S(H_2) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}\right)}$.

- *Notons $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$ l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de (H) et déterminons cet ensemble par analyse-synthèse ou double inclusion.*

  - *Soit $y \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$. En particulier, la restriction $y_{|\mathbb{R}_-^*}$ est solution de (H_1) et la restriction $y_{|\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (H_2). Ainsi, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_{|\mathbb{R}_-^*} = \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_-^*}$ et $y_{|\mathbb{R}_+^*} = \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.*
    Déterminons $y(0)$. A l'aide de l'équation (H), on a : $0 \times y'(0) - y(0) = 0$ donc $y(0) = 0$.
    Ainsi, y est totalement déterminée sur $\mathbb{R}$, et $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) \subset \left\{ \left(x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x & si\ x \leq 0 \\ \lambda_2 x & si\ x > 0 \end{cases} \right) \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

  - *Réciproquement, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x & si\ x \leq 0 \\ \lambda_2 x & si\ x > 0. \end{cases}$*
    y est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et d'après l'étude préliminaire, y est solution de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
    Montrons que y est dérivable en 0 et solution de (H) en 0. On revient à la définition de la dérivabilité en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $T_0(x) = \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lambda_1 & si\ x < 0 \\ \lambda_2 & si\ x > 0 \end{cases}$

    $\displaystyle\lim_{x\to 0, x>0} T_0(x) = \lambda_2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0, x<0} T_0(x) = \lambda_1$.

    - *1er cas : Si $\lambda_2 \neq \lambda_1$, alors y n'est pas dérivable en 0 et $y \notin S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$.*
    - *2ème cas : Si $\lambda_2 = \lambda_1$, alors y est dérivable en 0 et $y'(0) = \lambda_2$. De plus, $0 \times y'(0) - y(0) = 0$. Donc $y \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$.*

  - *Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \{\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\right)}$ et $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1.*

Exercice 5. Recollement de solutions. *Résoudre sur* $]-\infty,1[$ *l'équation différentielle*

$$x(x-1)y'+2y=x^2.$$

- *On résout l'équation (H) sur* $I_1=]-\infty,0[$ *et* $I_2=]0,1[$. *(H) :* $\quad y'+\dfrac{2}{x(x-1)}y=0.$

  $A(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2}{t(t-1)}\mathrm{d}t=\int_0^x 2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=2(\ln|x-1|-\ln|x|)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=-\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2.$

  Donc $\boxed{S_{I_k\to\mathbb{R}}(H)=\left\{\left(x\mapsto\lambda_k\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right)\ \Big|\ \lambda_k\in\mathbb{R}\right\}}.$

- *On résout l'équation (E) sur* $I_1=]-\infty,0[$ *et* $I_2=]0,1[$ *en faisant varier la constante* λ_k *:*

  $y_0(x)=\lambda_k\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\in S_{I_k\to\mathbb{R}}(E)\Leftrightarrow\lambda_k'(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}e^{A(x)}=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\lambda_k(x)=x-\ln|x|.$

  Donc $y_0(x)=(x-\ln|x|)\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ *pour tout* $x\in I_k$.

  Ainsi, $\boxed{S_{I_k\to\mathbb{R}}(E)=\left\{\left(x\mapsto(x-\ln|x|+\lambda_k)\dfrac{x^2}{(x-1)^2}\right)\ \Big|\ \lambda_k\in\mathbb{R}\right\}}.$

- *Résolution de (E) sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *par analyse-synthèse / double inclusion :*
  Soit $y\in S_{]-\infty,1[\to\mathbb{R}}(E)$. *En particulier,* $y\in S_{I_k\to\mathbb{R}}(E)$ *donc il existe* $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, *tels que* $y(x)=(x-\ln|x|+\lambda_1)\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ *sur* I_1 *et* $y(x)=(x-\ln|x|+\lambda_2)\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ *sur* I_2.
  Déterminons $y(0)$ *:* $0\times(-1)\times y'(0)+2\times y(0)=0$ *donc* $y(0)=0$.
  Ainsi, y est totalement déterminée.

  Réciproquement, soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ *et* $y:x\mapsto\begin{cases}(x-\ln|x|+\lambda_1)\dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ (x-\ln|x|+\lambda_2)\dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}.$

  y est dérivable sur I_1 *et* I_2 *et solution de (E) sur* I_1 *et* I_2.
  Montrons que y est dérivable en 0 et solution de (E) en 0. On revient à la définition de la dérivabilité en 0. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

  $T_0(x)=\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\begin{cases}(x-\ln|x|+\lambda_1)\dfrac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x<0\\ (x-\ln|x|+\lambda_2)\dfrac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x>0\end{cases}.$

  $\displaystyle\lim_{x\to0,x\neq0}T_0(x)=0$ *donc y est dérivable en 0 et* $y'(0)=0$. *De plus,* $0\times y'(0)-y(0)=0$. *Donc* $y\in S_{]-\infty,1[\to\mathbb{R}}(E)$.

