Ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Max et min)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On souhaite exprimer $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$ en fonction de $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{|b-a|}{2}$.
Conjecturer, puis prouver ces formules.

Correction.

$\boxed{\max(a,b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{1}{2}(a+b+|b-a|)}$ et $\boxed{\min(a,b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{1}{2}(a+b-|b-a|)}$.

Le voir sur un dessin.
Pour la justification distinguer les cas $a \leq b$ et $a > b$.

Exercice 2 (Une autre écriture d'un segment)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Montrer que

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| + |x-b| = |a-b|\}.$$

Correction. Notons $D := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| + |x-b| = |a-b|\}$ et montrons que $[a,b] = D$ par double inclusion.

- Soit $x \in [a,b]$. Alors $a \leq x \leq b$. Ainsi, $|x-a| + |x-b| = (x-a) + (b-x) = b-a = |a-b|$ donc $\boxed{x \in D}$.
- Soit $x \in D$.
  Raisonnons par l'absurde en supposant $x < a$. Comme $b \geq a$, alors $b > x$. Ainsi, $|x-a| + |x-b| = a-x+b-x = a+b-2x$.
  Par ailleurs, $|x-a| + |x-b| = |a-b| = b-a$, d'où $a+b-2x = b-a$. Or, ceci impliquerait que $x = a$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $x \geq a$.
  Alors $|x-a| = x-a$, et $|x-b| = |a-b| - |x-a| = (b-a) - (x-a) = b-x$. Ainsi, $b-x \geq 0$ donc $b \geq x$.
  D'où : $\boxed{x \in [a,b]}$.

Exercice 3 (Inéquations)

Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes.

1. $|x+1| \leq 2$
2. $|x+1| > 1$
3. $|2x-4| \leq |x-1|$

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|x+1| \leq 2 \iff -2 \leq x+1 \leq 2 \iff -3 \leq x \leq 1$, donc $\boxed{S = [-3,1]}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|x+1| > 1 \iff (x+1 > 1 \text{ ou } x+1 < -1) \iff (x > 0 \text{ ou } x < -2)$ donc $\boxed{S =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Méthode 1.

On a : $|2x-4| \leq |x-1| \Leftrightarrow (2x-4)^2 \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-14x+15 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1, x_2] = \left[\frac{5}{3}, 3\right]$.
Méthode 2. Distinguer les cas $x \geq 2$, $1 \leq x < 2$ et $x < 1$.
Le premier cas donne que $[2,3]$ est solution, le deuxième cas donne que $\left[\frac{5}{3}, 2\right[$ est solution, le troisième cas est impossible.
En conclusion, on trouve $\boxed{S = \left[\frac{5}{3}, 3\right]}$.

Exercice 4 (Inégalités)

Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$
2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2$.
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^4 \leq 8\left(a^4+b^4\right)$.
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Correction.

1. Soit $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Or, un carré de réel est positif, donc par équivalences, on a $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Soit $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. D'après 1., on a $ab+ac+bc \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a^2+c^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Méthode 1. On étudie le signe de la différence :

$$\begin{aligned}
8(a^4+b^4)-(a+b)^4 &= 8a^4+8b^4-(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\\
&= 7a^4+7b^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3\\
&= (a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)+(6a^4-12a^2b^2+6b^4)\\
&= (a-b)^4+6(a^2-b^2)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Méthode 2. D'après la formule du binôme : $(a+b)^4 = (a^4+b^4)+4(a^3b+ab^3)+6a^2b^2$.
D'après 1., $6a^2b^2 \leq 3(a^4+b^4)$.
Pour conclure, il suffit de montrer que $a^3b+ab^3 \leq a^4+b^4$ *i.e.* $(a^3-b^3)(a-b) \geq 0$. Or, cette dernière assertion est vraie (puisque la fonction cube est strictement croissante, les termes $a-b$ et a^3-b^3 sont de même signe donc leur produit est positif). Finalement, on a l'inégalité demandée.
Méthode 3. D'après 1., on a $a^2+b^2 \geq 2ab$ donc $2(a^2+b^2) \geq a^2+2ab+b^2$ *i.e.*

