Sommes à un indice

Exercice 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :*

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(3^k + 2k + n - 1\right)$.
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k 6^{n-k}$.
4. $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
5. $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \times k!)$.
6. $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$.

Correction.

1. $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. *Par télescopage,* $\boxed{S_n = \ln(n+1)}$.
2. *En décomposant la somme, on trouve* $\boxed{T_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} + (n+1)(2n-1)}$.
3. *D'après le cours,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ *donc* $\boxed{U_n = \frac{1}{2}\left(6^{n+1} - 4^{n+1}\right) = 2^n(3^{n+1} - 2^{n+1})}$.
4. *On écrit* $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. *Le télescopage permet de conclure que* $\boxed{V_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$.
5. *On écrit* $k = (k+1) - 1$. *Ainsi,* $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)! - \sum_{k=0}^{n} k! = (n+1)! - 0!$ *donc* $\boxed{W_n = (n+1)! - 1}$.
6. *On découpe la somme selon :* $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k = n^2 + \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + \frac{2n(2n+1) - n(n+1)}{2} = n^2 + \frac{3n^2+n}{2} = \frac{n(5n+1)}{2}$. *Ainsi,* $\boxed{Z_n = \frac{n(5n+1)}{2}}$.

Exercice 2. 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

(a) *Déterminer des réels a et b tels que pour $k \in \mathbb{N}^*$,* $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. *$a = 1$ et $b = -1$.*

(b) *En déduire la valeur de S_n et déterminer la limite de (S_n).*
En télescopant, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *donc* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de même* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Méthode 1 : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ *avec* $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ *et* $c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$*. En faisant des changements d'indice dans les 2 dernières somme on trouve :* $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$.
Découpant les sommes entre 3 et n permet de simplifier S_n *en :*
$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{4} + \frac{-1}{2(n+1)(n+2)}$. *Puis,* $\boxed{S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$.
<u>Méthode 2 :</u> On écrit

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}[(k+2)-k]}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

On a donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)},$$

par télescopage.

Exercice 3. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $q \in \mathbb{R}$*. Le but de l'exercice est de calculer la somme*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k.$$

Pour cela, on considère la fonction $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.

Donner deux formules pour la dérivée σ'*, et en déduire la valeur de* S_n *et* $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

<u>**Correction.**</u> *Soit* $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$*. D'après le cours, on sait que* $\sigma(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$*. En dérivant cette égalité, on obtient :*

$$\text{d'une part, } \sigma'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1};$$
$$\text{d'autre part, } \sigma'(x) = \frac{((n+1)x^n)(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

On en déduit que : $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

En multipliant par x, on obtient la formule : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}}$.
Remarque : les propriétés des polynômes permettent de montrer que si une telle formule est vraie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$*, elle l'est également sur* $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

On en déduit que

$$\boxed{S_n = \begin{cases} \dfrac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2} & \text{si } q \neq 1 \\[2ex] \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } q = 1. \end{cases}}$$

En particulier, pour $x = 2$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k2^k} = n2^{n+2} - (n+1)2^{n+1} + 2 = 2^{n+1}(2n - n - 1) + 2 = \boxed{(n-1)2^{n+1} + 2}.$$

Exercice 4. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.*

Par linéarité de la partie imaginaire et en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$S = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left((1 + e^{ix})^n\right).$$

Or, en factorisant par l'angle moitié, $1 + e^{ix} = 2\cos\dfrac{x}{2} e^{i\frac{x}{2}}$ donc $(1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n \dfrac{x}{2} e^{i\frac{nx}{2}}$. Ainsi,

$$\boxed{S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}.}$$

Exercice 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.*

Complexifions ! Comme $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} C_n &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}}{1 - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1}\left(1 - \frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)\right). \end{aligned}$$

Or, $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$ puis $2e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = -i\sqrt{3}$, de sorte que

$$C_n = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).}$$

Plus précisément :

- *S'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 3p$, $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \sin(p\pi) = 0$ *donc* $\boxed{C_{3p} = 0}$.