- *Ainsi, en notant* $y_p:x\mapsto\begin{cases}(x-\ln|x|)\dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$, $y_1:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x\in[0,1[\end{cases}$,

  et $y_2:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leq0\\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$, *on a* $\boxed{S_{]-\infty,1[\to\mathbb{R}}(E)=\{y_p+\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}},$

i.e. un plan affine.

Exercice 6. Problème de Cauchy. *Résoudre le problème de Cauchy* $\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \\ x > -1 \end{cases}$.

- *Sur* $I =]-1, +\infty[$, *l'équation équivaut à* $y' - \dfrac{x}{x+1}y = \dfrac{-1}{x+1}$ $\quad (E)$. *Soit* $y' - \dfrac{x}{x+1}y = 0 \quad (H)$ *son équation différentielle homogène associée.*

- *Résolvons* (E) *: Une primitive de* $x \mapsto -\dfrac{x}{x+1}$ *est* $x \mapsto -x + \ln|x+1|$.
  Donc $S_I(H) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{x - \ln(x+1)}\right) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}\right)$. *Vérif OK.*
  Trouvons une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
  Soit C *une fonction dérivable sur* I *à déterminer et* $y_p : x \mapsto C(x)\dfrac{e^x}{x+1}$. *On a :*

  $$y_p \in S_I(E) \Leftrightarrow C'(x)\frac{e^x}{x+1} = \frac{-1}{x+1} \Leftrightarrow C'(x) = -e^{-x}.$$

  Prenons donc $C : x \mapsto e^{-x}$. *Dès lors,* $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ *est une solution de* (E). *Vérif OK.*
  Ainsi, $\boxed{S_I(E) = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{Ce^x}{x+1} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \dfrac{1+Ce^x}{x+1} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$.

- *Résolvons le problème de Cauchy. D'après le cours, tout problème de Cauchy admet une unique solution. Soit* y *l'unique solution de ce problème de Cauchy. Alors en particulier,* y *est un solution de l'équation différentielle* (E) *donc il existe* $C \in \mathbb{K}$ *tel que pour tout* $x \in I$, $y(x) = \dfrac{1+Ce^x}{x+1}$. *La condition* $y(0) = 2$ *implique que* $C+1 = 2$ *donc* $C = 1$ *d'où* $\boxed{x \mapsto \dfrac{1+e^x}{x+1} \text{ est l'unique solution du problème de Cauchy}}$.

Exercice 7. Problème de Cauchy caché. *On considère* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$.

1. *Montrer qu'il existe une unique application continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$
2. *Expliciter* f *dans le cas où* $g : x \mapsto x^2$.

Correction.

1. *On procède par analyse-synthèse.*
   - *Supposons qu'il existe* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.
     La fonction $x \mapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *(d'après le théorème fondamental de l'analyse, en tant que primitive d'une fonction continue), tout comme* g, *donc* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
     En dérivant f, *on obtient :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g'(x) + xf(x)$.

De plus, $f(0) = g(0)$ donc $\underline{f \text{ est l'unique solution du problème de Cauchy}}$:

$$\begin{cases} y' - xy = g'(x) \quad (E) \\ y(0) = g(0). \end{cases} \qquad (\star)$$

Voilà qui assure l'unicité de f, en cas d'existence (même si f est définie de manière implicite). **Attention :** *on n'a pas encore l'existence de la solution de cet exercice (mais on a existence d'une solution du problème de Cauchy précédent).*

- *Soit f la solution du problème de Cauchy ci-dessus.*
  Montrer que f est solution de cet exercice.
  Puisque f vérifie (E), f est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x) + xf(x)$.
  Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t + f(0) \\ &= \int_0^x (g'(t) + tf(t))\mathrm{d}t + f(0) \\ &= g(x) - g(0) + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + f(0) \\ &= g(x) + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{car } f(0) = g(0). \end{aligned}$$

  Donc $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et vérifie l'équation fonctionnelle, donc f est solution de cet exercice. Cela montre l'existence d'une telle fonction.

- **Remarque.** $\boxed{\textit{On a montré l'existence et l'unicité de } f}$ *et aussi que f est la solution du problème de Cauchy $(\star)$.*

2. *Explicitons f dans le cas où $g(x) = x^2$.*

   - *On a montré que f est l'unique solution du problème de Cauchy :* $\begin{cases} y' - xy = 2x \\ y(0) = 0. \end{cases}$
   - *$\underline{\text{On résout } (E) : y' - xy = 2x.}$*
     Une solution particulière évidente est $x \mapsto -2$.
     $a(x) = -x$; $\quad A(x) = \int_0^x a(t)\mathrm{d}t = \int_0^x -t\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2}$. Donc $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \{x \mapsto \lambda e^{x^2/2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
     Puis $\underline{S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E) = \{(x \mapsto \lambda e^{x^2/2} - 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$
   - *Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{x^2/2} - 2$. La condition $f(0) = 0$ implique que $\lambda = 2$ donc $\boxed{f(x) = 2(e^{x^2/2} - 1).}$*

Exercice 8. Une équation fonctionnelle avec dérivabilité.
Le but de cet exercice est de déterminer $E = \left\{ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(s+t) = f(s)f(t) \right\}$.