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \quad (\star).$$

En appliquant cette inégalité au couple de réels (a^2, b^2), on a aussi : $2(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)^2$.
En multipliant par 4, il vient :

$$8(a^4+b^4) \geq 4(a^2+b^2)^2 = \left[2(a^2+b^2)\right]^2 \geq (a+b)^4,$$

en utilisant $(\star)$ et la croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
Méthode 1. On a :

$$|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|} \iff (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \leq |a-b| \iff b+a-2\sqrt{ab} \leq |b-a| \iff \frac{a+b-|a-b|}{2} \leq \sqrt{ab}$$
$$\iff \min(a,b) \leq \sqrt{ab} \iff \min(a,b)^2 \leq ab,$$

car $\min(a,b) \geq 0$. Or, $\min(a,b) \leq \max(a,b)$ et $\min(a,b) \geq 0$ donc $\min(a,b)^2 \leq \min(a,b)\max(a,b) = ab$. D'après les équivalences précédentes, on a bien montré $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Méthode 2. Sans perte de généralité, supposons $a \leq b$. Alors

$$|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|} \iff (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \leq b-a \iff a \leq \sqrt{ab}.$$

Or, la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leq a \leq b$, donc $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. En multipliant par $\sqrt{a} \geq 0$, on obtient $a \leq \sqrt{ab}$, et les équivalences précédentes permettent de conclure.
Méthode 3. Par IT, on a $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
En multipliant par la quantité positive $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$, on obtient :

$$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|^2 \leq \underbrace{\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|}_{=\left|(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})\right|=\left|\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2\right|=|a-b|},$$

puis par croissance de la fonctions $\sqrt{\cdot}$, on a $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$, CQFD.

Exercice 5 (Intervalle)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On note

$$I+J = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in I,\ \exists j \in J : x = i+j\}.$$

Montrer que $I+J$ est un intervalle.

Correction. Soit $(x,x') \in (I+J)^2$ tel que $x \leq x'$. Montrons que $[x,x'] \subset I+J$. Soit $z \in [x,x']$. Montrons que $z \in I+J$.
$z \in [x,x']$ donc il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = (1-\lambda)x + \lambda x'$.
$(x,x') \in (I+J)^2$ donc il existe $(i,i') \in I^2$ et $(j,j') \in J^2$ tels que $x = i+j$ et $x' = i'+j'$. Ainsi

$$\begin{aligned} z &= (1-\lambda)x + \lambda x' \\ z &= (1-\lambda)(i+j) + \lambda(i'+j') \\ z &= \underbrace{(1-\lambda)i + \lambda i'}_{\in[i,i'] \text{ ou } [i',i]} + \underbrace{(1-\lambda)j + \lambda j'}_{\in[j,j'] \text{ ou } [j',j]} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, I et J sont des intervalles donc $[i,i'] \subset I$ ou $[i',i] \subset I$ et $[j,j'] \subset J$ ou $[j',j] \subset J$. Dans tous les cas, on a donc écrit z sous la forme d'une somme d'un élément de I et d'un élément de J donc $z \in I+J$.
Ainsi, $\boxed{\forall (x,x') \in (I+J)^2,\ [x,x'] \subset I+J}$, ce qui prouve que $\boxed{I+J \text{ est un intervalle}}$.

Dérivées

Exercice 6 (Limites)

1. Déterminer les limites quand x tend vers 0 des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \qquad f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad f_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad f_4(x) = \ln(\cos(x)).$$

Les 3 premiers sont des taux d'accroissements de limites respectives : 0,1,1.
$f_4 = \ln \circ \cos$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par composée de fonctions continues), donc

$$\lim_{x \to 0} f_4(x) = f_4(0) = \ln(\cos 0) = \ln(1) = 0,$$

ou bien par composition de limites : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ et $\lim\limits_{y \to 1} \ln y = \ln 1 = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} f_4(x) = 0$.

2. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes

$$g_1(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \qquad g_2(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(x)} \qquad g_3(x) = \frac{e^x}{x + \sqrt{x} + 1} \qquad g_4(x) = \frac{\ln(x+5)}{5 + \ln(x)}.$$

- Pour $x > 0$, on écrit : $g_1(x) = \dfrac{3 - 1/x^2}{2 - 1/x - 1/x^2}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = \dfrac{3}{2}$.
- Pour $x > 1$, on a $|\sin x| \leq 1$ et $\ln x > 0$, donc $0 \leq |g_2(x)| \leq \underbrace{\dfrac{1}{\ln x}}_{\to 0}$. Donc, par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x) = 0$.
- FI $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour $x > 0$, on a $g_3(x) = \dfrac{e^x}{x} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée et produit de limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_3(x) = +\infty}$.
- Pour $x > 1$, on écrit $\ln(x+5) = \ln x + \ln\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)$. En divisant par $\ln x$ (qui est non nul) au numérateur et au dénominateur, on trouve que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g_4(x) = 1}$.