- *S'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 3p+1$, $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{3}\right) = (-1)^p \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^p \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\boxed{C_{3p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{3p+2}} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3p+2}}$.

- *S'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 3p+2$, $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = (-1)^p \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-1)^p \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\boxed{C_{3p+2} = \frac{(-1)^p}{2^{3p+3}} = \frac{1}{2} C_{3p+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{3p+2}}$.

Vérification OK sur les 6 premiers termes.

Exercice 6. Deux sommes. *Soient* $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer*

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k} \qquad et \qquad T = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos x)^k}.$$

Correction. *On a :*

$$S + iT = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k.$$

On a l'équivalence

$$\frac{e^{ix}}{\cos x} = 1 \iff \cos x + i \sin x = \cos x \iff \sin x = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi].$$

- *Si* $x \equiv 0\ [\pi]$, *alors* $S + iT = n+1$, *donc* $\underline{S = n+1 \text{ et } T = 0}$.

- *Sinon :*

$$S + iT = \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{\cos^n x} \times \frac{\cos^{n+1} x - e^{ix(n+1)}}{\cos x - e^{ix}}$$

$$= \frac{1}{\cos^n x} \times \frac{\cos^{n+1} x - \cos((n+1)x) - i \sin((n+1)x)}{-i \sin x}$$

$$= \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} \quad + \quad i\, \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x}.$$

D'où

$$\boxed{S = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x}}.$$

En conclusion :

$$\boxed{S = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \dfrac{\sin((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} & \text{sinon} \end{cases}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{T = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \dfrac{\cos^{n+1}(x) - \cos((n+1)x)}{\cos^n x \times \sin x} & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Exercice 7. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)(\cos\theta)^k$. *Exprimer* S_n *à l'aide de* n *et* θ.

Correction. *On écrit :* $S_n = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\cos(\theta)e^{i\theta}\right]^k\right)$.

Or, $\cos(\theta)e^{i\theta} = 1 \iff \cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta = 1 \iff \cos^2\theta = 1$ *et* $\sin\theta = 0 \iff \sin\theta = 0 \iff \theta \in \pi\mathbb{Z}$.

- *Premier cas : si* $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ *alors* $\cos(\theta)e^{i\theta} = 1$ *puis* $S_n = \mathrm{Re}(n) = n$.
- *Deuxième cas : si* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $S_n = \mathrm{Re}(q + q^2 + \cdots + q^n)$ *avec* $q = \cos(\theta)e^{i\theta} \neq 1$ *donc*

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos\theta e^{i\theta} \times \frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{1-\cos\theta e^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos\theta \times \frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{e^{-i\theta}-\cos\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos\theta \times \frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{-i\sin\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\sin\theta} \times \left(\cos\theta - \cos^{n+1}\theta e^{in\theta}\right)\right) \\
&= 0 + \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\sin\theta} \times \left(-\cos^{n+1}\theta e^{in\theta}\right)\right) \\
&= \frac{-\cos^{n+1}\theta}{\sin\theta} \times \mathrm{Re}\left(ie^{in\theta}\right) \\
S_n &= \boxed{\frac{\sin(n\theta)\cos^{n+1}\theta}{\sin\theta}}.
\end{aligned}$$

Exercice 8. Somme alternée. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de* $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$.

Il y aura peut-être une disjonction de cas en fonction de la parité de n.
On peut aussi donner une formule close (avec la partie entière ou $(-1)^n$).

Correction.

Cas où n est pair ($n = 2p$). *Alors*

$$S_n = S_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k = \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{2\ell} 2\ell + \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{2\ell-1}(2\ell-1) = \sum_{\ell=1}^{p} (2\ell - (2\ell-1)) = \sum_{\ell=1}^{p} 1 = p = \frac{n}{2}.$$

Cas où n est impair ($n = 2p+1$). *En sommant par paquet et en utilisant le cas précédent, on a :*

$$S_n = S_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k - (2p+1) = p - (2p+1) = -(p+1) = -\frac{n+1}{2} = (-1)^n \frac{n+1}{2}.$$

Bilan.

$$\boxed{S_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

Bonus. *Il y a une formule close, sans disjonction de cas :*

$$\boxed{S_n = (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}.$$

En effet,

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autre bonus. *Il y a une autre formule close, sans disjonction de cas, et sans partie entière.*

Deux formules très pratiques :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme

$$S_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on a

$$S_n = (-1)^n \frac{n}{2} - \frac{1-(-1)^n}{2} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}}.$$

Exercice 9. *Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1. Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$.