1. *Donner des exemples d'éléments de* E.
2. *Soit* $f \in F$.
   (a) *Montrer que* $f(0) \in \{0,1\}$.
   (b) *Montrer que si* $f(0) = 0$*, alors* $f = 0$.
   (c) *Montrer que* $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f'(s+t) = f'(s)f(t)$.
   (d) *En déduire une équation différentielle vérifiée par* f*, puis une expression de* f.
3. *Conclure.*

Correction.

1. *La fonction nulle et l'exponentielle sont toutes deux clairement éléments de* E.
2. (a) *En appliquant la* $\forall$*-assertion* $\forall s,t \in \mathbb{R},\ f(s+t) = f(s)f(t)$ *à* $s = t = 0$*, on obtient* $f(0) = f(0)^2$*, c'est-à-dire* $f(0) \in \{0,1\}$.
   (b) *En appliquant la* $\forall$*-assertion* $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(s+t) = f(s)f(t)$ *à* $s = 0$*, on obtient la* $\forall$*-assertion* $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(0)\, f(t)$.
   Si $f(0) = 0$*, cela entraîne que* f *est la fonction nulle.*
   (c) *Fixons* $t \in \mathbb{R}$.
   Les fonctions $s \mapsto f(s+t)$ *et* $s \mapsto f(s)f(t)$ *sont toutes les deux dérivables (par opérations) et elles sont égales, car* f *est supposée appartenir à* E.
   Leurs dérivées, $s \mapsto f'(s+t)$ *et* $s \mapsto f'(s)f(t)$*, sont donc égales, ce qui se réécrit sous la forme de l'assertion*
   $$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f'(s+t) = f'(s)f(t).$$
   (d) *En appliquant la* $\forall$*-assertion que l'on vient de démontrer à* $s = 0$*, on obtient*
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(0)\, f(t),$$
   c'est-à-dire, en posant $\tau = f'(0)$*, que* f *est solution de l'équation différentielle* $y' = \tau y$.
   Les solutions de cette équation différentielle homogène formant la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto e^{\tau x})$*, on en déduit qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $f : x \mapsto \lambda e^{\tau x}$.
   La condition $f(0) \in \{0,1\}$ *entraîne alors que* $\lambda = 0$ *(auquel cas* $f = 0$*) ou* $\lambda = 1$.
   Autrement dit, $\boxed{f \in \{0\} \cup \left\{ x \mapsto e^{\tau x} \;\middle|\; \tau \in \mathbb{R} \right\}}$.
3. *On vient de montrer que* $E \subset \{0\} \cup \left\{ x \mapsto e^{\tau x} \;\middle|\; \tau \in \mathbb{R} \right\}$.
   Réciproquement, on vérifie sans difficulté que, quel que soit $\tau \in \mathbb{R}$*, la fonction* $x \mapsto e^{\tau x}$ *est élément*

de E. On en déduit donc que $\boxed{E = \{0\} \cup \left\{ x \mapsto e^{\tau x} \;\middle|\; \tau \in \mathbb{R} \right\}}$.

Exercice 9. Une équation intégrale. *Déterminer* $\left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f \right\}$.

Correction. *On procède par analyse et synthèse.*

Analyse. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f$.*

Les fonctions f' et $x \mapsto \int_0^1 f - f(x)$ sont donc égales. En particulier, la deuxième étant de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations, on obtient que f' est également de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^2$. (En itérant ce raisonnement, on pourrait même montrer que f et f' sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais ça n'est pas nécessaire.)

La fonction $f' + f$ est donc constante, donc $(f' + f)' = 0$, et comme f et f' sont dérivables, on a

$$f'' + f' = 0.$$

Autrement dit, la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' + y' = 0$, que le cours permet de résoudre : après résolution de l'équation caractéristique, on trouve que l'ensemble de ses solutions est $\mathscr{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

On peut donc trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu$.

