Fonctions indicatrices

Exercice 1. *Soient E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.Montrer que :*

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_{A\cup B}$,
3. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_{A\cup B}$,
4. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Correction. *Toutes ces applications sont des éléments de $\{0,1\}^E$.*

1. **Première méthode.** *Soit $x \in E$. On a :*

   $(\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B)(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$ *et* $\mathbb{1}_B(x) = 1 \iff x \in A$ *et* $x \in B \iff x \in A\cap B$.

   Puisque $(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(E) \subset \{0,1\}$, on en déduit que

   $$(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 0 \iff (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) \neq 1 \iff x \notin A \cap B.$$

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}}$.
   Deuxième méthode.

   - *Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$.*
   - *Soit maintenant $x \notin A \cap B$. Alors $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Dans tous les cas, $(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 0$.*

   On a donc l'égalité d'applications : $\boxed{\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}}$.

2. *Soit $x \in E$. On a :*

   $$\begin{aligned} \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = 0 &\iff \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)) = 0 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 0 \textit{ et } \mathbb{1}_B(x) = 0 \qquad \textit{car } 1_A(x), 1_B(x) \in \{0,1\} \\ &\iff x \notin A \textit{ et } x \notin B \\ &\iff \mathrm{non}(x \in A) \textit{ et } \mathrm{non}(x \in B) \\ &\iff \mathrm{non}(x \in A \textit{ ou } x \in B) \\ &\iff x \notin A \cup B. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in A \cup B \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ *donc* $\boxed{\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_{A\cup B}}$.

3. *Notons $f = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$. Distinguons les cas.*

   - *Soit $x \in A \cup B$. Distinguons :*
     Si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = 1 + 1 - 1 = 1$.
     Si $x \notin A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 1$, et $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$, donc $f(x) = 1$.
     Ainsi, $\underline{\forall x \in A \cup B,\ f(x) = 1}$.
   - *Soit maintenant $x \notin A \cup B$. Alors $x \notin A$ et $x \notin B$ et $x \notin A \cap B$. Ainsi, $f(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.*
     Ainsi, $\underline{\forall x \notin A \cup B,\ f(x) = 0}$.

   On en déduit que f est une fonction indicatrice et plus précisément : $\boxed{f = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_{A\cup B}}$.

4. **Première méthode.** *Soit $x \in E$. On a :*

$$(1-\mathbb{1}_A)(x)=1 \iff 1-\mathbb{1}_A(x)=1 \iff \mathbb{1}_A(x)=0 \iff x \in A^c.$$

Or, $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc $1-\mathbb{1}_A$ aussi, d'où :

$$(1-\mathbb{1}_A)(x)=0 \iff (1-\mathbb{1}_A)(x) \neq 1 \iff x \in A,$$

d'après les équivalences précédentes.
Deuxième méthode.

- *Soit $x \in A$. Alors $x \notin A^c$ donc $\mathbb{1}_A(x)=1$ et $\mathbb{1}_{A^c}(x)=0$ donc $(1-\mathbb{1}_A)(x)=1-\mathbb{1}_A(x)=0$.*
- *Soit maintenant $x \notin A$. Alors $x \in A^c$ donc $\mathbb{1}_A(x)=0$ et $\mathbb{1}_{A^c}(x)=1$ donc $(1-\mathbb{1}_A)(x)=1-\mathbb{1}_A(x)=1$.*

On en déduit que $1-\mathbb{1}_A$ est une fonction indicatrice et plus précisément : $\boxed{\mathbb{1}_{A^c}=1-\mathbb{1}_A}$.

Exercice 2. Bijection avec $\mathscr{P}(E)$. *Montrer que l'application* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ *est bijective.*

Correction.

- *Montrons que φ est injective.*
  Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$. Montrons que $A=B$.
  Soit $x \in A$. Alors $\mathbb{1}_B(x)=\mathbb{1}_A(x)=1$ donc $x \in B$. On a donc $A \subset B$.
  Par symétrie, $B \subset A$ puis $A=B$.

- *Montrons que φ est surjective.*
  Soit $f \in \{0,1\}^E$. Notons $A=\{x \in E \mid f(x)=1\}=f^{-1}(\{1\})$ l'ensemble des antécédents de 1 par f et montrons que $f=\mathbb{1}_A=\varphi(A)$.
  Soit $x \in E$. Par construction de A, $x \in A \iff f(x)=1$. On a donc bien $f=\mathbb{1}_A$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$.

Images directe et réciproque

Exercice 3. Images directe et réciproque versus inclusion, union et intersection.
Dans cet exercice, E et F sont deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.
A, A_1 et A_2 désignent des parties de E et $f(A)$ l'image directe de A par f.
B, B_1 et B_2 désignent des parties de F et $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par f.
Démontrer les assertions suivantes :

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
   L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Justifier.
4. $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.
   L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Justifier.
5. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
6. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
7. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
8. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Correction.

1. *Supposons $A_1 \subset A_2$.*
   Soit $y \in f(A_1)$. Alors il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Mais, $A_1 \subset A_2$, donc $x \in A_2$ puis $y \in f(A_2)$. Ainsi, $\boxed{f(A_1) \subset f(A_2)}$.

2. *Raisonnons par double inclusion.*
   - *Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.*
     Si $x \in A_1$, alors $y \in f(A_1)$ donc a fortiori $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
     Sinon, $x \in A_2$ donc $y \in f(A_2)$ donc a fortiori $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
     Dans tous les cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ donc $\underline{f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)}$.
   - *On a : $A_1 \subset (A_1 \cup A_2)$ donc d'après 1., $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. Pour la même raison, $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.*
     Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, alors $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Dans tous les cas, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
     Ainsi, $\underline{f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)}$.

   On a donc l'égalité : $\boxed{f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)}$.

3. - *On a $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ donc d'après 1., $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$. De même, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.*
     Ainsi, $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)}$.
   - *L'inclusion réciproque est* $\boxed{\text{fausse}}$. *Pour $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{-2\}$ et $f : x \mapsto x^2$, on a $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ donc $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing$, mais $f(A_1) = f(A_2) = \{4\}$ donc $f(A_1) \cap f(A_2) = \{4\}$.*
     Ainsi, $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)}$.

