Ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1. Max et min (cours). *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *On souhaite exprimer* $\max(a,b)$ *et* $\min(a,b)$ *en fonction de* $\dfrac{a+b}{2}$ *et* $\dfrac{|b-a|}{2}$. *Conjecturer, puis prouver ces formules.*

Correction.

$\boxed{\max(a,b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{1}{2}(a+b+|b-a|)}$ *et* $\boxed{\min(a,b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{1}{2}(a+b-|b-a|)}$.

Le voir sur un dessin.
Pour la justification distinguer les cas $a \leq b$ et $a > b$.

Exercice 2. Une autre écriture d'un segment. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a \leq b$. *Montrer que*

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| + |x-b| = |a-b|\}.$$

Correction. *Notons* $D := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| + |x-b| = |a-b|\}$ *et montrons que* $[a,b] = D$ *par double inclusion.*

- *Soit* $x \in [a,b]$. *Alors* $a \leq x \leq b$. *Ainsi,* $|x-a| + |x-b| = (x-a) + (b-x) = b-a = |a-b|$ *donc* $\boxed{x \in D}$.
- *Soit* $x \in D$.
  Raisonnons par l'absurde en supposant $x < a$. *Comme* $b \geq a$, *alors* $b > x$. *Ainsi,* $|x-a| + |x-b| = a - x + b - x = a + b - 2x$.
  Par ailleurs, $|x-a| + |x-b| = |a-b| = b-a$, *d'où* $a + b - 2x = b - a$. *Or, ceci impliquerait que* $x = a$, *ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi,* $x \geq a$.
  Alors $|x-a| = x-a$, *et* $|x-b| = |a-b| - |x-a| = (b-a) - (x-a) = b-x$. *Ainsi,* $b - x \geq 0$ *donc* $b \geq x$.
  D'où : $\boxed{x \in [a,b]}$.

Exercice 3. Inéquations. *Résoudre les inéquations d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$ *suivantes.*

1. $|x+1| \leq 2$
2. $|x+1| > 1$
3. $|2x-4| \leq |x-1|$

Correction.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $|x+1| \leq 2 \iff -2 \leq x+1 \leq 2 \iff -3 \leq x \leq 1$, *donc* $\boxed{S = [-3,1]}$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $|x+1| > 1 \iff (x+1 > 1 \text{ ou } x+1 < -1) \iff (x > 0 \text{ ou } x < -2)$ *donc* $\boxed{S =]-\infty,-2[\, \cup\,]0,+\infty[}$.
3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. **Méthode 1 :**
   On a : $|2x-4| \leq |x-1| \Leftrightarrow (2x-4)^2 \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 15 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1, x_2] = \left[\dfrac{5}{3}, 3\right]$.
   Méthode 2 : *Distinguer les cas* $x \geq 2$, $1 \leq x < 2$ *et* $x < 1$.

Le premier cas donne que $[2,3]$ est solution, le deuxième cas donne que $\left[\frac{5}{3},2\right[$ est solution, le troisième cas est impossible.
En conclusion, on trouve $\boxed{S=\left[\frac{5}{3},3\right]}$.

Exercice 4. Inégalités. *Démontrer les inégalités suivantes.*

1. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$.
3. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)^4\leq 8\left(a^4+b^4\right)$.
4. $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leq\sqrt{|a-b|}$.

Correction.