Correction. *On a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k - 1)\overline{(\omega^k - 1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k - 1)(\overline{\omega}^k - 1) && \textit{(propriétés de la conjugaison)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k\overline{\omega}^k - \omega^k - \overline{\omega}^k + 1) && \textit{(en développant)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \omega^k - \overline{\omega}^k\right) && \textit{(car } |\omega| = 1\textit{)} \\
&= 2n - \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - \sum_{k=0}^{n} \overline{\omega}^k.
\end{aligned}$$

Or, ω est une racine n-ième de l'unité différente de 1 (et donc il en est de même de $\overline{\omega}$). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}^k.$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = 2n}.$$

Exercice 10. Somme des distances à 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer* $S = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Correction. *On ré-écrit :*

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1|.$$

En factorisant par l'angle moitié, on obtient $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (car $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi[$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$). Ainsi

$$S = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i\pi}{n}})^k\right).$$

Or, $e^{\frac{i\pi}{n}} = 1 \iff \frac{\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi] \iff \pi \equiv 0\ [2\pi n]$, ce qui est absurde. Ainsi $\underline{e^{\frac{i\pi}{n}} \neq 1}$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i\pi}{n}})^k = \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{2}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)},$$

en factorisant par l'angle moitié. D'où $\boxed{S = 2\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\,\mathrm{cotan}\,\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 11. Somme trigonométrique sans annulation. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

Raisonner par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

Correction. *Supposons par l'absurde que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$.

On peut écrire l'égalité sous la forme $\displaystyle\frac{e^{i\theta_1}}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} = 0$, *donc*

$$-\frac{e^{i\theta_1}}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}.$$

Considérons le module de chaque membre de cette égalité :

- *d'un côté,* $\left|-\dfrac{e^{i\theta_1}}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$;
- *de l'autre,*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| &\leq \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{e^{i\theta_k}}{2^k}\right| && \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}\\
&\leq \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\\
&< \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

on obtient une contradiction, ce qui conclut la preuve.

Exercice 12. Récurrence forte ! *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes **strictement positifs** vérifiant :*

$$(\star) \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{p} u_i^3 \; = \; \Big(\sum_{i=1}^{p} u_i\Big)^2.$$

Montrer par récurrence forte $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; u_n = n$.

Exprimer u_{n+1}^3 en fonction de $\sum_{i=1}^{n} u_i^3$.

Correction. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$: « $u_n = n$ ».*
Montrons, par récurrence forte $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; \mathcal{P}_n$.

Initialisation. *Pour $p = 1$, l'hypothèse donne $u_1^3 = u_1^2$ donc $u_1^2(u_1 - 1) = 0$. Or, $u_1 \neq 0$ donc $u_1 = 1$. On a donc $\mathcal{P}_1$.*

Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$, et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.*
On a :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} u_i^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\Big)^2 & \textit{hypothèse } (\star) \textit{ avec } p = n+1 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \;+\; u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i \;+\; u_{n+1}\Big)^2 & \textit{paquets (à gauche et à droite)} \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3 \;+\; u_{n+1}^3 & = & \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)^2 \;+\; 2\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)u_{n+1} \;+\; u_{n+1}^2 & \textit{identité remarquable} \\
u_{n+1}^3 & = & \displaystyle 2\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)u_{n+1} \;+\; u_{n+1}^2 & \textit{simplification grâce à } (\star) \textit{ avec } p = n \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} u_i \;+\; u_{n+1} & \textit{car } u_{n+1} \neq 0 \\
u_{n+1}^2 & = & \displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} i \;+\; u_{n+1} & \textit{d'après } \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n. \\
u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) & = & 0. & \textit{calculs}
\end{array}$$

On obtient que u_{n+1} est solution de l'équation $x^2 - x - n(n+1) = 0$, équation qui a pour solutions $n+1$ et $-n$ (relations coefficients-racines).
Donc

$$u_{n+1} = n+1 \qquad \textit{ou} \qquad u_{n+1} = -n.$$

Or $u_{n+1} > 0$, donc $u_{n+1} = n+1$. On a donc $\mathcal{P}_{n+1}$, ce qui conclut.