4. - *Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
     Comme $y \notin f(A)$, on a $x \notin A$ (raisonner par l'absurde : si x était dans A, alors...).
     On en déduit que $x \in E \setminus A$ puis $y \in f(E \setminus A)$.
     On a montré $\boxed{f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)}$.

- *Considérons la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *et* $A = \mathbb{R}_+$.
  On a alors $f(A) = f(\mathbb{R})$ *(car les deux parties sont égales à* $\mathbb{R}_+$*), donc* $f(\mathbb{R}) \setminus f(A) = \varnothing$.
  Pourtant, on a $E \setminus A = \mathbb{R}_-^*$ *et* $f(E \setminus A) = \mathbb{R}_+^* \neq \varnothing$.
  Cela montre que $\boxed{\textit{l'inclusion précédente est stricte}}$ *et* $\boxed{\textit{l'inclusion réciproque est fausse}}$.

5. *Supposons* $B_1 \subset B_2$. *Soit* $x \in f^{-1}(B_1)$. *Alors* $f(x) \in B_1$. *Or,* $B_1 \subset B_2$ *donc* $f(x) \in B_2$*, ce qui signifie que* $x \in f^{-1}(B_2)$. *Ainsi,* $\boxed{f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)}$.

6. *Soit* $x \in E$. *On a :*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

   D'où l'égalité : $\boxed{f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)}$.

7. *Soit* $x \in E$. *On a :*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

   D'où l'égalité : $\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$.

8. *Soit* $x \in E$. *On a :*

$$x \in f^{-1}(B^c) \iff f(x) \in B^c \iff \mathrm{non}(f(x) \in B) \iff \mathrm{non}(x \in f^{-1}(B)).$$

   D'où l'égalité : $\boxed{f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c}$.

Exercice 4. Critères d'injectivité et de bijectivité. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.*

1. *Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(A^c) = f(A)^c$.*
2. *Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.*

Correction.

1.
   - *Supposons que f est bijective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.*
     - *Soit $y \in f(A^c)$. Alors il existe $x \notin A$ tel que $y = f(x)$.*
       Si $y \in f(A)$, alors il existerait $a \in A$ tel que $y = f(a)$, et par injectivité de f, on aurait $x = a \in A$, ce qui est absurde. Ainsi, $y \in f(A)^c$, ce qui montre l'inclusion directe.
     - *Soit $y \in f(A)^c$. Comme $y \in F$ et f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On sait que $y \notin f(A)$ donc $x \notin A$. Ainsi, $y \in f(A^c)$.*

     On a bien $\boxed{f(A^c) = f(A)^c}$.
   - *Supposons que $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(A^c) = f(A)^c$.*
     - *Montrons que f est surjective. Par hypothèse, appliquée à $\underline{A = \varnothing \in \mathscr{P}(E)}$, et puisque $\varnothing^c = E$ et $f(\varnothing) = \varnothing$, on obtient :*

       $$f(E) = f(\varnothing^c) = f(\varnothing)^c = \varnothing^c = F,$$

       ce qui signifie que $\underline{f \text{ est surjective}}$.
     - *Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$.*
       Alors $x' \in \{x\}^c$ donc $f(x') \in f(\{x\}^c) = \{f(x)\}^c$ par hypothèse, car $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$. Ainsi, $f(x') \neq f(x)$. Par contraposée, on a montré $\underline{f \text{ est injective}}$.

     Ainsi, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

2. **Sens direct.** *Supposons f injective. Soient $A, B \subset E$. D'après l'exercice 3, l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est toujours vraie.*
   Pour l'autre inclusion : soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $y = f(a) = f(b)$. Or comme f est injective, $a = b$ donc $a \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$. On a donc $\boxed{f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)}$.

   Sens indirect. *Supposons que : $\forall A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.*
   Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $\underline{A = \{x\} \text{ et } B = \{x'\}}$. Alors $f(A) = f(B)$ puis par hypothèse $f(A \cap B) = f(A) = f(B)$.
   Si $x \neq x'$, alors $A \cap B = \varnothing$ et $f(A \cap B) = \varnothing$ puis $f(A) = \varnothing$, ce qui est absurde car par définition, $f(x) \in f(A)$. Ainsi, $x = x'$ donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Exercice 5. Critères d'injectivité et de surjectivité. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.*

1. *Montrer : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A)) \quad$ et $\quad \forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

   - *Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On a, pour tout $a \in A$, $f(a) \in f(A)$ donc $a \in f^{-1}(f(A))$.*
   - *Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ i.e. $f(x) \in B$, donc $y \in B$.*

2. *Montrer : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$ si, et seulement si, f est injective.*

   - *Supposons que $A = f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.*
     Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $\underline{f(x') \in f(\{x\})}$ i.e. $x' \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ par hypothèse. Donc $x = x'$ et $\underline{f \text{ est injective}}$.
   - *Supposons que f est injective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.*
     Soit $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe $a \in A$, $f(x) = f(a)^*$. Comme f est injective, $x = a$ donc $x \in A$. Ainsi, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. L'autre inclusion étant toujours vraie, on a l'égalité.

   > *Attention à l'erreur classique consistant à dire directement : $x \in A$, ce qui est faux la plupart du temps. Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2$. On a $9 \in \{9\}$ ce qui se ré-écrit $f(3) \in f(\{-3\})$ et pourtant $3 \notin \{-3\}$.*
   > **Autre solution.** *L'application $\tilde{f} : A \to f(A)$ est bijective et $\tilde{f}^{-1} : f(A) \to A$ est en particulier surjective donc $\tilde{f}^{-1}(f(A)) = A$, et on a pour toute partie $B \subset F$, $\tilde{f}^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(f(A)) = A$.*

3. *Montrer : $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$ si, et seulement si, f est surjective.*

   - *Supposons que $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F. En particulier, $f(f^{-1}(F)) = F$. Or, $f^{-1}(F) = E$ donc $f(E) = F$, ce qui signifie que $\underline{f \text{ est surjective}}$.*
   - *Supposons que f est surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $B \subset f(f^{-1}(B))$.*
     Soit $y \in B$. Alors $y \in F$, et puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $\underline{y = f(x)}$.
     Ainsi, $f(x) \in B$ donc $\underline{x \in f^{-1}(B)}$.
     On en déduit que $y \in f(f^{-1}(B))$, ce qui prouve bien que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
     L'autre inclusion étant toujours vraie, on a l'égalité.