1. *Soit* $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$. *On a :* $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)\iff(a-b)^2\geq 0$. *Or, un carré de réel est positif, donc par équivalences, on a* $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
2. *Soit* $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. *D'après 1., on a* $ab+ac+bc\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a^2+c^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2$.
3. *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
   Méthode 1. *On étudie le signe de la différence :*
$$\begin{aligned}8(a^4+b^4)-(a+b)^4&=8a^4+8b^4-(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\\&=7a^4+7b^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3\\&=(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)+(6a^4-12a^2b^2+6b^4)\\&=(a-b)^4+6(a^2-b^2)^2\geq 0.\end{aligned}$$
   Méthode 2. *D'après le binôme :* $(a+b)^4=(a^4+b^4)+4(a^3b+ab^3)+6a^2b^2$.
   D'après 1., $6a^2b^2\leq 3(a^4+b^4)$.
   Pour conclure, il suffit de montrer que $a^3b+ab^3\leq a^4+b^4$ *i.e.* $(a^3-b^3)(a-b)\geq 0$. *Or, cette dernière assertion est vraie (puisque la fonction cube est strictement croissante, les termes* $a-b$ *et* a^3-b^3 *sont de même signe donc leur produit est positif). Finalement, on a l'inégalité demandée.*
   Méthode 3. *D'après 1., on a* $a^2+b^2\geq 2ab$ *donc* $2(a^2+b^2)\geq a^2+2ab+b^2$ *i.e.*
$$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\quad(\star).$$
   En appliquant cette inégalité au couple de réels (a^2,b^2), *on a aussi :* $2(a^4+b^4)\geq(a^2+b^2)^2$.
   En multipliant par 4, il vient :
$$8(a^4+b^4)\geq 4(a^2+b^2)^2=\left[2(a^2+b^2)\right]^2\geq(a+b)^4,$$
   en utilisant $(\star)$ *et la croissance de* $t\mapsto t^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
4. *Soit* $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$.
   Méthode 1. *On a :*
$$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leq\sqrt{|a-b|}\iff(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\leq|a-b|\iff b+a-2\sqrt{ab}\leq|b-a|\iff\frac{a+b-|a-b|}{2}\leq\sqrt{ab}$$
$$\iff\min(a,b)\leq\sqrt{ab}\iff\min(a,b)^2\leq ab,$$

car $\min(a,b) \geq 0$. *Or,* $\min(a,b) \leq \max(a,b)$ *et* $\min(a,b) \geq 0$ *donc* $\min(a,b)^2 \leq \min(a,b)\max(a,b) = ab$. *D'après les équivalences précédentes, on a bien montré* $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
Méthode 2. *Sans perte de généralité, supposons* $a \leq b$. *Alors*

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|} \iff (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \leq b - a \iff a \leq \sqrt{ab}.$$

Or, la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ *et* $0 \leq a \leq b$, *donc* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. *En multipliant par* $\sqrt{a} \geq 0$, *on obtient* $a \leq \sqrt{ab}$, *et les équivalences précédentes permettent de conclure.*

Exercice 5. Intervalle. *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *On note*

$$I + J = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in I,\ \exists j \in J : x = i + j\}.$$

Montrer que $I + J$ *est un intervalle.*

Correction. *Soit* $(x, x') \in (I+J)^2$ *tel que* $x \leq x'$. *Montrons que* $[x, x'] \subset I + J$. *Soit* $z \in [x, x']$. *Montrons que* $z \in I + J$.
$z \in [x, x']$ *donc il existe* $\lambda \in [0,1]$ *tel que* $z = (1-\lambda)x + \lambda x'$.
$(x, x') \in (I+J)^2$ *donc il existe* $(i, i') \in I^2$ *et* $(j, j') \in J^2$ *tels que* $x = i + j$ *et* $x' = i' + j'$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} z &= (1-\lambda)x + \lambda x' \\ z &= (1-\lambda)(i+j) + \lambda(i' + j') \\ z &= \underbrace{(1-\lambda)i + \lambda i'}_{\in [i,i'] \text{ ou } [i',i]} + \underbrace{(1-\lambda)j + \lambda j'}_{\in [j,j'] \text{ ou } [j',j]} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, I *et* J *sont des intervalles donc* $[i, i'] \subset I$ *ou* $[i', i] \subset I$ *et* $[j, j'] \subset J$ *ou* $[j', j] \subset J$. *Dans tous les cas, on a donc écrit* z *sous la forme d'une somme d'un élément de* I *et d'un élément de* J *donc* $z \in I + J$.
Ainsi, $\boxed{\forall (x, x') \in (I+J)^2,\ [x, x'] \subset I + J}$, *ce qui prouve que* $\boxed{I + J \text{ est un intervalle}}$.

Dérivées

Exercice 6. Limites.

1. *Déterminer les limites quand* x *tend vers* 0 *des fonctions suivantes*

$$f_1(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \qquad f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad f_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad f_4(x) = \ln(\cos(x)).$$

Les 3 premiers sont des taux d'accroissements de limite : 0,1,1.
$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.
$\lim_{y \to 1} \ln y = \ln 1 = 0$ *donc par composée,* $\lim_{x \to 0} f_4(x) = 0$.