Coefficients binomiaux

Exercice 13. Inégalité de Bernoulli. *Sans faire d'étude de fonction ni de récurrence, montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{et} \quad (1+x)^n \geq 1+x^n.$$

Correction.

- *D'après la formule du binôme de Newton,* $(1+x)^n = 1+nx+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k}_{\geq 0} \geq 1+nx$. *(inégalité de Bernoulli)*
- *D'après la formule du binôme de Newton,* $(1+x)^n = 1+x^n+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k}_{\geq 0} \geq 1+x^n$.

Exercice 14. Les coefficients binomiaux sont entiers. *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{Z},\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Correction. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* H_n : « $\forall p \in \mathbb{Z},\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ ».
Montrons $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n$ *par récurrence simple.*

- *Soit* $p \in \mathbb{Z}$. *On a :* $\binom{0}{p} = \begin{cases} 1 \text{ si } p=0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ *Dans tous les cas,* $\binom{0}{p} \in \mathbb{N}$, *donc* H_0.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* H_n. *Montrons* H_{n+1}.
  Soit $p \in \mathbb{Z}$.
  D'après la formule de Pascal, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.
  Par HR, $\binom{n}{p}$ *et* $\binom{n}{p-1}$ *sont entiers et* $\mathbb{N}$ *est stable par somme, donc* $\binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Minoration du coefficient binomial central (1). *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{2n}{n} \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$.

Correction. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a* $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n$.
Or, la suite finie des coefficients binomiaux est maximale en son milieu donc $\forall k \in [\![0,2n]\!],\ \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$
donc, en sommant, on obtient $4^n \leq (2n+1)\binom{2n}{n}$, *ce qui démontre l'inégalité proposée.*

Exercice 16. Minoration du coefficient binomial central (2). *Montrer* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$

Récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on note* $\mathscr{P}_n$ *: «* $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$ *». Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *par récurrence.*

Initialisation. *D'un côté,* $\dfrac{4^1}{2\sqrt{1}} = 2$*. De l'autre* $\dbinom{2 \times 1}{1} = 2$*. D'où* $\mathscr{P}_1$*.*

Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

Supposons $\mathscr{P}_n$*, i.e.* $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \dbinom{2n}{n}$*.*

Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$*, i.e.* $\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dbinom{2n+2}{n+1}$*.*

Avant de commencer un quelconque raisonnement, remarquons que l'on a

$$(\heartsuit) \qquad \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Partons de $\mathscr{P}_n$*. On a :*

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

On essaie de faire apparaître le coefficient binomial central $\dbinom{2n+2}{n+1}$*, à l'aide de* $(\heartsuit)$*.*

Pour cela, on multiplie par $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ *(qui est* > 0*). On a donc :*

$$\frac{(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$$

Pour montrer $\mathscr{P}_{n+1}$*, il suffit de montrer que :*

$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{\sqrt{n}},$$

ce qui est équivalent à

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leqslant 2n+1$$

ce qui est vrai car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ 2\sqrt{xy} \leqslant x+y$*.*

Exercice 17. *Soit $n \geq 3$. Calculer les sommes suivantes.*

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}$.
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \binom{n+2}{k-1}$.
4. $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
5. $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
6. $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
7. $Y_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ $(p \in [\![0,n]\!])$.
8. $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k}$ $(p \in \mathbb{N})$.
9. $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

Correction.

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ *(fait en cours).*

2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1} = \boxed{2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)}$.

3. *Un changement d'indice donne :*
$U_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n+2}{k} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} - \left[\binom{n+2}{0} + \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n+2}\right] = 2^{n+2} - \left(1 + (n+2) + \frac{(n+2)!}{n!2!} + (n+2) + 1\right) = 2^{n+2} - \left(2n + 6 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$.
Ainsi, $\boxed{U_n = 2^{n+2} - \dfrac{n^2 + 7n + 14}{2}}$.

4. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ *donc* $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. *Un changement d'indice permet de conclure :* $\boxed{V_n = n2^{n-1}}$

5. *Comme précédemment,* $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *donc* $W_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$.
Un changement d'indice donne : $W_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n-1}{k}$ *puis en développant :*
$W_n = n\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right] = nV_{n-1} + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}$. *Ainsi,* $\boxed{W_n = n(n+1)2^{n-2}}$.

6. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ *donc* $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
On a $X_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=10}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$. *Donc* $\boxed{X_n = \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)}$.

7. *Formule de Pascal + télescopage :pour $k \in \mathbb{N}$, on écrit :* $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
   Ainsi, par télescopage
$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right] = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1},$$
   donc $\boxed{Y_n = \binom{n+1}{p+1}}$.

8. *Formule de Pascal + télescopage : pour $k \in \mathbb{N}$, on écrit :* $\binom{p+k}{k} = \binom{p+k+1}{k} - \binom{p+k}{k-1}$.
   Ainsi, par télescopage
$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{p+k+1}{k} - \binom{p+k}{k-1} \right] = \binom{p+n+1}{n} - \binom{p+1}{-1} = \binom{p+n+1}{n},$$
   donc $\boxed{Z_n = \binom{p+n+1}{n}}$.

9. *A l'aide du changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer la valeur de B_n. A l'aide du changement d'indice $j = 2n+1-k$ et par symétrie des coefficients binomiaux, on remarque que :*
$$B_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}.$$
   Ainsi, $2B_n = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = 2^{2n+1}$, *d'où* $\boxed{B_n = 2^{2n} = 4^n}$.

Exercice 18. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.*

1. *Écrire le complexe $(1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.*
2. *En déduire la valeur de S_n de T_n.*

1. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *donc* $\boxed{(1+i)^{2n} = (2i)^n = 2^n e^{i\frac{\pi n}{2}}}$ *ou* $\boxed{(1+i)^{2n} = 2^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + i2^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$.
2. *D'après la formule du binôme de Newton :*
   $(1+i)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} i^k = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} i^{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} i^{2p+1} = S_n + iT_n$, *avec* $(S_n, T_n) \in \mathbb{R}^2$.
   Par unicité de l'écriture algébrique de $(1+1)^{2n}$, on a : $\boxed{S_n = 2^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$ *et* $\boxed{T_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$.

Produits à un indice

Exercice 19. *Soit $n \geq 2$. Calculer les produits* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$, *par télescopage.* $\boxed{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}}$.
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$, *en faisant deux télescopages.*

Exercice 20. *Soit $n \geq 2$. On pose* $\displaystyle P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. *Montrer que* $\displaystyle P_n = \frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. *En déduire une expression simplifiée de P_n. Quelle est la limite de (P_n) ?*

on pourra commencer par calculer $(k+1)^2-(k+1)+1$ pour $k \geq 2$.

Correction.

1. *Remarquons que pour $k \geq 2$, on a (d'après la formule de Bernoulli ou en factorisant) :* $k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$ *et* $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$.
   Donc $\displaystyle P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\times\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
   Or, $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1} = \frac{1\times 2}{n\times(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$ *: les termes se télescopent, il ne reste que les 2 premiers et les 2 derniers.*
2. *En utilisant la remarque, on écrit pour $k \geq 2$, $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$. Alors d'après la question 1., on a :* $\displaystyle P_n = \frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$. *Par télescopage, il vient :*

$$P_n = \frac{2}{n(n+1)}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1} = \boxed{\frac{2}{3}\times\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = 1$ *donc* $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_n = \frac{2}{3}}$.

Sommes doubles

Exercice 21. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :*

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \qquad V_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \qquad T_n = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q \leq n}} (p+q) \qquad P_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} \qquad M_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j) \qquad D_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|.$$

Correction.

1. $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \right) = \sum_{j=0}^{n} 2^j = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = \boxed{2^{n+1}-1}$.