Exercice 6. Une partition. *Soient E et I deux ensembles non vides et $f : E \to I$ une application.*
On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de E.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $(A_i)_{i \in I}$ soit une partition de E.

Correction.

- *Pour tout $i \in I$, A_i représente l'ensemble des antécédents de i donc est bien une partie de E.*
- *Soit $(i, j) \in I^2$. Si $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, alors il existe $x \in A_i \cap A_j$ on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$ donc $i = j$.*
  Par contraposée, on a : $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$, donc $\boxed{\text{les } A_i \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

- *Soit $x \in E$. Trouvons $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ i.e. tel que $f(x) = i_0$.*
  Posons $\underline{i_0 := f(x)}$. Puisque $f : E \to I$, on a bien $i_0 \in I$. Puisque $f(x) = i_0$, on a bien $x \in A_{i_0}$.

  On a donc montré que $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a l'égalité $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = E}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (A_i)_{i\in I} \text{ est un recouvrement disjoint de } E}$. Puisque $(A_i)_{i\in I}$ est déjà un recouvrement disjoint de E,

$$\begin{aligned}(A_i)_{i\in I} \text{ est une partition de } E &\iff \forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing \\ &\iff \forall i \in I,\ \exists x \in f^{-1}(\{i\}) \\ &\iff \forall i \in I,\ \exists x \in E \mid f(x) = i \\ &\iff f \text{ est surjective.}\end{aligned}$$

Ainsi, une condition nécessaire est suffisante pour que $(A_i)_{i\in I}$ soit une partition est $\boxed{f \text{ surjective}}$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 7. *Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Déterminer* $\mathrm{Im}(f_3)$.

- $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$
- $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
- $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$
- $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$
- $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{array}$
- $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & (n-1)\mathbb{1}_{\{n\geq 1\}} \end{array}$
- $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & p+\frac{1}{q} \end{array}$

Correction.

1. *f_1 est injective mais pas surjective (il est clair que $\mathrm{Im}(f_1) \subset [1, +\infty[$ donc en particulier 0 n'a pas d'antécédent par f_1). On pourrait montrer que $\mathrm{Im}(f_1) = [1, +\infty[$ car tout $y \in [1, +\infty[$ peut être vu comme l'image de $\sqrt{y-1}$ par f_1.*

2. *Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $(u, v) = f_2(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$.*

   Ainsi, f_2 est bijective donc en particulier, elle est injective et surjective. De plus, $f_2^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) \end{array}$

3. *$f_3(1, 2) = f_3(2, 1)$ et $(1, 2) \neq (2, 1)$ donc $\underline{f_3 \text{ n'est pas injective}}$.*

Déterminons $\mathrm{Im}(f_3)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v)=f_3(x,y) &\iff \begin{cases} u=x+y\\ v=xy\end{cases}\\ &\iff x \text{ et } y \text{ sont les racines réelles du polynôme } X^2-uX+v\\ &\iff u^2-4v\geq 0.\end{aligned}$$

On a donc montré que $\boxed{\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v)\in\mathrm{Im}(f_3)\iff u^2-4v\geq 0}$, *d'où* $\boxed{\mathrm{Im}(f_3)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2-4v\geq 0\}}\subsetneq\mathbb{R}^2$ *(car par exemple* $(0,1)\notin\mathrm{Im}(f_3)$*) donc* <u>*$f_3$ n'est pas surjective.*</u>

4. *(cf cours) :* f_4 *n'est pas surjective car* 0 *n'a pas d'antécédent par l'exponentielle complexe.*
   f_4 *n'est pas injective car* $e^3=e^{3+2i\pi}$.

5. f_5 *n'est pas injective car* $f_5(2)=f_5(3)=1$ *alors que* $2\neq 3$.
   f *est surjective car pour tout* $p\in\mathbb{N}$, $p=\lfloor p\rfloor=\left\lfloor\frac{2p}{2}\right\rfloor=f(2p)$, *avec* $2p\in\mathbb{N}$.

6. f_6 *n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent. Par contre, l'application* $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}^*\\ n&\mapsto&n+1\end{array}$ *est bijective, de fonction réciproque* $f^{-1}:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^*&\to&\mathbb{N}\\ p&\mapsto&p-1\end{array}$.

7. $f_7:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}\\ n&\mapsto&\begin{cases} n-1 & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\\ 0 & \text{si } n=0\end{cases}\end{array}$.
   D'une part, $f_7(0)=f_7(1)=0$ *et* $0\neq 1$ *donc* <u>*f_7 n'est pas injective, ni bijective.*</u>
   D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N},\ f_7(n+1)=n$ *donc* <u>*f_7 est surjective.*</u>

8.
   - *Montrons que* f_8 *est injective.*
     Soient (p,q) *et* (p',q') *tels que* $f_8(p,q)=f_8(p',q')$.
     On a donc
     $$p+\frac{1}{q}=p'+\frac{1}{q'}\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad p'-p=\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}$$
     Or $0<\frac{1}{q'}\leq 1$ *et* $-1\leq-\frac{1}{q}<0$. *Donc, en sommant ces inégalités, on obtient :*
     $$-1<\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}<1$$
     On a donc $|p-p'|<1$. *Or* $p-p'$ *est un entier, d'où* $p-p'=0$, *puis* <u>$p=p'$</u>.
     En utilisant $f_8(p,q)=f_8(p',q')$, *on tire* <u>$q=q'$</u>.
     Ainsi, $\boxed{f_8 \text{ est injective}}$.
   - *Montrons que* $\boxed{f_8 \text{ n'est pas surjective}}$, *en montrant que le rationnel* $\frac{2}{3}$ *n'a pas d'antécédent.*
     Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\frac{2}{3}$ *s'écrive* $p+\frac{1}{q}$ *avec* $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.
     On a toujours $p<p+\frac{1}{q}\leq p+1$.
     Et comme $p+\frac{1}{q}=\frac{2}{3}$, *on aurait nécessairement* $p=0$.
     D'où $\frac{2}{3}=\frac{1}{q}$ *puis* $q=\frac{3}{2}$. *D'où la contradiction car* $q\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f est bijective et donner la bijection réciproque.