2. *Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes*

$$g_1(x) = \frac{3x^2-1}{2x^2-x-1} \qquad g_2(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(x)} \qquad g_3(x) = \frac{e^x}{x+\sqrt{x}+1} \qquad g_4(x) = \frac{\ln(x+5)}{5+\ln(x)}.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x) = \frac{3}{2}$, *en tant que fonction rationnelle.*
- *Pour $x > 1$, on a $|\sin x| \leq 1$ et $\ln x > 0$, donc $0 \leq |g_2(x)| \leq \frac{1}{\ln x} \to 0$. Par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x) = 0$.*
- *FI $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x > 0$, on a $g_3(x) = \frac{e^x}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + \frac{1}{x^2}$. Par croissance comparée et produit de limites, on a :* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x) = +\infty}$.
- *Pour $x > 1$, on écrit $\ln(x+5) = \ln x + \ln\left(1+\frac{5}{x}\right)$. En divisant par $\ln x$ (qui est non nul) au numérateur et au dénominateur, on trouve que* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g_4(x) = 1}$.

3. *Déterminer les limites au point demandé des fonctions suivantes*

$$h_1(x) = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x} \text{ (en } 0) \qquad h_2(x) = \sqrt{x^2+1}+x \text{ (en } -\infty) \qquad h_3(x) = \sqrt{x^2+2x}-x \text{ (en } +\infty).$$

- *Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$ en 0. Puis* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}}$. *Il s'agit aussi du taux d'accroissement de $\sqrt{\cdot}$ en 5. Même conclusion.*
- *FI mais en multipliant par le conjugué, on trouve que $h_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ puis* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) = 0}$.
- *FI mais en multipliant par le conjugué, on trouve que $h_3(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$. On a encore une FI mais en divisant par $x \neq 0$ au numérateur et au dénominateur, on trouve que* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h_3(x) = 1}$.

Exercice 7. *Sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée des fonctions suivantes.*

1. $f(x) = (x^3 + x - 2)^4$
2. $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$
3. $f(x) = (\cos^2 x + \frac{3}{2})\sin(2x)$
4. $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^4}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$
6. $f(x) = \ln(\ln(x))$
7. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$
8. $f(x) = \sin\left(\ln(1 + \frac{2}{x})\right)$

Correction.

1. $\boxed{f'(x) = 4(x^3 + x - 2)^3(3x^2 + 1)}$
2. $\boxed{f'(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}}$
3. $f'(x) = (-2\sin(x)\cos(x)) \times \sin(2x)$ $+ (\cos^2(x) + \frac{3}{2})2\cos(2x)$ *puis en simplifiant* $\boxed{f'(x) = -\sin^2(2x) + 2\cos^2 x\cos(2x) + 3\cos(2x)}$
4. $\boxed{f'(x) = \dfrac{(\ln x)^3(4 - \ln x)}{x^2}}$
5. $\boxed{f'(x) = e^{x-\frac{1}{x}}\dfrac{x^4 - 1 - 2x^3}{x^2(x^2 - 1)^2}}$
6. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}}$
7. *Voir,* $f(x) = \cos(x)\,(\sin(x) + 2)^{-1/2}$ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{\sin^2 x + 4\sin x + 1}{2(\sin(x) + 2)^{3/2}}}$
8. $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2}{x^2 + 2x}\cos\left(\ln(1 + \frac{2}{x})\right)}$

Exercice 8. Une équation fonctionnelle. *Soit* $g : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - x}$. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 4(1 + x^2)g''(x) + 4xg'(x) - g(x) = 0.$$

Correction. *Tout d'abord, on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ *et* $\sqrt{1 + x^2} > x$ *donc* $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$ *et* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$. *Fixons désormais* $x \in \mathbb{R}$.

- *En élevant au carré,* $g(x)^2 = \sqrt{1 + x^2} - x$.
- *En dérivant terme à terme, on obtient :* $2g'(x)g(x) = -\dfrac{g(x)^2}{\sqrt{1 + x^2}}$. *Or,* $g(x) > 0$ *donc*
$$2\sqrt{1 + x^2}g'(x) = -g(x).$$
- *Redérivons puis multiplions par* $2\sqrt{1 + x^2}$, *il vient :* $4(1 + x^2)g''(x) + 4xg'(x) = -2\sqrt{1 + x^2}g'(x) = g(x)$, *ce qui conclut.*

Parité, périodicité, monotonie

Exercice 9. *Soit* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *On pose* $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ *la* **partie positive** *de* f *et* $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$ *la* **partie négative** *de* f.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *simplifier* $f^+(x)$ *et* $f^-(x)$ *suivant le signe de* $f(x)$.
2. *Dans le cas où* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x \end{array}$, *représenter graphiquement* f, $|f|$, f^+ *et* f^-.

Correction. *Remarquons que* $\boxed{f^+ = \max(f,0)}$ *et* $\boxed{f^- = \max(-f,0) = -\min(f,0) \geq 0}$.