3. Déterminer les limites au point demandé des fonctions suivantes

$$h_1(x) = \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x} \text{ (en 0)} \qquad h_2(x) = \sqrt{x^2+1} + x \text{ (en } -\infty) \qquad h_3(x) = \sqrt{x^2+2x} - x \text{ (en } +\infty).$$

- Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$ en 0. Puis $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}}$.
  Il s'agit aussi du taux d'accroissement de $\sqrt{\cdot}$ en 5. Même conclusion.
- FI mais en multipliant par le conjugué, on trouve que $h_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ puis $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) = 0}$.
- FI mais en multipliant par le conjugué, on trouve que $h_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$.
  On a encore une FI mais en divisant par $x \neq 0$ au numérateur et au dénominateur, on trouve que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h_3(x) = 1}$.

Exercice 7 (Dérivées)

Sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x^3+x-2)^4$
2. $f(x) = \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$
3. $f(x) = (\cos^2 x + \frac{3}{2})\sin(2x)$
4. $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^4}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
6. $f(x) = \ln(\ln(x))$
7. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
8. $f(x) = \sin\left(\ln(1+\frac{2}{x})\right)$

Correction.

1. $\boxed{f'(x) = 4(x^3+x-2)^3(3x^2+1)}$
2. $\boxed{f'(x) = \dfrac{-e^x+e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}}$
3. $f'(x) = (-2\sin(x)\cos(x)) \times \sin(2x)$
   $+ (\cos^2(x)+\frac{3}{2})2\cos(2x)$ puis en simplifiant
   $\boxed{f'(x) = -\sin^2(2x) + 2\cos^2 x\cos(2x) + 3\cos(2x)}$
4. $\boxed{f'(x) = \dfrac{(\ln x)^3(4-\ln x)}{x^2}}$
5. $\boxed{f'(x) = e^{x-\frac{1}{x}}\dfrac{x^4-1-2x^3}{x^2(x^2-1)^2}}$
6. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}}$
7. Voir, $f(x) = \cos(x)(\sin(x)+2)^{-1/2}$
   $\boxed{f'(x) = -\dfrac{\sin^2 x + 4\sin x + 1}{2(\sin(x)+2)^{3/2}}}$
8. $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2}{x^2+2x}\cos\left(\ln(1+\frac{2}{x})\right)}$

Exercice 8 (Une équation fonctionnelle)

Soit $g : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) - g(x) = 0.$$

Correction. Tout d'abord, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > x$ donc $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Fixons désormais $x \in \mathbb{R}$.

- En élevant au carré, $g(x)^2 = \sqrt{1+x^2} - x$.
- En dérivant terme à terme, on obtient : $2g'(x)g(x) = -\dfrac{g(x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$. Or, $g(x) > 0$ donc
$$2\sqrt{1+x^2}g'(x) = -g(x).$$
- Redérivons puis multiplions par $2\sqrt{1+x^2}$, il vient : $4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) = -2\sqrt{1+x^2}g'(x) = g(x)$, ce qui conclut.

Parité, périodicité, monotonie

Exercice 9 (Parties positive et négative)

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ la **partie positive** de f et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$ la **partie négative** de f.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $f^+(x)$ et $f^-(x)$ suivant le signe de $f(x)$.
2. Dans le cas où $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x \end{array}$, représenter graphiquement f, $|f|$, f^+ et f^-.

Correction. Remarquons que $\boxed{f^+ = \max(f,0) \geq 0}$ et $\boxed{f^- = \max(-f,0) = -\min(f,0) \geq 0}$.