Synthèse. *Réciproquement, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et posons $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu$. On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned}
f \text{ vérifie la condition de l'énoncé} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-\lambda e^{-x}) + (\lambda e^{-x} + \mu) = \int_0^1 \left(\lambda e^{-t} + \mu\right) \mathrm{d}t \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mu = \lambda \int_0^1 e^{-t}\, dt + \mu \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^1 = 0 \\
&\iff \lambda \left(1 - e^{-1}\right) = 0 \\
&\iff \lambda = 0.
\end{aligned}$$

En résumé, seules les constantes vérifient la condition de l'énoncé, c'est-à-dire que l'on a montré l'égalité

$$\boxed{\left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' + f = \int_0^1 f \right\} = \{x \mapsto \kappa \mid \kappa \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(1)}.$$

Exercice 10. Solutions périodiques. *Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et périodiques de période 1. Déterminer les solutions 1-périodiques de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ $\quad(E)$.*

1. *Résolution de (E) : (H) : $y' - a(x)y = b(x)$ donc $S(H) = \mathrm{Vect}\left(e^{-A}\right)$ où $A = -\int_0^x a$ est la primitive de $-a$ qui s'annule en 0.*
   La variation de la constante implique que $x \mapsto \left(\int_0^x be^A\right) e^{-A}$ est une solution particulière de (E).
   $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont donc les } \{y_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ où } y_\lambda : x \mapsto e^{-A(x)}\left(\lambda + \int_0^x be^A\right)}$.

2. *Détermination des solutions 1-périodiques de (E) : soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.*

$$y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) = e^{-A(x+1)}\left(\lambda + \int_0^{x+1} be^A\right) - e^{-A(x)}\left(\lambda + \int_0^x be^A\right).$$

- *D'après la relation de Chasles :*

$$A(x+1) = -\int_0^{x+1} a = -\left(\int_0^x a + \int_x^{x+1} a\right) = -\int_0^x a - \int_0^1 a,$$

  car a est 1-périodique donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+1} a = \int_0^1 a =: \alpha$. Ainsi, $\boxed{A(x+1) = A(x) - \alpha}$, avec $\alpha = \int_0^1 a$.

- *D'après la relation de Chasles :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{x+1} be^A &= \underbrace{\int_0^1 be^A}_{=:\beta} + \int_1^{x+1} b(t)e^{A(t)}\mathrm{d}t \\
&= \beta + \int_0^x b(u+1)e^{A(u+1)}\mathrm{d}u \qquad \textit{(chgt de variable u=t-1)} \\
&= \beta + \int_0^x b(u)e^{A(u)-\alpha}\mathrm{d}u \\
\boxed{\int_0^{x+1} be^A} &= \boxed{\beta + e^{-\alpha}\int_0^x be^A}.
\end{aligned}$$

- *Ainsi :*

$$\begin{aligned}
y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) &= e^{-A(x)}e^{\alpha}\left(\lambda + \beta + e^{-\alpha}\int_0^x be^A\right) - e^{-A(x)}\left(\lambda + \int_0^x be^A\right) \\
&= e^{-A(x)}\left(\lambda e^{\alpha} + \beta e^{\alpha} + \int_0^x be^A - \lambda - \int_0^x be^A\right) \\
&= e^{-A(x)}\left[\lambda(e^{\alpha} - 1) + \beta e^{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

  Comme $x \mapsto e^{-A(x)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$$y_\lambda \text{ est 1-périodique} \iff \lambda(e^{\alpha} - 1) + \beta e^{\alpha} = 0.$$

Remarque : α, β sont des données de l'énoncé donc il faut trouver les $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifient cette équation.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0, \text{ alors l'unique solution 1-périodique de } (E) \text{ est } y_{\lambda_0} \text{ où } \lambda_0 = \frac{\beta e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}}}$.
- *Si $\alpha = 0$, alors y_λ est 1-périodique $\iff \beta e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ donc :*
  - $\boxed{\text{Si } \beta = 0, \text{ toutes les solutions de } (E) \text{ sont 1-périodiques}}$.
  - $\boxed{\text{Si } \beta \neq 0, \text{ il n'y a aucune solution de } (E) \text{ 1-périodique}}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions 1-périodique de (E), noté S vaut :

$$\boxed{S = \begin{cases} \left\{ y_{\frac{\beta e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}} \right\} & \text{si } \alpha \neq 0; \\ S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E) & \text{si } (\alpha,\beta) = (0,0) \\ \varnothing & \text{si } \alpha = 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^*. \end{cases}}.$$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 11. Noyau d'endomorphisme. *Soit* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' - 3f' + 2f \end{array}$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

- *φ est linéaire car la dérivation est linéaire. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors f' et f'' le sont aussi et toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ est encore $\mathscr{C}^\infty$ donc $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi,* $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))}$.

- *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a : $f \in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow f'' - 3f' + 2f = 0 \quad (H)$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de racines 1 et 2. Par suite,* $\boxed{\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}\right) = \{x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{2x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 12. Solution particulière évidente. *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle*

$$y'' + y' + y = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + \ln t.$$

Correction.