1. *Soit* $x \in \mathcal{D}$.
   Si $f(x) \geq 0$ *alors* $f^+(x) = f(x)$ *et* $f^-(x) = 0$.
   Si $f(x) < 0$ *alors* $f^+(x) = 0$ *et* $f^-(x) = -f(x)$.
   Remarquons que $\boxed{f^+ \text{ et } f^- \text{ sont à valeurs positives}}$, *que* $\boxed{f^+ + f^- = |f|}$ *et que* $\boxed{f = f^+ - f^-}$.

2. *Voir brouillon.*
   f *est un polynôme de degré 2 ayant pour racine 0 et 2 donc* $\mathscr{C}_f$ *est une parabole tournée vers le haut, ayant pour minimum -1, atteint en 1.*
   $|f| \geq 0$ *et vaut* f *si* f *est positive,* $-f$ *sinon.*
   f^+ *vaut* f *si* f *est positive, 0 sinon.*
   f^- *vaut 0 si* f *positive et* $-f$ *sinon.*

Exercice 10. Parité. *Soit* $(f,g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$.

1. *On suppose f et g paires. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?*
2. *On suppose f et g impaires. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?*
3. *On suppose f paire et g impaire. Que dire de la parité de fg et de $f+g$?*

1. • *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc paire}}$.

• *Pour tout $x \in X$, on a :*

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

donc la fonction $\boxed{f+g \text{ est donc paire}}$.

2. • *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x),$$

donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc paire}}$.

• *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),$$

donc la fonction $\boxed{f+g \text{ est donc impaire}}$.

3. • *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x),$$

donc la fonction $\boxed{fg \text{ est donc impaire}}$.

• $\boxed{\text{On ne peut rien dire en général de la somme}}$. *Plus précisément, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x).$$

Ainsi :

– *$(f+g)$ est paire ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = f(x) + g(x)$ c'est-à-dire ssi $g = 0$.*
– *$(f+g)$ est impaire si et seulement si $f = 0$.*

Exercice 11. Dérivée d'une composée. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.*

1. *Si f est paire, que dire de la parité de f' ?*
2. *Si f est périodique, montrer que f' est périodique, de même périodicité que f.*

Correction.

1. *Supposons que f soit paire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. On en déduit l'égalité de fonctions : $f \circ (-\mathrm{Id}) = f$, donc de leurs dérivées (puisqu'elles sont toutes dérivables) : $(f' \circ (-\mathrm{Id})) \times (-1) = f'$ d'où $f' \circ (-\mathrm{Id})) = -f'$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$ donc $\boxed{f' \text{ est impaire}}$.*
De même, si f est impaire, alors f' est paire.
2. *Supposons f périodique. Alors il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$. Notons $g : x \mapsto x+T$. Alors on a : $f = f \circ g$. Ces fonctions étant dérivables, leurs dérivées sont égales (et $g' = 1$) donc : $f' = (f' \circ g) \times g' = f' \circ g$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(g(x)) = f'(x+T)$, i.e. $\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique (comme } f)}$.*

Exercice 12. Périodicité. *Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, et soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions T-périodiques. Montrer que $\varphi : x \mapsto f(\frac{x}{2}) + g(\frac{x}{3})$ est périodique.*

On montre que $\boxed{\varphi \text{ est } 6T\text{-périodique}}$. La vérification est laissée au lecteur.

Exercice 13. Être ou ne pas être périodique. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x).$$

1. *On suppose que α est un nombre rationnel que l'on écrit $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.*
Montrer que f est périodique.

Montrons que $\underline{f \text{ est } 2\pi q\text{-périodique}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi q) &= \cos(x+2\pi q) + \cos\left(\alpha(x+2\pi q)\right) \\ &= \cos(x) + \cos(\alpha x + 2\pi\alpha q) && \textit{par } (2\pi)\textit{-périodicité de cosinus} \\ &= \cos(x) + \cos(\alpha x) && \textit{car } \alpha q = p \in \mathbb{Z} \textit{ et par } (2\pi)\textit{-périodicité de cosinus} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est périodique.}}$

2. *On suppose désormais que α est un nombre irrationnel (i.e. $\alpha \notin \mathbb{Q}$).*

   (a) *Montrer*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(a \leq 1 \text{ et } b \leq 1 \text{ et } a+b=2\Big) \implies \Big(a=1 \text{ et } b=1\Big).$$