Correction. *On définit*

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

et on vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Exercice 9. Égalité d'applications. *Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2 \colon E \to F$ et $g \colon F \to G$. On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer $f_1 = f_2$.*

Correction. *Soit $x \in E$. On a : $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ i.e. $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$. Or, g est injective donc $f_1(x) = f_2(x)$, ceci pour tout $x \in E$. Ainsi $\boxed{f_1 = f_2}$.*

Exercice 10. Égalité d'applications. *Soient E, F, G trois ensembles, $f \colon E \to F$ et $g_1, g_2 \colon F \to G$. On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer $g_1 = g_2$.*

Correction. *Soit $y \in F$. Par surjectivité de f, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$ donc $\boxed{g_1 = g_2}$.*

Exercice 11. Bijectivité et (im)parité. *Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bijective. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est.*

Correction. *On procède par double implication.*

- *Supposons f impaire. Montrons que f^{-1} est impaire.*
  Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.
  On a, en utilisant $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ puis f impaire puis $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$:

  $$f^{-1}(-y) = f^{-1}\left(-f(f^{-1}(y))\right) = f^{-1}\left(f(-f^{-1}(y))\right) = -f^{-1}(y).$$

  On a donc bien montré que f^{-1} était impaire.

- *On pourrait procéder de façon semblable pour montrer que si f^{-1} est impaire, alors f est impaire. Appliquons plutôt le cas déjà démontré.*
  Supposons f^{-1} impaire. Puisque $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective, d'après ce qui précède, la réciproque de f^{-1} est impaire. Or, $(f^{-1})^{-1} = f$ donc f est impaire.

Exercice 12. *Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f^3 = f$.*
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.
Indication : *Bien sûr, ici, $f^3 = f \circ f \circ f$.*

Correction.

- *Supposons f injective. Soit $y \in E$. $f^3 = f$ donc en particulier, $f(y) = f^3(y)$. Or, f est injective donc $y = f^2(y) = f(f(y))$. y a pour antécédent $f(y)$ par f donc f est surjective.*
  Remarque. *On a montré que $\forall y \in E,\ y = f^2(y)$ ce qui signifie que $f^2 = \mathrm{Id}_E$ (on dit que f est une involution) et montre que f est bijective et $f^{-1} = f$.*
- *Supposons f surjective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, il existe $(a, a') \in E^2$ tel que $x = f(a)$ et $x' = f(a')$. Ainsi, $f^2(a) = f^2(a')$. En composant par f et puisque $f^3 = f$, il vient : $f(a) = f(a')$ i.e. $x = x'$. Ainsi, f est injective.*

$\boxed{\textit{On a donc montré l'équivalence}}$.

Exercice 13. *Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications.*
On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Correction. *$f \circ g \circ f$ bijective implique f injective et f surjective. Ainsi, $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et on peut introduire f^{-1}.*
On écrit alors : $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$. En tant que composée de 3 bijections, $\boxed{g \text{ est bijective}}$.

Exercice 14. *Soient E, F, G trois ensembles, et des applications $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in E^G$.*
On suppose $h \circ g \circ f$ injective, $g \circ f \circ h$ surjective et $f \circ h \circ g$ surjective.
Montrer que f, g et h sont bijectives.

Correction. *Par hypothèses :*

- *$h \circ g \circ f$ est injective, donc d'une part $\underline{f \text{ injective}}$.*
- *$f \circ h \circ g$ est surjective, donc d'autre part $\underline{f \text{ surjective}}$.*

On en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et on peut introduire f^{-1}.
On écrit : $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$. Un composée d'applications injectives est injective, donc $h \circ g$ est injective, d'où $\underline{g \text{ est injective}}$.
De plus, par hypothèse, $g \circ f \circ h$ est surjective et donc $\underline{g \text{ est surjective}}$. Finalement $\boxed{g \text{ est bijective}}$ et on peut introduire g^{-1}.
Par composition d'applications injectives, $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective et par composition d'applications surjectives, $h = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective donc $\boxed{h \text{ est bijective}}$.

Exercice 15. Réciproque partielle faible à la stabilité par composition.
Soient E, F, et G trois ensembles non vides. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. *L'implication $g \circ f$ injective $\Longrightarrow g$ injective est-elle vraie ? Justifier.*
2. *Montrer que si $g \circ f$ est injective et si f est surjective, alors g est injective.*
3. *L'implication $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow f$ surjective est-elle vraie ? Justifier.*
4. *Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective, alors f est surjective.*

Correction.

1. *La réponse est $\boxed{\text{non}}$. On peut donner un contre-exemple en faisant un diagramme sagittal.*
   On peut aussi considérer les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, donc $g \circ f$ est injective. Par contre, g n'est pas injective car par exemple $(-2)^2 = 2^2$ alors que $-2 \neq 2$.

2. *Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.*
   Soit $(y, y') \in F^2$ tel que $g(y) = g(y')$.
   Par hypothèse, f est surjective, donc il existe $(x, x') \in E^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
   Alors
   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$
   Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$.
   En composant par f, il vient : $y = y'$.
   On a donc prouvé que $\boxed{g \text{ est injective.}}$

3. *La réponse est $\boxed{\text{non}}$. On peut répondre à cette question par un diagramme sagittal.*
   Sinon, on peut encore considérer les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Donc $g \circ f$ est surjective. Par contre, f n'est pas surjective (car par exemple -1 n'a pas d'antécédent par f).