1. Soit $x \in \mathcal{D}$.
   Si $f(x) \geq 0$ alors $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$.
   Si $f(x) < 0$ alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$.
   Remarquons que $\boxed{f^+ \text{ et } f^- \text{ sont à valeurs positives}}$, que $\boxed{f^+ + f^- = |f|}$ et que $\boxed{f = f^+ - f^-}$.
2. Voir brouillon.
   f est un polynôme de degré 2 ayant pour racine 0 et 2 donc $\mathscr{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut, ayant pour minimum -1, atteint en 1.
   $|f| \geq 0$ et vaut f si f est positive, $-f$ sinon.
   f^+ vaut f si f est positive, 0 sinon.
   f^- vaut 0 si f positive et $-f$ sinon.

Exercice 10 (Parité)

Soit $(f,g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$.

1. On suppose f et g paires. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?
2. On suppose f et g impaires. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?
3. On suppose f paire et g impaire. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?

Correction.

1. - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$
   donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc paire}}$.
   - Pour tout $x \in X$, on a :
   $$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$
   donc la fonction $\boxed{f+g \text{ est donc paire}}$.
2. - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x),$$
   donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc paire}}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),$$
   donc la fonction $\boxed{f+g \text{ est donc impaire}}$.
3. - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x),$$
   donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc impaire}}$.
   - $\boxed{\text{On ne peut rien dire en général de la somme}}$. Plus précisément, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x).$$
   Ainsi :
     - $(f+g)$ est paire ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = f(x) + g(x)$ c'est-à-dire ssi $g = 0$.
     - $(f+g)$ est impaire si et seulement si $f = 0$.

Exercice 11 (Dérivée d'une fonction (im)paire)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire, que dire de la parité de f' ?
2. Si f est périodique, montrer que f' est périodique, de même périodicité que f.

Correction.

1. Supposons que f soit paire.
   Méthode 1. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. On en déduit l'égalité de fonctions : $f \circ (-\mathrm{Id}) = f$, donc de leurs dérivées (puisqu'elles sont toutes dérivables) : $(f' \circ (-\mathrm{Id}) \times (-1) = f'$ d'où $f' \circ (-\mathrm{Id})) = -f'$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$ donc $\boxed{f' \text{ est impaire}}$.

   Méthode 2 (avec le T.A.). Soit $a \in \mathbb{R}$. On a
   $$-f'(a) = -\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(f\ paire)}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(-x)-f(-a)}{-x-(-a)} \underset{(y=-x)}{=} \lim_{y\to -a} \frac{f(y)-f(-a)}{y-(-a)} = f'(-a),$$
   d'où f' est impaire.
   De même, $\boxed{\text{si } f \text{ est impaire, alors } f' \text{ est paire}}$.

2. Supposons f périodique. Alors il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$.
   Méthode 1. Notons $g : x \mapsto x + T$. Alors on a : $f = f \circ g$. Ces fonctions étant dérivables, leurs dérivées sont égales (et $g' = 1$) donc : $f' = (f' \circ g) \times g' = f' \circ g$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(g(x)) = f'(x+T)$, *i.e.* $\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique (comme } f)}$.

   Méthode 2 (avec le T.A.). Soit $a \in \mathbb{R}$. On a
   $$f'(a+T) = \lim_{x\to a+T} \frac{f(x)-f(a+T)}{x-(a+T)} \underset{(f\ T-per)}{=} \lim_{x\to a+T} \frac{f(x-T)-f(a)}{(x-T)-a} \underset{(y=x-T)}{=} \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a),$$
   d'où $\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique}}$.

Exercice 12 (Périodicité)

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, et soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions T-périodiques.
Montrer que $\varphi : x \mapsto f(\frac{x}{2}) + g(\frac{x}{3})$ est périodique.

Correction. On montre que $\boxed{\varphi \text{ est } 6T\text{-périodique}}$. La vérification est laissée au lecteur.

Exercice 13 (Être ou ne pas être périodique)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x).$$

1. On suppose que α est un nombre rationnel que l'on écrit $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que f est périodique.