- $\ln$ *est une solution particulière évidente.*

- *On résout $(H) : y'' + y' + y = 0$*

  $P = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2) = (X - j)(X - \bar{j})$ *avec* $j = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

  $S_{]0,+\infty[\to\mathbb{R}}(H) = \left\{ t \mapsto e^{-t/2} \left(\alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right) \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- $\boxed{S_{]0,+\infty[\to\mathbb{R}}(E) = \left\{ t \mapsto e^{-t/2} \left(\alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t) \right) + \ln t \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$ *et*

$$\boxed{S_{]0,+\infty[\to\mathbb{C}}(E) = \left\{t \mapsto Ae^{jt} + Be^{\bar{j}t} + \ln t \;\middle|\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Exercice 13. Une EDL1 cachée. *Résoudre, sur tout intervalle ne contenant pas -1, l'équation différentielle*

$$(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0 \qquad (E)$$

Soient I un intervalle ne contenant pas -1 et $y \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$.
$y \in S(E) \iff z = y' \in S(E')$ où

$$(E') : z' + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{=:a(x)} z = \frac{2}{(1+x)^2}.$$

Une primitive de a est $A : x \mapsto \ln|1+x|$ donc

$$S(H') = \mathrm{Vect}\left(e^{-A}\right) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{|1+x|}\right) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{1+x}\right).$$

Une VdC donne : $C' = be^A = \left(x \mapsto \dfrac{2}{1+x}\right)$ dont une primitive est $x \mapsto 2\ln|1+x|$ i.e. $x \mapsto \ln((1+x)^2)$ puis une solution particulière de (E') est $x \mapsto \dfrac{2\ln|1+x|}{1+x}$. Ainsi, $\boxed{S(E') = \left\{x \mapsto \dfrac{2\ln|1+x|}{1+x} + \dfrac{C}{1+x} \;\middle|\; C \in \mathbb{K}\right\}}$.
Les solutions de (E) sont obtenues en prenant les primitives des solutions de (E') donc :

$$\boxed{S(E) = \left\{x \mapsto (\ln|1+x|)^2 + C\ln|1+x| + D \;\middle|\; (C,D) \in \mathbb{K}^2\right\}}.$$

(de la forme $2vv'$ avec $v : x \mapsto \ln|1+x|$).

Exercice 14. Cas favorables. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles*

$$y'' + y = \sin(t) \qquad (E_1) \qquad et \qquad y'' + y = t\sin(t) \qquad (E_2).$$

Correction.

- *On résout $(H) : y'' + y = 0$. $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \{(t \mapsto A\cos t + B\sin t) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.*
- *On résout $(E_1) : y'' + y = \sin t$ en complexifiant le problème. Soit $(E_\mathbb{C}) : y'' + y = e^{it}$ (cas favorable). $P = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$. i est racine simple de P donc on cherche une solution particulière de $(E_\mathbb{C})$ de la forme $y_P : t \mapsto Cte^{it}$ avec $C \in \mathbb{C}$ à déterminer.*
  En calculant les dérivées y_P' et y_P'', on trouve que $y_P \in S(E_\mathbb{C}) \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2}$.
  Ainsi, $\mathrm{Im}(y_P) : t \mapsto \mathrm{Im}\left(-\dfrac{t}{2}i(\cos t + i\sin t)\right) = -\dfrac{t}{2}\cos t \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_1)$.
  $\boxed{S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_1) = \left\{t \mapsto A\cos t + B\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

- *On résout* $(E_2) : y'' + y = t\sin t$ *en complexifiant le problème. Soit* $(E_{\mathbb{C}}) : y'' + y = te^{it}$ *(cas favorable).*
  $P = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$. i *est simple racine de* P *donc on cherche une solution de la forme* $y_P(t) = t(at+b)e^{it}$.
  On trouve que $a = -\dfrac{i}{4}$ *et* $b = \dfrac{1}{4}$. *Dès lors,* $y_P : t \mapsto \dfrac{t}{4}(1-it)(\cos t + i\sin t) \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}})$ *et*
  $\mathrm{Im}(y_P) : t \mapsto \dfrac{t}{4}(\sin t - t\cos t) \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_2)$.
  $\boxed{S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(E_2) = \left\{t \mapsto A\cos t + B\sin t + \dfrac{t}{4}(\sin t - t\cos t) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 15. Second membre polynomial. *Résoudre sur* $\mathbb{K}$ *les équations différentielles :*

1. $y'' + y' = 3 + 2x \qquad (E_1)$
2. $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3 \qquad (E_2)$

Indication : *on pourra chercher une solution particulière du même type que le second membre, c'est-à-dire polynomiale.*