4. *Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.*
   Soit $y \in F$.
   Alors $g(y) \in G$ et $g \circ f$ est surjective donc il existe $x \in E$, tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$.
   On a donc $g(f(x)) = g(y)$. Or, g est injective, donc : $f(x) = y$. On e donc prouvé que $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Exercice 16. *Trouver toutes les applications injectives f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que*

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$$

Correction. *Procédons par analyse-synthèse.*

Analyse. *Soit f une application injective vérifiant $(\star)$.*

Montrons que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Par **récurrence forte**, *montrons que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_p$: « $f(p) = p$ ».*

Initialisation. *On a $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \leqslant 0$, d'où $f(0) = 0$. On a donc $\mathcal{H}_0$.*

Hérédité. *Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ sont vraies. Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.*
D'après $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, on a :

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad \ldots \qquad f(p) = p$$

et d'après $(\star)$ avec $n = p + 1$, on a $f(p+1) \in [\![0, p+1]\!]$.
Comme f est injective, l'image de $f(p+1)$ est nécessairement égale à $p+1$.
D'où $\mathcal{H}_{p+1}$.

Bilan de l'Analyse. Une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(\star)$ appartient à $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}\}$.

Synthèse. *La fonction identité est injective et vérifie $(\star)$.*

Bilan. $\boxed{\text{L'ensemble des applications injectives de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ vérifiant } (\star) \text{ est } \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}\}}$.

Exercice 17. Dans $\mathcal{P}(E)$. *Soit E un ensemble non vide contenant un certain x_0.*
Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A & \text{si } x_0 \in A \\ \overline{A} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. *L'application f est-elle surjective ? Quelle est l'image de f ?*
2. *L'application f est-elle injective ?*
3. *Exprimer $f \circ f$ en fonction de f.*

Correction.

1. *L'application f n'est pas surjective.*
   La partie vide n'est pas dans l'image de f.
   Prouvons-le en utilisant un raisonnement par l'absurde.
   Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(A) = \varnothing$.
   Distinguons deux cas.
   - **Cas** $x_0 \in A$.
     Alors $f(A) = A$. Or $f(A) = \varnothing$. D'où $A = \varnothing$. Ainsi, l'ensemble vide contient x_0.
     C'est absurde.
   - **Cas** $x_0 \notin A$.
     Alors $x_0 \in \overline{A}$ et $f(A) = \overline{A}$. Or $f(A) = \varnothing$. D'où $\overline{A} = \varnothing$ Ainsi, l'ensemble vide contient x_0.
     C'est absurde.
2. *L'application f n'est pas injective.*
   En effet, $f(\varnothing) = E$ et $f(E) = E$ et pourtant $E \neq \varnothing$ (d'après l'énoncé).
3. *Montrons que $f \circ f = f$.*
   Déjà, les applications $f \circ f$ et f ont même ensemble de départ et d'arrivée.
   Montrons qu'elles ont même expression.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

Montrons que $(f \circ f)(A) = f(A)$.
Vu la définition de f, on procède par disjonction de cas.

- **Cas** $x_0 \in A$.
  Alors $f(A) = A$.
  On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f(f(A)) = f(A)$.
  Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.
- **Cas** $x_0 \notin A$, *c'est-à-dire* $x_0 \in \overline{A}$.
  Alors $f(A) = \overline{A}$.
  On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f(f(A)) = f(A)$.
  Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.

Exercice 18. *Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$.

1. *Déterminer l'image de f.*
2. *Déterminer un ensemble I tel que* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \to & I \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ *est bijective et déterminer sa bijection réciproque.*

Correction.

1. *Soit $y \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. On a :*

$$f(x) = y \iff \dots \iff x(a - cy) = dy - b.$$

   - *Supposons que $y = \frac{a}{c}$. Si on avait $dy - b = 0$, alors on aurait $ad - bc = 0$, ce qui contredit l'énoncé, donc $dy - b \neq 0$ et d'après les équivalences précédentes, y n'a pas d'antécédent par f. Ainsi, $\frac{a}{c} \notin \operatorname{Im} f$ et $\underline{\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}}$.*
   - *Si $y \neq \frac{a}{c}$, alors d'après les équivalences précédentes, l'unique candidat x tel que $y = f(x)$ est $x = \dfrac{dy-b}{a-cy}$. Vérifions qu'il convient i.e. que $\dfrac{dy-b}{a-cy} \neq -\dfrac{d}{c}$. En effet, si on avait $\dfrac{dy-b}{a-cy} = -\dfrac{d}{c}$, alors on aurait $cdy - bc = -ad + cdy$ puis $ad - bc = 0$, ce qui contredit l'énoncé.*
     Ainsi, tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ possède un (unique) antécédent par f qui est $\dfrac{dy-b}{a-cy}$. Donc $\underline{\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \subset \operatorname{Im} f}$.

   Par double inclusion, on a montré que $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}}$.

2. *D'après la question précédente, tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ possède un (unique) antécédent par f/g qui est $\dfrac{dy-b}{a-cy}$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bijective}}$, $\boxed{I = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}}$ convient et* $\boxed{g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \\ y & \mapsto & \dfrac{dy-b}{a-cy} \end{array}}$.