   Montrons que f est $2\pi q$-périodique.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi q) &= \cos(x+2\pi q) + \cos\left(\alpha(x+2\pi q)\right) & \\ &= \cos(x) + \cos(\alpha x + 2\pi\alpha q) & \text{par } (2\pi)\text{-périodicité de cosinus} \\ &= \cos(x) + \cos(\alpha x) & \text{car } \alpha q = p \in \mathbb{Z} \text{ et par } (2\pi)\text{-périodicité de cosinus} \\ &= f(x) & \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{f \text{ est périodique.}}$

2. On suppose désormais que α est un nombre irrationnel (*i.e.* $\alpha \notin \mathbb{Q}$).

   (a) Montrer

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(a \leq 1 \text{ et } b \leq 1 \text{ et } a+b=2\Big) \implies \Big(a=1 \text{ et } b=1\Big).$$

   Méthode 1. Fixons $(a,b) \in \,]-\infty, 1]^2$ tel que $a+b=2$.
   On a donc $(a-1)+(b-1)=0$ ou encore $\underbrace{(a-1)}_{\text{négatif}} = \underbrace{-(b-1)}_{\text{positif}}$.
   Le réel $a-1$ est à la fois négatif et positif, donc il est nul. De même pour son opposé $b-1$.
   Donc $\boxed{a=b=1.}$
   Méthode 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq 1$, $b \leq 1$ et $a+b=2$.
   Supposons par l'absurde $a \neq 1$. Alors on aurait $a < 1$, et puisque $b \leq 1$, on obtiendrait $a+b<2$: contradiction. Ainsi, $\boxed{a=1}$. Par suite, comme $a+b=2$, on a aussi $\boxed{b=1}$.

   (b) Résoudre l'équation $f(x)=2$.

   Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x)=2$.
   Comme $\cos(x) \leq 1$ et $\cos(\alpha x) \leq 1$ et sont de somme 2, on peut utiliser la question précédente et en déduire que $\cos(x)=1$ et $\cos(\alpha x)=1$. D'où

$$x \equiv 0 \ [2\pi] \text{ et } \alpha x \equiv 0 \ [2\pi]$$

Alors on peut trouver $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 2\pi k$ et $\alpha x = 2\pi\ell$.
Ainsi $\alpha 2\pi k = 2\pi\ell$, donc $\alpha k = \ell$ (car $2\pi \neq 0$).
Si k était non nul, alors α serait un rationnel (égal à ℓ/k).
Donc k est nul. D'où $x = 0$.
Synthèse. On vérifie aisément que 0 est solution de l'équation.
$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ possède une unique solution, à savoir } x = 0.}$

(c) En déduire que f n'est pas périodique.

Raisonnons par l'absurde.
Si f était périodique, on pourrait trouver un $T > 0$ tel que f soit T-périodique.
Comme on a $f(0) = 2$, on aurait alors $f(T) = 2$, et on obtiendrait au moins deux solutions pour l'équation (qui n'admet qu'une unique solution !). D'où la contradiction ! Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$

3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

On a montré l'équivalence : $\boxed{f \text{ périodique} \iff \alpha \in \mathbb{Q}}$.

Exercice 14 (Croissance)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \overset{S}{=} f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) \overset{P}{=} f(x)f(y).$$

Montrer que f est croissante.

Correction. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.
Montrons que $f(x) \leq f(y)$, c'est-à-dire $f(y) - f(x) \geq 0$.
Avant cela, remarquons que $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
En effet, on a $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ donc $\underline{f(0) = 0}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = f(0) = f(t + (-t)) = f(t) + f(-t) \qquad \text{donc} \qquad \underline{f(-t) = -f(t)}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= f(y) + f(-x) && \text{par imparité de } f \\
&= f(y - x) && \text{d'après S} \\
&= f(\sqrt{y-x}^{\,2}) && \text{car } y - x \geq 0 \\
&= f(\sqrt{y-x})^2 && \text{d'après P} \\
&\geq 0 && \text{car } f \text{ est à valeurs réelles.}
\end{aligned}$$

Exercice 15 (Composées et monotonie)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Correction. Soit $x < y$. Montrons que $f(x) > f(y)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \leq f(y)$.
D'une part, comme $f(x) \leq f(y)$, on a, par croissance de $f \circ f$:

$$f \circ f\big(f(x)\big) \leq f \circ f\big(f(y)\big).$$

D'autre part, comme $x < y$, on a, par stricte décroissance de $f \circ f \circ f$:

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(y) \quad : \quad \textit{contradiction.}$$

Exercice 16 (« S'annule » VS « est nulle »)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante.
Montrer que si f s'annule, alors f est la fonction nulle.

Correction. Supposons que f s'annule. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$. On a aussi $g(a) = 0$.