2. ***Première méthode :*** $\displaystyle V_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)i = \sum_{i=1}^{n-1} ni - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n}{6}[3n-(2n-1)] = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}$, *d'où* $\displaystyle\boxed{V_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}}$.

   Deuxième méthode : $\displaystyle V_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)j}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{12}[2n+1-3] = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, *d'où* $\displaystyle\boxed{V_n = \frac{n(n^2-1)}{6}}$.

3. ***Première méthode :*** *puisque $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $p+q \leq n$, on a $(p,q) \in [\![0,n]\!]$.*

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} (p+q) = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{q=0}^{n-p} p + \sum_{q=0}^{n-p} q \right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \left[(n-p+1)p + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \right] \\
&= \sum_{p=0}^{n} \left[(n-p+1) \times \frac{n+p}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} (n^2+n-p^2+p) \\
&= \frac{1}{2} \left(n(n+1)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{6 \times 2} [6(n+1)-(2n+1)+3] \\
T_n &= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}.
\end{aligned}$$

   Première méthode (bis) : *on écrit* $\displaystyle T_n = \sum_{0 \leq p \leq n-q \leq n} (p+q) = \sum_{0 \leq p \leq r \leq n} (p+n-r)$, *en posant*

$r = n - q$, et on conclut as usual.

Deuxième méthode : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=k}} k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{(p,q)\in I_k} k.$

Or, $I_k = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=k\} = \{(p, k-p) \mid p \in [\![0,k]\!]\}$ *donc* $\mathrm{Card}(I_k) = k+1$.

Ainsi, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)$

donc $\boxed{T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

4. $P_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$
$\dfrac{n(n+1)}{2\times 12} \times (3n(n+1) + 2(2n+1)) = \dfrac{n(n+1)}{24}(3n^2+7n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$ *d'où*
$\boxed{P_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.}$

5.
$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \boxed{= \frac{n(n+3)}{4}.} \end{aligned}$$

6. $M_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right)$
$M_n = \dfrac{-1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i$. *Après calculs, on trouve :* $\boxed{M_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

7. *On a :*

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i=j}} 0 + \sum_{1\leq j<i\leq n}(i-j)\\
&= 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i) && \textit{(indices muets)}\\
&= 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i) && \textit{(somme nulle sur la diagonale)}\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i)\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} k && [k=j-i]\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)j}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j && \textit{(linéarité)}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}\left[2n+1-3\right]\\
&= \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice 22. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i}{i+j}$.

Correction. *On calcule*

$$\begin{aligned}
2S_n &= \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i}{i+j} + \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i}{i+j}\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i}{i+j} + \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{j}{i+j} && \textit{(en échangeant } i \textit{ et } j \textit{ dans la deuxième somme)}\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\frac{i}{i+j}+\frac{j}{i+j}\right)\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i+j}{i+j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} 1 = n^2,
\end{aligned}$$

donc $\boxed{S_n = \frac{n^2}{2}.}$

Exercice 23. Somme de puissance de racines n-ièmes de l'unité.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.

1. *Calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Pour la culture, S_p peut aussi s'écrire $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$.*

2. *On suppose $n \geq 3$. Montrer que $\sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \zeta_k \zeta_\ell = 0$.*

Correction.

1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc*

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2kp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^k.$$

Le complexe $e^{\frac{i2p\pi}{n}}$ est égal à 1 si, et seulement si, n divise p. On en déduit que :

- *si n divise p, alors $S_p = n$;*
- *si n ne divise pas p, alors $S_p = \dfrac{1 - \left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{n}}} = 0$.*

En conclusion : $\boxed{S_p = \begin{cases} n & \text{si } n|p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

2. *On note $S' = \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \zeta_k \zeta_\ell$.*

On a

$$S_1^2 = S_2 + S'.$$

Comme $n \geq 3$, les entiers $p \in \{1, 2\}$ sont tels que $p \not\equiv 0\ [n]$.
Donc $S_1 = S_2 = 0$ d'après la question précédente.
D'où $\boxed{S' = 0}$.