Méthode 1. *Fixons $(a,b) \in]-\infty, 1]^2$ tel que $a+b=2$.*
On a donc $(a-1)+(b-1)=0$ ou encore $\underbrace{(a-1)}_{\text{négatif}} = \underbrace{-(b-1)}_{\text{positif}}$.
Le réel $a-1$ est à la fois négatif et positif, donc il est nul. De même pour son opposé $b-1$.
Donc $\boxed{a=b=1.}$
Méthode 2. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq 1$, $b \leq 1$ et $a+b=2$.*
Supposons par l'absurde $a \neq 1$. Alors on aurait $a < 1$, et puisque $b \leq 1$, on obtiendrait $a+b<2$: contradiction. Ainsi, $\boxed{a=1}$. Par suite, comme $a+b=2$, on a aussi $\boxed{b=1}$.

   (b) *Résoudre l'équation $f(x)=2$.*

Analyse. *Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x)=2$.*
Comme $\cos(x) \leq 1$ et $\cos(\alpha x) \leq 1$ et sont de somme 2, on peut utiliser la question précédente et en déduire que $\cos(x)=1$ et $\cos(\alpha x)=1$. D'où

$$x \equiv 0 \; [2\pi] \text{ et } \alpha x \equiv 0 \; [2\pi]$$

Alors on peut trouver $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 2\pi k$ et $\alpha x = 2\pi\ell$.
Ainsi $\alpha 2\pi k = 2\pi\ell$, donc $\alpha k = \ell$ (car $2\pi \neq 0$).
Si k était non nul, alors α serait un rationnel (égal à ℓ/k).
Donc k est nul. D'où $x=0$.
Synthèse. *On vérifie aisément que 0 est solution de l'équation.*
$\boxed{\text{L'équation } f(x)=2 \text{ possède une unique solution, à savoir } x=0.}$

   (c) *En déduire que f n'est pas périodique.*

Raisonnons par l'absurde.
Si f était périodique, on pourrait trouver un $T>0$ tel que f soit T-périodique.
Comme on a $f(0)=2$, on aurait alors $f(T)=2$, et on obtiendrait au moins deux solutions pour l'équation (qui n'admet qu'une unique solution !). D'où la contradiction ! Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$

3. *Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?*

On a montré l'équivalence : $\boxed{f \text{ périodique} \iff \alpha \in \mathbb{Q}}$.

Exercice 14. Croissance. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \overset{S}{=} f(x)+f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) \overset{P}{=} f(x)f(y).$$

Montrer que f est croissante.

Correction. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.*
Montrons que $f(x) \leq f(y)$, c'est-à-dire $f(y)-f(x) \geq 0$.
Avant cela, remarquons que $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
En effet, on a $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ donc $\underline{f(0)=0}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = f(0) = f(t+(-t)) = f(t)+f(-t) \qquad \text{donc} \qquad \underline{f(-t) = -f(t)}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= f(y)+f(-x) && \text{par imparité de } f\\
&= f(y-x) && \text{d'après } S\\
&= f(\sqrt{y-x}^{\,2}) && \text{car } y-x \geq 0\\
&= f(\sqrt{y-x})^2 && \text{d'après } P\\
&\geq 0 && \text{car } f \text{ est à valeurs réelles.}
\end{aligned}$$

Exercice 15. Composées et monotonie.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Correction. *Soit $x < y$. Montrons que $f(x) > f(y)$.*
Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \leq f(y)$.
D'une part, comme $f(x) \leq f(y)$, on a, par croissance de $f \circ f$:

$$f \circ f\big(f(x)\big) \leq f \circ f\big(f(y)\big).$$

D'autre part, comme $x < y$, on a, par stricte décroissance de $f \circ f \circ f$:

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(y) \quad : \quad \text{contradiction.}$$

Exercice 16. « s'annule » VS « est nulle ».
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante.
Montrer que si f s'annule, alors f est la fonction nulle.

Correction. *Supposons que f s'annule. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$. On a aussi $g(a) = 0$.*

- ⋆ *D'une part, la décroissance de f implique que la fonction taux d'accroissement de f en a est négative :*

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0.$$

En effet, si $x \leq a$, alors $f(x) \geq f(a)$ et si $x \geq a$, alors $f(x) \leq f(a)$.