1. $P_1 = X^2 + X = X(X+1)$ *donc* $S(H_1) = \{x \mapsto A + Be^{-x} \mid (A,B) \in \mathbb{K}^2\}$.
   Soit $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *avec* $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ *à déterminer. On a* $y_p' : x \mapsto 2ax + b$ *et* $y_p'' : x \mapsto 2a$ *donc*
   $$y_p \in S(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + 2b = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$
   On a une infinité de solutions particulières, les $x \mapsto 2x^2 + 2x +$ *avec* $c \in \mathbb{K}$.
   $\boxed{S(E_1) = \{2x^2 + 2x + A + Be^{-x} \mid (A,B) \in \mathbb{K}^2\}}$.
2. $P_2 = X^2 + 4 = (X-2i)(X+2i)$ *donc* $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(H_2) = \{x \mapsto Ae^{2ix} + Be^{-2ix} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}$ *et* $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H_2) = \{x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Soit $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ *à déterminer.* $y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ *et* $y_p''(x) = 6ax + 2b$ *donc*
   $$y_p \in S(E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 4ax^3 + 4bx^2 + (6a+4c) + (4d+2b) = -4x^3 - 8x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ 4b = -8 \\ 6a + 4c = 2 \\ 4d + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 2 \\ d = 2 \end{cases}.$$
   Il y a une unique solution particulière polynomiale de degré 3, $x \mapsto -x^3 - 2x^2 + 2x + 2$.
   $\boxed{S_{\mathbb{C}}(E_1) = \{-x^3 - 2x^2 + 2x + 2 + Ae^{2ix} + Be^{-2ix} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}}$ *et*
   $\boxed{S_{\mathbb{R}}(E_1) = \{-x^3 - 2x^2 + 2x + 2 + A\cos(2x) + B\sin(2x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 16. Superposition des solutions et problème de Cauchy.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \mathrm{sh}(x) + e^x\cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Correction. *Notons (E) :* $\quad y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + e^x\cos(x)$ *et (H) son équation homogène associée.*

- **Résolution de (H).** *L'équation caractéristique $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ a pour discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$. Ses racines sont $1 \pm i$ donc $r = 1$ et $\omega = 1$ et* $\boxed{S_{\mathbb{R}}(H) = \{x \mapsto e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.
- **Recherche d'une solution particulière de (E), par superposition des solutions.**
  - $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ *est solution particulière de (E_1) :* $\quad y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x$.
  - $x \mapsto \frac{1}{10}e^{-x}$ *est solution particulière de (E_2) :* $\quad y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^{-x}$.
  - $e^x\cos(x) = \mathrm{Re}(e^x e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$. *Notons $(E_{\mathbb{C}})$:* $\quad y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$.
    $1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ de la forme $y_p(x) = Cxe^{(1+i)x}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
    Dès lors, $y_p'(x) = (C + C(1+i)x)e^{(1+i)x}$ et $y_p''(x) = (2C(1+i) + 2Cix)e^{(1+i)x}$.
    $y_p \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow 2Ci = 1 \Leftrightarrow \underline{C = -\dfrac{i}{2}}$. *Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{i}{2}xe^{(1+i)x}$ est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ puis sa partie réelle, i.e. $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)e^x}{2}$, est solution de (E_3). A VÉRIFIER.*

  D'après le principe de superposition, $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}e^{-x} + \frac{x\sin(x)e^x}{2} \text{ est une solution particulière de } (E)}$.
- $\boxed{S_{\mathbb{R}}(E) = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{10}e^{-x} + \dfrac{x\sin(x)e^x}{2} + e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.
- *$y(0) = 0$ implique que $A = -\dfrac{2}{5}$ et $y'(0) = 1$ implique que $B = \dfrac{4}{5}$, ce qui nous définit l'unique solution du problème de Cauchy.*

Exercice 17. Une équation fonctionnelle. *L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi - x)$.*
   (a) *Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*
   (b) *Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et en déduire la forme générale de f.*
2. *Conclure.*

Correction.

1. (a) *f' est la composée de f avec la fonction affine $x \mapsto \pi - x$, qui sont toutes les deux dérivables, donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que* $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$.
   (b) *Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant l'égalité donnée, on obtient : $f''(x) = -f'(\pi - x) = -f(x)$ donc f est*

solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène : $y'' + y = 0$*. Ainsi, il existe* $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\boxed{f = C_1 \cos + C_2 \sin}$ *ou encore il existe* $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(x+\varphi)$*.*

2. • *Soit* f *solution du problème. Alors, d'après la question précédente, il existe* $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f = C_1 \cos + C_2 \sin$*. Ainsi,* $f' = C_2 \cos - C_1 \sin$ *et la condition* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(\pi - x)$ *implique que :*

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ C_2 \cos x - C_1 \sin x &= C_1 \cos(\pi - x) + C_2 \sin(\pi - x)\\ &= -C_1 \cos x + C_2 \sin x.\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 0$*, on obtient que* $\underline{C_2 = -C_1}$ *d'où* $\underline{f \in \{C(\cos - \sin) \mid C \in \mathbb{R}\}}$*.*

• *Réciproquement, soient* $C \in \mathbb{R}$ *et* $f = C(\cos - \sin)$*. Alors* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f' = -C(\sin + \cos)$*. D'où pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $f'(x) = f(\pi - x)$ *et* f *est bien solution du problème.*