Exercice 19. Un exemple de bijection. *On note $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Soient $a \in D$ et* $\varphi_a : \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ z & \mapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array}$. *Montrer que φ_a est bien définie (y compris $\varphi_a(D) \subset D$), bijective et déterminer φ_a^{-1}.*

- *Montrons que φ_a est bien définie i.e. pour tout $z \in D$, $1 - \overline{a}z \neq 0 \quad (\star)$ et $\varphi_a(z) \in D$.*
  Fixons $z \in D$.
  D'une part, $|\overline{a}z| = |\overline{a}||z| < 1$ donc $\overline{a}z \neq 1$.
  D'autre part, on peut montrer que $|\varphi_a(z)| < 1$ en montrant que $|\varphi_a(z)|^2 < 1$. Pour cela, on utilise le fait que $\forall Z \in \mathbb{C},\ |Z|^2 = Z\overline{Z}$. On a :
  $1 - |\varphi_a(z)|^2 = \cdots = \dfrac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} > 0$ *car a et z appartiennent à D.*

- *Soit $(x, y) \in D^2$. On résout $y = \varphi_a(x) \iff \ldots \iff x = \dfrac{y+a}{1+\overline{a}y} = \varphi_{-a}(y)$.*
  Remarquons que $1 + \overline{a}y \neq 0$ car $(-a, y) \in D^2$ et d'après $(\star)$.
  On vérifie qu'un tel x convient, i.e. $\forall y \in D$, $\dfrac{y+a}{1+\overline{a}y} \in D$, ce qui est le cas (d'après le premier point puisque $(-a, y) \in D^2$ ou encore parce que $\varphi_{-a}(D) \subset D$).
  Ainsi, $\boxed{\varphi_a \text{ est bijective et } \varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}}$.
  Sinon, on vérifie que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \mathrm{Id}_D$ et $\varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{Id}_D$, ce qui prouve là encore que $\boxed{\varphi_a \text{ est bijective}}$ et que $\boxed{\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}}$.

Exercice 20. *On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-1}{1-\overline{z}} \end{array}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.*

1. (a) *Déterminer les antécédents de 1 par f.*
   (b) *L'application f est-elle injective ?*
2. (a) *Calculer $|f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.*
   (b) *L'application f est-elle surjective ?*
   (c) *Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{U}$.*

Correction.

1. (a) *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a :*
   $$f(z) = 1 \iff z - 1 = 1 - \overline{z} \iff z + \overline{z} = 2 \iff 2\mathrm{Re}(z) = 2 \iff \mathrm{Re}(z) = 1.$$
   Ainsi, $\boxed{\text{les antécédents de 1 par } f \text{ sont les complexes de la forme } 1 + iy \text{ avec } y \in \mathbb{R}^*}$ i.e. $f^{-1}(\{1\}) = \{1 + iy \mid y \in \mathbb{R}^*\}$.
   (b) *D'après ce qui précède, $\underline{f(1+i) = f(1+2i) = 1}$ et $1 + i \neq 1 + 2i$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.*
2. (a) *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a :*
   $$1 - \overline{z} = \overline{1 - z} = -\overline{(z-1)}.$$
   Ainsi, $f(x) = -\dfrac{z-1}{\overline{(z-1)}}$. Puisqu'un complexe et son conjugué ont même module, on en déduit que $\boxed{|f(z)| = 1}$.
   (b) *D'après ce qui précède, tout complexe de module différent de 1 n'a pas d'antécédent par f. En particulier, $2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{C}$ d'où $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.*

(c) *D'après 2.(a), on a* $\underline{\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{U}}$. *Montrons l'inclusion réciproque.*
Soit $\omega \in \mathbb{U}$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\omega = e^{i\theta}$.
Méthode 1. *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. *On a :*

$$f(z) = e^{i\theta} \iff z - 1 = (1 - \overline{z})e^{i\theta} \iff z + \overline{z}e^{i\theta} = 1 + e^{i\theta}.$$

En factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ *de chaque côté de l'équation, il vient :*

$$\begin{aligned} f(z) = e^{i\theta} &\iff e^{i\frac{\theta}{2}}\left(ze^{-i\frac{\theta}{2}} + \overline{z}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &\iff \mathrm{Re}\left(ze^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \qquad\qquad \textit{car } 2e^{i\frac{\theta}{2}} \neq 0 \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid ze^{-i\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + iy \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid z = \left(\cos\frac{\theta}{2} + iy\right)e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Considérons $y_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(\cos(\theta/2) + iy_0)e^{i\theta/2} \neq 1$, *de sorte que* $z_0 := (\cos(\theta/2) + iy_0)e^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. *Alors* $f(z_0) = e^{i\theta} = \omega$, *ce qui prouve que* $\underline{\mathbb{U} \subset \mathrm{Im} f}$.
Méthode 2. *Si* $e^{i\theta} \neq 1$, *alors on peut remarquer que*

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - 1}{1 - e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta} - 1)}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\theta},$$

donc $e^{i\theta}$ *est un antécédent de lui-même.*
Si $e^{i\theta} = 1$, *alors d'après la question (1a), on a* $f(1+i) = 1$, *donc 1 a un antécédent par* f.
Dans tous les cas, tout élément de $\mathbb{U}$ *admet au moins un antécédent par* f *donc* $\underline{\mathbb{U} \subset \mathrm{Im} f}$.
Finalement, $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{U}.}$

Exercice 21. Trace sur A. *Soient* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.

1. *Montrer que l'application* f_A *est injective si et seulement si* $A = E$.
2. *Montrer que l'application* f_A *est surjective si et seulement si* $A = E$.

Correction.

1.
   - *Supposons* f *injective. Remarquons que* $f(A) = f(E)$ *(car* $f(A) = A \cap A = A$ *et* $f(E) = E \cap A = A$*). Par injectivité de* f*, on a donc* $A = E$.
   - *Supposons* $A = E$*, alors* f *est l'identité de* $\mathcal{P}(E)$ *; elle est donc injective.*
2.
   - *Supposons* f *surjective. Alors :* $\forall Y \subset E, \exists X \subset E \mid Y = X \cap A$. *En particulier,* $\forall Y \subset E$, $Y \subset A$. *En particulier,* $E \subset A$. *Puisque l'inclusion réciproque est vraie, on a l'égalité* $A = E$.
   - *Supposons* $A = E$*, alors* f *est l'identité de* $\mathcal{P}(E)$ *; elle est donc surjective.*

Exercice 22. Traces sur des parties. *Soient E un ensemble et $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.*
On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B). \end{array}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective). Quand f est bijective, exhiber sa réciproque.

Correction.