En utilisant le fait que $f(a)=0$ et en multipliant par $x>0$, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x-a} \leq 0.$$

⋆ *D'autre part, la croissance de g implique que la fonction taux d'accroissement de g en a est positive :*

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0.$$

En utilisant le fait que $g(a)=0$ et la définition de g, on obtient :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x-a} \geq 0$$

On obtient donc

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x-a} = 0,$$

d'où

$$\forall\, x \neq a, \quad xf(x) = 0.$$

Comme x est non nul, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad f(x) = 0.$$

De plus, $f(a)=0$.
On obtient donc $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x)=0$ *i.e.* $\boxed{f \text{ est nulle}}$.

Étude de fonction

Exercice 17. Fonction nulle. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dérivable, telle que $f(0)=0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leq f(x)$. En considérant la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$, montrer que f est la fonction nulle.*

Correction. *Posons $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit... et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^{-x}(f'(x)-f(x))$. D'après l'hypothèse, $g'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq g(0) = 0$. Une exponentielle réelle étant >0, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0$. Or, par hypothèse, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc finalement* $\boxed{f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+}$.

Exercice 18. Une inégalité fonctionnelle.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[a,b]$, telle que $f(a)=0$. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b],\ f'(x)f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x)]^2.$$

Montrer que f est nulle sur $[a,b]$.

Correction. *En posant $g : x \mapsto \frac{1}{2}[f(x)]^2$, on a donc $(I) \iff \forall x \in [a,b], g'(x) \leq g(x) \iff g'(x)-g(x) \leq 0$.*
$\boxed{\text{\underline{Idée} : On multiplie par } e^{-x} \neq 0, \text{ pour tout } x.}$
Ainsi : $\forall x \in [a,b], (g'(x)-g(x))e^{-x} \leq 0 \iff (g(x)e^{-x})' \leq 0 \iff ge^{-Id}$ décroît sur l'intervalle $[a,b]$.

On pose $h = ge^{-Id}$. $h(a) = 0$ et h décroît sur $[a,b]$ donc $h \leq 0$ sur $[a,b]$. Comme $e^{-Id} > 0$, on en déduit que $g \leq 0$ sur $[a,b]$. Or, $g(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 \geq 0$ donc $g = 0$ sur $[a,b]$ puis $\boxed{f = 0 \text{ sur } [a,b]}$.

Exercice 19. *On pose $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.*

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble à préciser.*
3. *En notant f^{-1} l'application réciproque de f, montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1}.*

Correction.

1. *f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}$.*
2. *f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ donc d'après le TBM f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}}$, car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
3. *f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*
$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{f^{-1}}{2(f^{-1})^2 + 1}}.$$

Exercice 20. *Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m : x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.*

1. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.*
2. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.*

Correction.

1. *Soit $m \in \mathbb{R}$. f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f_m(0) = m$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_m'(x) = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1}{(x^2+1)^2}$ donc $f_m'(0) = 1$.*
Ainsi, $T_0(f_m) : y = f_m'(0)(x-0) + f_m(0) = x + m$: toutes les tangentes ont le même coefficient directeur donc $\boxed{\text{elles sont parallèles}}$.

2. *Soit $m \in \mathbb{R}$. $f_m'(1) = -\dfrac{m}{2}$ et $f_m(1) = \dfrac{m+1}{2}$.*
Ainsi, $T_1(f_m) : y = f_m'(1)(x-1) + f_m(1) = -\dfrac{m}{2}x + m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{m(2-x)+1}{2}$.
Méthode 1 : *on remarque que le point $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les tangentes en 0, donc elles sont concourantes.*
Méthode 2 : *Soit $p \neq m$. Déterminons l'intersection de $T_1(f_m)$ et de $T_1(f_p)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :*
$$(x,y) \in (T_1(f_m)) \cap (T_1(f_p)) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x + m + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{p}{2}x + p + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, le point de coordonnées $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ *appartient à toutes les tangentes* $(T_1(f_m))_{m\in\mathbb{R}}$ *donc* $\boxed{\text{ces tangentes sont concourantes}}$.

Exercice 21. *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$. *Montrer que le graphe de* f *admet le point de coordonnées* $(1, 2)$ *pour centre de symétrie. Étudier les branches infinies de* f*, les variations de* f *et tracer sa courbe représentative.*

Correction.

- *f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sur un dessin, on voit que*

  $\boxed{(1,2) \text{ est centre de symétrie pour } \mathscr{C}_f \text{ si et seulement si pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 2}$.