• *En conclusion, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle*

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(\cos - \sin) = \left\{x \mapsto D\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \;\middle|\; D \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Rappel :

$$\begin{aligned}\cos x - \sin x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Exercice 18. Changement de fonction inconnue. *Pour tout* $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, considérons l'équation différentielle*

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0 \quad (H),$$

et posons $z : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\tan t). \end{array}$

Montrer que y *est solution de* (H) *sur* $\mathbb{R}$*, si et seulement si,* z *est solution sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. En déduire les solutions de* (H) *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*.*

Indication : *on pourra exprimer* y *en fonction de* z*.*

Correction. *Il s'agit de résoudre une EDL2 homogène à coefficients non constants. Un changement de fonction inconnue est proposé dans l'espoir que la nouvelle fonction* z *soit solution d'une EDL plus simple, que le cours permet de résoudre.*
D'après l'indication, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y(\tan(\arctan x)) = z(\arctan x)$*.*
$z \in \mathcal{D}^2(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R})$ *en tant que composée...*
$y'(x) = z'(\arctan x)\frac{1}{1+x^2} = z'(\arctan x)(1+x^2)^{-1}$*.*

$y''(x) = z''(\arctan x)(1+x^2)^{-2} - z'(\arctan x)(2x)(1+x^2)^{-2} = (1+x^2)^{-2}[z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)].$

$$\begin{aligned}
y \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, z''(\arctan x) + z(\arctan x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, z''(t) + z(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in S_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}}(H') \text{ où } (H') : y'' + y = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z = A\cos + B\sin \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ (y \circ \tan)(t) = A\cos t + B\sin t \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = A\cos(\arctan x) + B\sin(\arctan x) \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{Bx}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_{\mathbb{R},\mathbb{R}}(H) = \left\{x \mapsto \frac{A+Bx}{\sqrt{1+x^2}} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 19. Changement de fonction inconnue et équation fonctionnelle.

1. *On souhaite résoudre*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y''(x) + \frac{1}{x^2}y(x) = 0 \quad (H).$$

Soit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On considère $z : t \mapsto y(e^t)$. Montrer que y est solution de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si, z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera. Conclure.

Correction. *$z = y \circ \exp$ et $\exp \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc la composée $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pourra donc dériver deux fois z.*
On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = y(e^{\ln x}) = z(\ln x)$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y'(x) = z'(\ln x)x^{-1}$ et $y''(x) = z''(\ln x)x^{-2} - z'(\ln x)x^{-2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
y \in S_{\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}}(H) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, z''(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z'(t) + z(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H') \text{ où } (H') : z'' - z' + z = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = e^{t/2}\left[A\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + B\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right] \\
&\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \sqrt{x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}}(H) = \left\{x \mapsto \sqrt{x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right] \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

N.B. : les racines de $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont $-j$ et $-\bar{j}$ i.e. $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. *Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.* $(*)$

   (a) *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

   (b) *Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(*)$.*

Correction.

(a)
- *Notons $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. Alors par hypothèse, $f' = f \circ i$ et $i \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$.*
  Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
  - *Par hypothèse, f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la proposition est initialisée.*
  - *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Par ailleurs, $i \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ donc la composée $f \circ i \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, i.e. $f' \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ d'où $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On a donc l'hérédité.*
  - *On conclut par théorème de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc $\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})}$.*

(b) *On raisonne par double inclusion.*
- *Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(*)$. D'après (a), f est deux fois dérivable donc on peut dériver $(*)$ et on obtient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

  Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{x^2} y = 0$.
  D'après 1., il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right]$.
- *Réciproquement, supposons qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right].$$

  Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right],$$

  et

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{A + B\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \frac{B - A\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right].$$

En particulier, $f(1) = A$ *et* $f'(1) = \frac{A+B\sqrt{3}}{2}$, *donc une autre condition apparaît.*
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) \Longleftrightarrow \left(\frac{A+B\sqrt{3}}{2} = A \text{ et } \frac{B-A\sqrt{3}}{2} = -B\right) \Longleftrightarrow A = B\sqrt{3}.$$

Ainsi, en posant $A = B\sqrt{3}$, *les équivalences précédentes montrent que les fonctions* $f : x \mapsto B\sqrt{x}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right]$ *sont solutions du problème.*

- *En conclusion,* $\boxed{\textit{l'ensemble des fonctions dérivables vérifiant } (*) \textit{ est}}$

$\boxed{\left\{x \mapsto B\sqrt{x}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right] \;\middle|\; B \in \mathbb{R}\right\}}$, *ce qui se ré-écrit*

$\boxed{\left\{x \mapsto C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$.

Exercice 20. Décomposition en parties paire et impaire.

1. *Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire.*
2. *Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \qquad (E).$$

Correction.