Injectivité. *Montrons que* $\boxed{f \text{ est injective ssi } A\cup B = E}$.

Sens direct. *Supposons f injective et montrons que $E \subset A\cup B$.*
Soit $x\in E$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x \in \overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$.
Alors $\{x\}\cap A = \varnothing$ et $\{x\}\cap B=\varnothing$, si bien que $\underline{f(\{x\}) = (\varnothing,\varnothing) = f(\varnothing)}$. Or, f est injective donc $\{x\}=\varnothing$, ce qui est absurde. Ainsi, $x\in A\cup B$. On a donc montré que $E\subset A\cup B$. On a toujours $A\cup B\subset E$ donc on a l'égalité puis le sens direct.

Sens réciproque. *Supposons que $A\cup B = E$ et montrons que f est injective.*
Soient $X, Y\subset E$ tels que $f(X)=f(Y)$. Alors $X\cap A = Y\cap A$ et $X\cap B = Y\cap B (*)$. On a :

$$\begin{aligned} X &= X\cap E = X\cap(A\cup B) && \text{car } A\cup B = E \\ &= (X\cap A)\cup(X\cap B) && \text{par distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup \\ &= (Y\cap A)\cup(Y\cap B) && \text{d'après } (*) \\ &= Y\cap(A\cup B) = Y\cap E = Y, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'injectivité de f.

Surjectivité. *Montrons que* $\boxed{f \text{ est surjective ssi } A\cap B=\varnothing}$.

Sens direct. *Supposons f surjective. Montrons que $A\cap B=\varnothing$.*
$\underline{(\varnothing, A\cap B)\in\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)}$ et comme f est surjective, il existe $X\in\mathscr{P}(E)$ telle que $\varnothing = X\cap A$ et $A\cap B = X\cap B$. On a donc

$$A\cap B = (A\cap B)\cap A = (X\cap B)\cap A = (X\cap A)\cap B = \varnothing\cap B = \varnothing.$$

Sens indirect. *Supposons que $A\cap B=\varnothing$ et montrons que f est surjective.*
Soit $(C,D)\in\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)$. Trouvons $X\in\mathscr{P}(E)$ telle que $X\cap A = C$ et $X\cap B = D$. Un petit dessin suggère $\underline{X = C\cup D}$...
Posons donc $X = C\cup D$. On a alors : $X\cap A = (C\cup D)\cap A = (C\cap A)\cup(D\cap A)$.
Comme $C\subset A$ et $D\subset B = \overline{A}$, on a respectivement, $C\cap A = C$ et $D\cap A=\varnothing$, donc $X\cap A = C\cup\varnothing = C$.
De même, $X\cap B = (C\cup D)\cap B = (C\cap B)\cup(D\cap B) = \varnothing\cup D = D$.

Bijection.

$$\begin{aligned} f \text{ bijective } &\text{si et seulement si } f \text{ injective et surjective} \\ &\text{si et seulement si } A\cup B = E \text{ et } A\cap B=\varnothing \\ &\text{si et seulement si } \boxed{A \text{ et } B \text{ forment un recouvrement disjoint de } E}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\boxed{f^{-1}(C,D) = C \cup D}$ *(d'après la surjectivité).*

Exercice 23. Théorème de Cantor.

1. *Justifier qu'il existe une injection naturelle de E dans $\mathscr{P}(E)$.*
2. *Montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathscr{P}(E)$.*
   Indication : *On pourra considérer la partie $A = \{x \in E \mid x \neq f(x)\}$.*

Correction.

1. *Il y a l'injection triviale* $f: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.
2. *Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective.*
   Soit $A = \{x \in E \mid x \neq f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f.
   Supposons par l'absurde que A ait un antécédent $a \in E$ par f. Alors $f(a) = A$. Deux cas sont possibles :
   - *si $a \in A$ alors $a \neq f(a)$, ce qui est absurde ;*
   - *si $a \notin A$ alors $a = f(a) = A$, ce qui est absurde.*

   Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 24. Applications images. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On considère les applications*

$$\phi: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ X & \mapsto & f(X) \end{array} \quad \text{et} \quad \psi: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ Y & \mapsto & f^{-1}(Y). \end{array}$$

1. *Montrer les équivalences f injective $\Longleftrightarrow \phi$ injective $\Longleftrightarrow \psi$ surjective.*
2. *Montrer les équivalences f surjective $\Longleftrightarrow \phi$ surjective $\Longleftrightarrow \psi$ injective.*

Correction.

1. *Voilà le plan de démonstration.*
   (a) *f injective $\Longrightarrow \phi$ injective.*
   (b) *ϕ injective $\Longrightarrow f$ injective.*
   (c) *f injective $\Longrightarrow \psi$ surjective.*
   (d) *ψ surjective $\Longrightarrow f$ injective (par contraposée).*

   (a) *Supposons f injective.*
   Soient $X, X' \in \mathscr{P}(E)$ tels que $\phi(X) = \phi(X')$. On a donc $f(X) = f(X')$. Montrons $X = X'$.
   On procède par double inclusion.
   - *Soit $x \in X$.*
     Puisque $f(X) = f(X')$, l'élément $f(x)$, qui appartient clairement à $f(X)$, doit appartenir à $f(X')$. On peut donc trouver $x' \in X'$ tel que $f(x) = f(x')$.

Comme f est injective, cette dernière égalité entraîne que $x = x'$, et donc que $x \in X'$.
On a donc montré l'inclusion $X \subset X'$.

- *On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $X' \subset X$.*

(b) *Supposons ϕ injective.*
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Posons $X = \{x\}$ et $X' = \{x'\}$ [a] Ce sont des éléments de $\mathscr{P}(E)$ pour lesquels on a

$$\phi(X) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad \phi(X') = f(\{x'\}) = \{f(x')\}.$$

Ainsi, $\phi(X) = \phi(X')$, donc l'injectivité de ϕ entraîne que $X = X'$, c'est-à-dire $\{x\} = \{x'\}$.
On en déduit que $x = x'$.
On a donc montré l'injectivité de f.