  Justifions la traduction d'une symétrie centrale d'un graphe.
  Pour cela, travaillons dans le plan complexe. Considérons trois complexes z, z', ω et leurs images respectives M, M', Ω. Écrivons enfin les complexes sous forme algébrique :

  $$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy' \qquad \text{et} \qquad \omega = a + ib.$$

  Dans le plan complexe, on a :

  $$\begin{aligned} M' \text{ est le symétrique de } M \text{ par rapport à } \Omega &\iff M' \text{ est l'image de } M \text{ par la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \pi \\ &\iff z' - \omega = (z-\omega)e^{i\pi} \\ &\iff z' - \omega = -(z-\omega) \\ &\iff z' = 2\omega - z \\ &\iff \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}. \end{aligned}$$

  On en déduit que :

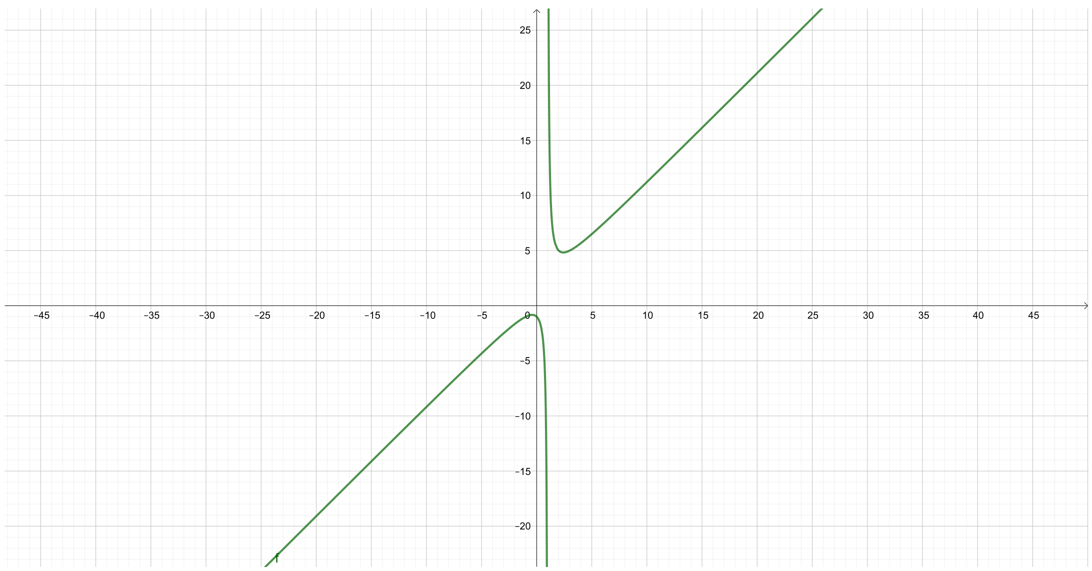
  $$\begin{aligned} \text{le graphe de } f \text{ admet une symétrie de centre } (a,b) &\text{ ssi } \forall x \in D_f,\ f(2a-x) = 2b - f(x) \\ &\text{ ssi } \forall x \in D_f,\ \frac{f(2a-x)+f(x)}{2} = b \\ &\text{ ssi } \forall t \mid a \pm t \in D_f,\ \frac{f(a-t)+f(a+t)}{2} = b \\ &\text{ ssi } b \text{ est le milieu de } f(a+x) \text{ et } f(a-x) \text{ pour tout } x \text{ tel que } a \pm x \in D_f. \end{aligned}$$

  Ici, on a, pour tout $x \neq 0$, $f(1+x)+f(1-x) = 4$, ce qui montre que $(1, 2)$ est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
  Il suffit donc d'étudier f sur $]1, +\infty[$. Le reste de la courbe se déduit par symétrie centrale par rapport au point $(1, 2)$.

  Sinon. *On montre que la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - 2 = \dfrac{x^2-2}{x}$ est impaire, donc son graphe admet le point $(0, 0)$ comme centre de symétrie. D'après le cours, on sait que le graphe de g s'obtient à partir de celui de f par une translation horizontale de -1 et verticale de -2.*

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ *donc $\mathscr{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$.*
  Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ *donc la droite $y = x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.*
  De plus, $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{x-1} > 0$ *pour $x > 1$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote.*
  N.B. : le symétrique de la droite d'équation $y = x+1$ par la symétrie de centre $(1, 2)$ est cette même droite (car elle passe par le point $(1, 2)$).