⋆ D'une part, la décroissance de f implique que la fonction taux d'accroissement de f en a est négative :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

En effet, si $x \leq a$, alors $f(x) \geq f(a)$ et si $x \geq a$, alors $f(x) \leq f(a)$.

En utilisant le fait que $f(a) = 0$ et en multipliant par $x > 0$, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \leq 0.$$

⋆ D'autre part, la croissance de g implique que la fonction taux d'accroissement de g en a est positive :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0.$$

En utilisant le fait que $g(a) = 0$ et la définition de g, on obtient :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \geq 0$$

On obtient donc

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} = 0,$$

d'où

$$\forall\, x \neq a, \quad xf(x) = 0.$$

Comme x est non nul, on obtient
$$\forall\, x \neq a, \quad f(x) = 0.$$
De plus, $f(a) = 0$.
On obtient donc $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 0$ *i.e.* $\boxed{f \text{ est nulle}}$.

Étude de fonction

Exercice 17 (Fonction nulle)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leq f(x)$.
En considérant la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$, montrer que f est la fonction nulle.

Correction. Posons $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit... et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$. D'après l'hypothèse, $g'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq g(0) = 0$. Une exponentielle réelle étant > 0, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0$. Or, par hypothèse, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc finalement $\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+}$.

Exercice 18 (Une inégalité fonctionnelle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[a, b]$, telle que $f(a) = 0$. On suppose que
$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x)]^2.$$
Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Correction. En posant $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}[f(x)]^2$, on a donc $(I) \iff \forall x \in [a, b], g'(x) \leq g(x) \iff g'(x) - g(x) \leq 0$.
$\boxed{\text{Idée : On multiplie par } e^{-x} \neq 0, \text{ pour tout x.}}$
Ainsi : $\forall x \in [a, b], (g'(x) - g(x))e^{-x} \leq 0 \iff (g(x)e^{-x})' \leq 0 \iff ge^{-Id}$ décroît sur l'intervalle $[a, b]$. On pose $h = ge^{-Id}$. $h(a) = 0$ et h décroît sur $[a, b]$ donc $h \leq 0$ sur $[a, b]$. Comme $e^{-Id} > 0$, on en déduit que $g \leq 0$ sur $[a, b]$. Or, $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)]^2 \geq 0$ donc $g = 0$ sur $[a, b]$ puis $\boxed{f = 0 \text{ sur } [a, b]}$.

Exercice 19 (Bijection réciproque dérivable)

On pose $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble à préciser.
3. En notant f^{-1} l'application réciproque de f, montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1}.

Correction.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}$.
2. f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc d'après le TBM f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}}$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}} = \frac{f^{-1}}{2(f^{-1})^2+1}}.$$

Exercice 20 (Tangentes)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m : x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Correction.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f_m(0) = m$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_m'(x) = \dfrac{-x^2-2mx+1}{(x^2+1)^2}$ donc $f_m'(0) = 1$.
Ainsi, $T_0(f_m) : y = f_m'(0)(x-0) + f_m(0) = x + m$: toutes les tangentes ont le même coefficient directeur donc $\boxed{\text{elles sont parallèles}}$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. $f_m'(1) = -\dfrac{m}{2}$ et $f_m(1) = \dfrac{m+1}{2}$.
Ainsi, $T_1(f_m) : y = f_m'(1)(x-1) + f_m(1) = -\dfrac{m}{2}x + m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{m(2-x)+1}{2}$.
Méthode 1. On remarque que le point $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les tangentes en 0, donc elles sont concourantes.
Méthode 2. Soit $p \neq m$. Déterminons l'intersection de $T_1(f_m)$ et de $T_1(f_p)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$(x,y) \in (T_1(f_m)) \cap (T_1(f_p)) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x + m + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{p}{2}x + p + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Ainsi, le point de coordonnées $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les tangentes $(T_1(f_m))_{m\in\mathbb{R}}$ donc

$\boxed{\text{ces tangentes sont concourantes}}$.

Exercice 21 (Centre de symétrie) ♡

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet le point de coordonnées $(1,2)$ pour centre de symétrie. Étudier les branches infinies de f, les variations de f et tracer sa courbe représentative.