(c) *Supposons f injective.*
Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a donc $X \subset E$.
Posons $Y = f(X) = \{f(x),\ x \in X\}$. Montrons que $\psi(Y) = X$.
On procède par double inclusion.

- *Soit $x \in \psi(Y) = f^{-1}(Y)$.*
Par définition, cela signifie que $f(x) \in Y$, c'est-à-dire que $f(x) \in f(X)$.
On peut donc trouver $x' \in X$ tel que $f(x) = f(x')$.
Par injectivité de f, on en déduit $x = x'$, et donc $x \in X$.
On a ainsi montré l'inclusion $\psi(Y) \subset X$.
- *Réciproquement, soit $x \in X$.*
On a $f(x) \in f(X) = Y$, donc $x \in f^{-1}(Y)$.
On a ainsi montré l'inclusion $X \subset \psi(Y)$.

On en déduit que $\psi(Y) = X$. On a donc bien montré la surjectivité de ψ.

(d) *Supposons que f n'est pas injective. On peut donc trouver deux éléments $x \neq x'$ de E tels que $f(x) = f(x')$. Notons $y = f(x) = f(x')$.*
Montrons que ψ n'est pas surjective. Plus précisément, on va montrer que $\{x\}$ n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire que $\forall Y \in \mathscr{P}(F), \psi(Y) \neq \{x\}$.
Pour cela, soit $Y \in \mathscr{P}(F)$. Distinguons deux cas.

- *Si $y \in Y$, alors x et x' appartiennent à $f^{-1}(Y) = \psi(Y)$. Comme $x' \in \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.*
- *Si $y \notin Y$, alors ni x ni x' n'appartient à $f^{-1}(Y) = \psi(Y)$. Comme $x \notin \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.*

Cela prouve donc que ψ n'est pas surjective.

2. *Voilà le plan de démonstration.*

(a) *f surjective $\Longrightarrow$ ϕ surjective.*

(b) *ϕ surjective $\Longrightarrow$ f surjective.*

(c) *f surjective $\Longrightarrow$ ψ injective.*

(d) *ψ injective $\Longrightarrow$ f surjective (par contraposée).*

(a) *Supposons f surjective et montrons que ϕ est surjective.*
Soit $Y \in \mathscr{P}(F)$.
Posons $X = f^{-1}(Y)$ et montrons que $\phi(X) = Y$.
On procède par double inclusion.

- *Soit $y \in \phi(X) = f(X)$.*
On peut donc trouver $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $X = f^{-1}(Y)$, on en déduit que x vérifie $f(x) \in Y$, donc que $y \in Y$.
Cela montre l'inclusion $\phi(X) \subset Y$.
- *Réciproquement, soit $y \in Y$.*
Comme f est surjective, on peut trouver $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
Comme $y \in Y$, on a $f(x) \in Y$, donc $x \in f^{-1}(Y) = X$.
Cela montre que $y = f(x) \in f(X) = \phi(X)$.
On a donc montré l'inclusion $Y \subset \phi(X)$.

On a donc bien montré que $\phi(X) = Y$.
Cela montre la surjectivité de ϕ.

(b) *Supposons ϕ surjective. Montrons que f est surjective.*
Soit $y \in Y$.
Comme ϕ est surjective, on peut trouver un ensemble $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\phi(X) = \{y\}$.
L'ensemble X est non vide. En effet, $\phi(\varnothing) = f[\varnothing] = \varnothing \neq \{y\}$.
On peut donc trouver un élément $x \in X$. On a alors $f(x) \in f(X) = \{y\}$, d'où l'on déduit $y = f(x)$.
Cela prouve la surjectivité de f.

(c) *Supposons f surjective. Montrons ψ injective.*
Soit $Y, Y' \in \mathscr{P}(F)$ tels que $\psi(Y) = \psi(Y')$, c'est-à-dire $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y')$. Montrons $Y = Y'$.
On procède par double inclusion.

- *Soit $y \in Y$.*
Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Puisque $y \in Y$, on a $x \in f^{-1}(Y)$.
D'après l'hypothèse, on en déduit que $x \in f^{-1}(Y')$, donc que $y = f(x) \in Y'$.
Cela montre l'inclusion $Y \subset Y'$.
- *On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $Y' \subset Y$.*

On a donc $Y = Y'$, ce qui prouve que ψ est injective.

(d) *Supposons f non surjective. On peut donc trouver $y \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) \neq y$.*
En particulier, on a alors

$$f^{-1}[\{y\}] = \{x \in E \mid f(x) = y\} = \varnothing = f^{-1}(\varnothing),$$

c'est-à-dire $\psi(\{y\}) = \psi(\varnothing)$. Comme $\{y\} \neq \varnothing$, cela montre que ψ n'est pas injective.

---

a. L'hypothèse que nous avons sous la main (l'injectivité de ϕ) est une assertion quantifiée commençant par un quantificateur existentiel ($\forall X, X' \in \mathscr{P}(E),\ \phi(X) = \phi(X')$). Comme toute hypothèse de ce type, c'est à nous de trouver des ensembles à qui l'appliquer pour en déduire quelque chose de pertinent. On a ici eu une idée, celle d'appliquer cette hypothèse à nos deux singletons. Cela peut paraître assez malin, mais on constate que c'est en fait presque forcé : dans un contexte aussi abstrait, à quels éléments de $\mathscr{P}(E)$, c'est-à-dire à quelles parties de E, pouvons-nous appliquer l'hypothèse ? Les premières parties que nous pouvons nommer sont $\varnothing$ et X ; viennent ensuite les parties que nous pouvons définir à partir de x et x', c'est-à-dire $\{x\}$, $\{x'\}$, $\{x, x'\}$ et leurs complémentaires, puis enfin d'autres parties plus complexes construites à partir de f comme $f^{-1}(f(\{x\}))$, etc. Se demander naïvement à qui nous pouvons bien appliquer l'hypothèse nous conduit assez directement à la bonne solution.