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, *donc* $\mathscr{C}_f$ *a une asymptote verticale en* 1.
  f *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et* $\forall x > 1,\ f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.
  Le numérateur s'annule en $1 \pm \sqrt{2}$, *mais* $1 - \sqrt{2} < 1$. *Notons* $x_1 = 1 + \sqrt{2}$. f *est donc décroissante sur l'intervalle* $]1, x_1]$ *et croissante sur l'intervalle* $[x_1, +\infty[$, *donc* f *admet un minimum local en* x_1, *qui vaut* $f(x_1) = 2\sqrt{2} + 2 \simeq 5$. *On a tout ce qu'il faut pour tracer la courbe de* f.



Exercice 22. *On considère la fonction* $f\ :\ x \longmapsto \exp\left(\frac{\ln\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)}{\ln|2\cos(x)|}\right)$.

1. *Déterminer le domaine de définition* $\mathcal{D}$ *de* f.
2. *Étudier la parité et la périodicité de* f. *En déduire que l'on peut restreindre l'étude de* f *à l'ensemble* $\mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\sin(x) - \cos(x)|$ et $\sqrt{1 + \sin(2x)} = |\sin(x) + \cos(x)|$.
4. *En déduire une expression plus simple de* $f(x)$ *pour* $x \in \mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$ *(on pourra distinguer deux cas).*

Correction.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$ *donc* $1 - \sin(2x) \geq 0$ *et* $1 + \sin(2x) \geq 0$. *Donc les fonctions* $x \mapsto \sqrt{1 - \sin(2x)}$ *et* $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(2x)}$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$. *De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} > 0$ *(car l'égalité ne se produit que si les deux racines carrées sont nulles, ce qui exclu car* $\sin(2x)$ *ne peut pas être simultanément égal à* -1 *et* $+1$*) donc* $x \mapsto \ln\left(\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)}\right)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.
   On en déduit donc que f *est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $|2\cos(x)| \neq 1$ *et* $2\cos(x) \neq 0$ *c'est-à-dire pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $\cos(x) \neq 1/2$, $\cos(x) \neq -1/2$ *et* $\cos(x) \neq 0$, *c'est-à-dire pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \not\equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ *et* $x \not\equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ *et* $x \not\equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, *ou encore* $x \not\equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ *et* $x \not\equiv$

$\frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$ *et* $x \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$. *Finalement, on en déduit que*

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \right)}.$$

2. *Soit* $x \in \mathcal{D}$ *alors* $-x \in \mathcal{D}$ *et puisque* cos *est paire et* sin *est impaire, il s'ensuit que* $f(-x) = f(x)$. *Ainsi,* $\boxed{f \text{ est paire}}$. *De plus,* $x + \pi \in \mathcal{D}$ *et* $f(x + \pi) = f(x)$. *Par conséquent,* $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$. *Puisque* f *est* π*-périodique, il suffit de l'étudier sur une période i.e. sur l'ensemble* $\mathcal{D} \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *La fonction* f *est paire,* <u>*il suffit donc d'étudier* f *sur l'ensemble* $\mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{3}\}$</u> .

3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x) - \cos(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) = 1 - \sin(2x)$. *De même,* $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + \sin(2x)$. *Donc en passant à la racine carrée dans les deux égalités obtenues, il vient*

$$\underline{\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\sin(x) - \cos(x)| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1 + \sin(2x)} = |\sin(x) + \cos(x)|}$$

4. *Soit* $x \in \mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$. *Alors* $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{3}\}$, *et* $\sqrt{1 + \sin(2x)} = \sin(x) + \cos(x)$ *car* $\cos(x) \geq 0$ *et* $\sin(x) \geq 0$.

   - *Si* $x > \frac{\pi}{4}$, *alors* $\sin x > \cos x$ *donc* $\sqrt{1 - \sin(2x)} = \sin x - \cos x$.
     On en déduit que <u>*pour* $x > \frac{\pi}{4}$</u>,

$$\boxed{f(x) = \exp\left(\frac{\ln(\sin x - \cos x + \sin x + \cos x)}{\ln(2\cos x)} \right) = \exp\left(\frac{\ln(2\sin x)}{\ln(2\cos x)} \right)}.$$

   - *Si* $x \leq \frac{\pi}{4}$, *alors* $\sin x \leq \cos x$ *donc* $\sqrt{1 - \sin(2x)} = \cos(x) - \sin(x)$ *donc* <u>*pour* $x \leq \frac{\pi}{4}$</u>,

$$\boxed{f(x) = \exp\left(\frac{\ln(-\sin x + \cos x + \sin x + \cos x)}{\ln(2\cos x)} \right) = \exp\left(\frac{\ln(2\cos x)}{\ln(2\cos x)} \right) = e}.$$