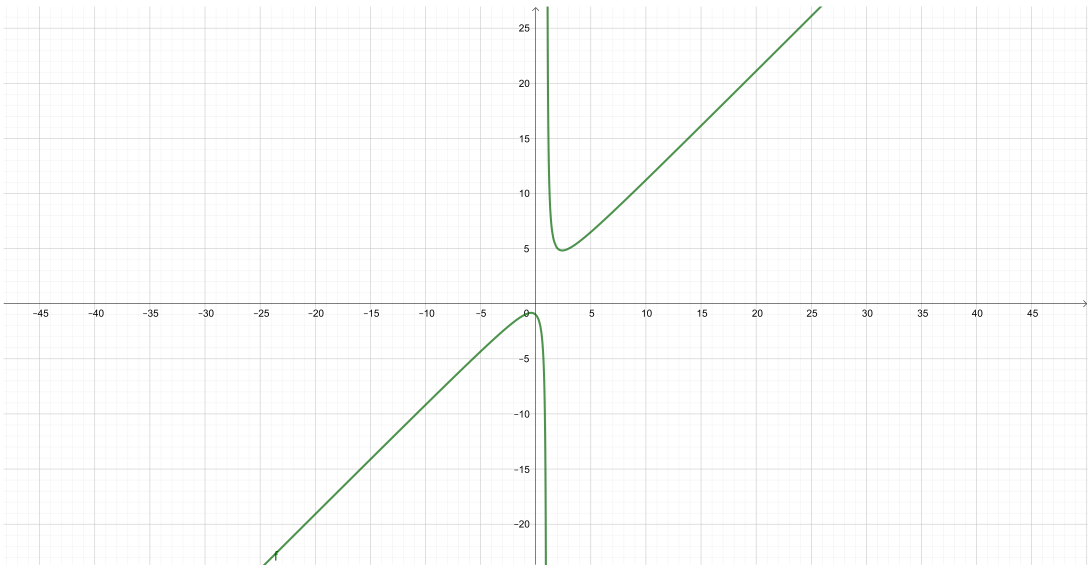
Correction.

- f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sur un dessin, on voit que
  $\boxed{(1,2) \text{ est centre de symétrie pour } \mathscr{C}_f \text{ si et seulement si pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 2}$.
  Justifions la traduction d'une symétrie centrale d'un graphe.
  Pour cela, travaillons dans le plan complexe. Considérons trois complexes z, z', ω et leurs images respectives M, M', Ω. Écrivons enfin les complexes sous forme algébrique :
  $$z = x+iy, \qquad z' = x'+iy' \qquad \text{et} \qquad \omega = a+ib.$$
  Dans le plan complexe, on a :
  $$\begin{aligned} M' \text{ est le symétrique de } M \text{ par rapport à } \Omega &\iff M' \text{ est l'image de } M \text{ par la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \pi \\ &\iff z'-\omega = (z-\omega)e^{i\pi} \\ &\iff z'-\omega = -(z-\omega) \\ &\iff z' = 2\omega - z \\ &\iff \begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = 2b-y \end{cases}. \end{aligned}$$
  On en déduit que :
  $$\begin{aligned} \text{le graphe de } f \text{ admet une symétrie de centre } (a,b) &\text{ssi } \forall x \in D_f,\ f(2a-x) = 2b - f(x) \\ &\text{ssi } \forall x \in D_f,\ \frac{f(2a-x)+f(x)}{2} = b \\ &\text{ssi } \forall t \mid a \pm t \in D_f,\ \frac{f(a-t)+f(a+t)}{2} = b \\ &\text{ssi } b \text{ est le milieu de } f(a+x) \text{ et } f(a-x) \text{ pour tout } x \text{ tel que } a \pm x \in D_f. \end{aligned}$$
  Ici, on a, pour tout $x \neq 0$, $f(1+x)+f(1-x) = 4$, ce qui montre que $(1,2)$ est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
  Il suffit donc d'étudier f sur $]1,+\infty[$. Le reste de la courbe se déduit par symétrie centrale par rapport au point $(1,2)$.

  Sinon. On montre que la fonction $g : x \mapsto f(x+1)-2 = \dfrac{x^2+2}{x}$ est impaire, donc son graphe admet le point $(0,0)$ comme centre de symétrie. D'après le cours, on sait que le graphe de g s'obtient à partir de celui de f par une translation horizontale de -1 et verticale de -2.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ donc $\mathscr{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$.
  Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ donc la droite $y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
  De plus, $f(x)-(x+1) = \dfrac{2}{x-1} > 0$ pour $x > 1$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote.
  N.B. : le symétrique de la droite d'équation $y = x+1$ par la symétrie de centre $(1,2)$ est cette même droite (car elle passe par le point $(1,2)$).