1. *Déjà fait. Procéder par analyse-synthèse.*
2. *Notons $S(E)$ l'ensemble des solutions de (E) et déterminons cet ensemble par double inclusion, ce qui revient ici à faire une analyse-synthèse.*
   - *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E).*
     D'après la question 1., il existe deux applications dérivables, g paire, et h impaire, telles que : $f = g + h$.
     On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x)$.
     Ainsi,

$$\begin{aligned} f \in S(E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x) = x + \cos x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) = \cos x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) - h(x) = x \end{cases}, \end{aligned}$$

     par unicité de la décomposition en somme de fonctions paire et impaire, et car la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire.
     Introduisons des notations pour les équations différentielles

$$y'' + y = \cos \quad (E_1) \qquad \text{et} \qquad y'' - y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \quad (E_2).$$

     Nous noterons $S(E_1)$ (resp. $S(E_2)$) l'ensemble des solutions de (E_1) (resp. (E_2)).
   - *Déterminons les solutions de (E_1).*
     L'équation homogène associée à (E_1) est $y'' + y = 0$ dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
     Pour déterminer une solution particulière de (E_1), introduisons l'équation complexifiée $(E_{\mathbb{C}}) : y'' + y = e^{ix}$. Cette dernière a pour polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, et i est racine simple de P donc on peut chercher une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ sous la forme $x \mapsto Cxe^{ix}$, avec $C \in \mathbb{C}$ à déterminer. Après calculs, on trouve que $C = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ convient. Ainsi, $x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{ix}$ est une solution de $(E_{\mathbb{C}})$ et sa partie réelle est une solution de (E_1).
     Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(-\frac{i}{2}xe^{ix}) = \frac{x \sin x}{2}$ donc $y_1 : x \mapsto \frac{x \sin x}{2}$ est solution particulière de (E_1).
     Ainsi, $\boxed{S(E_1) = \left\{(x \mapsto A\cos x + (B + \frac{x}{2})\sin x) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.
     La fonction g est une solution paire de (E_1). Alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = A\cos x + \frac{x \sin x}{2} + B \sin x$, c'est-à-dire

$$\underbrace{g}_{\text{paire}} + \underbrace{0}_{\text{impaire}} = \underbrace{(A\cos + y_1)}_{\text{paire}} + \underbrace{B\sin}_{\text{impaire}}.$$

Par unicité d'une telle décomposition (cf question 1.), on a

$$g = A\cos + y_1 \quad \text{et} \quad B\sin = 0.$$

> **Remarque.** *En notant Δ_1 l'ensemble des solutions paires de (E_1) c'est-à-dire $\Delta_1 := \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est paire et } y'' + y = \cos\}$, les mêmes arguments que précédemment montrent que $\Delta_1 \subset \{A\cos + y_1\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate (car $A\cos + y_1$ est paire et solution de (E_1)), on a l'égalité* $\boxed{\Delta_1 = \left\{ (x \mapsto A\cos x + \frac{x}{2}\sin x) \;\middle|\; A \in \mathbb{R} \right\}}$.

- *Déterminons les solutions de (E_2).*
  La fonction $x \mapsto -x$ est une solution particulière évidente de (E_2) et l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.
  Ainsi, $\boxed{S(E_2) = \{x \mapsto -x + A\mathrm{ch}(x) + B\mathrm{sh}(x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.
  La fonction h est impaire et solution (E_2) donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\underbrace{h}_{\textit{impaire}} = \underbrace{\alpha\mathrm{ch}}_{\textit{paire}} + \underbrace{(\beta\mathrm{sh} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})}_{\textit{impaire}}.$$

  Par unicité d'une telle décomposition, on a $h = \beta\mathrm{sh} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
  On pourrait montrer que $\boxed{\{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est impaire et } y'' - y = x\} = \{x \mapsto -x + \beta\mathrm{sh}x \mid \beta \in \mathbb{R}\}}$.

- *Ainsi, on a finalement montré que* $\underline{S(E) \subset \left\{ x \mapsto A\cos x + \frac{x}{2}\sin x - x + B\mathrm{sh}x \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

Synthèse. *Réciproquement, posons $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, $g : x \mapsto A\cos x + \frac{x}{2}\sin x$, $h : x \mapsto -x + B\mathrm{sh}x$ et $f = g + h$.*
g, h et f sont clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
On peut éviter les calculs, en remarquant que, comme précédemment, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) + f(-x) &= \underbrace{(g''(x) + g(x))}_{=\cos x} + \underbrace{(h''(x) - h(x))}_{=x} \\ &= \cos x + x \qquad \text{car } g \in S(E_1) \text{ et } h \in S(E_2). \end{aligned}$$

Donc f vérifie (E).

Conclusion. *L'ensemble cherché est* $\boxed{\left\{ \left(x \mapsto \frac{x}{2}\sin x - x + A\cos x + B\mathrm{sh}x \right) \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.