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, donc $\mathscr{C}_f$ a une asymptote verticale en 1.
  f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1,\ f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.
  Le numérateur s'annule en $1 \pm \sqrt{2}$, mais $1-\sqrt{2} < 1$. Notons $x_1 = 1+\sqrt{2}$. f est donc décroissante sur l'intervalle $]1, x_1]$ et croissante sur l'intervalle $[x_1,+\infty[$, donc f admet un minimum local en x_1, qui vaut $f(x_1) = 2\sqrt{2}+2 \simeq 5$. On a tout ce qu'il faut pour tracer la courbe de f.



Exercice 22 (Simplification de fonction)

On considère la fonction $f\ :\ x \longmapsto \exp\left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)}{\ln|2\cos(x)|}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à l'ensemble $\mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1-\sin(2x)} = |\sin(x)-\cos(x)|$ et $\sqrt{1+\sin(2x)} = |\sin(x)+\cos(x)|$.
4. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$ (on pourra distinguer deux cas).

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$ donc $1-\sin(2x) \geq 0$ et $1+\sin(2x) \geq 0$. Donc les fonctions $x \mapsto \sqrt{1-\sin(2x)}$ et $x \mapsto \sqrt{1+\sin(2x)}$ sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} > 0$ (car l'égalité ne se produit que si les deux racines carrées sont nulles, ce qui exclu car $\sin(2x)$ ne peut pas être simultanément égal à -1 et $+1$) donc $x \mapsto \ln\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit donc que f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $|2\cos(x)| \neq 1$ et $2\cos(x) \neq 0$ c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) \neq 1/2$, $\cos(x) \neq -1/2$ et $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \not\equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $x \not\equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $x \not\equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, ou encore $x \not\equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et $x \not\equiv$

$\frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$. Finalement, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \right)}.$$

2. Soit $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$ et puisque cos est paire et sin est impaire, il s'ensuit que $f(-x) = f(x)$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est paire}}$. De plus, $x + \pi \in \mathcal{D}$ et $f(x + \pi) = f(x)$. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$. Puisque f est π-périodique, il suffit de l'étudier sur une période *i.e.* sur l'ensemble $\mathcal{D} \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction f est paire, $\underline{\text{il suffit donc d'étudier } f \text{ sur l'ensemble } \mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}[\setminus\{\frac{\pi}{3}\}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x) - \cos(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) = 1 - \sin(2x)$. De même, $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + \sin(2x)$. Donc en passant à la racine carrée dans les deux égalités obtenues, il vient

$$\underline{\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\sin(x) - \cos(x)| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1 + \sin(2x)} = |\sin(x) + \cos(x)|}$$

4. Soit $x \in \mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\setminus\{\frac{\pi}{3}\}$, et $\sqrt{1 + \sin(2x)} = \sin(x) + \cos(x)$ car $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$.

   - Si $x > \frac{\pi}{4}$, alors $\sin x > \cos x$ donc $\sqrt{1 - \sin(2x)} = \sin x - \cos x$.
     On en déduit que $\underline{\text{pour } x > \frac{\pi}{4}}$,

     $$\boxed{f(x) = \exp\left(\frac{\ln\left(\sin x - \cos x + \sin x + \cos x\right)}{\ln(2\cos x)} \right) = \exp\left(\frac{\ln\left(2\sin x\right)}{\ln(2\cos x)} \right)}.$$

   - Si $x \leq \frac{\pi}{4}$, alors $\sin x \leq \cos x$ donc $\sqrt{1 - \sin(2x)} = \cos(x) - \sin(x)$ donc $\underline{\text{pour } x \leq \frac{\pi}{4}}$,

     $$\boxed{f(x) = \exp\left(\frac{\ln\left(-\sin x + \cos x + \sin x + \cos x\right)}{\ln(2\cos x)} \right) = \exp\left(\frac{\ln\left(2\cos x\right)}{\ln(2\cos x)} \right) = e}.$$