Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 1. *Pour chacun des ensembles suivants dire s'ils sont majorés ou minorés, s'ils ont un plus grand ou un plus petit élément, s'ils ont une borne supérieure ou une borne inférieure. Si oui, les déterminer.*

1. $A = \{0, 2, 3, 4\}$.
2. $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in]1, 3],\ y = \dfrac{1}{x}\right\}$.
3. $C =]0, 1] \cup [2, 3]$.
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 1 + n^2\}$.
5. $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = 1 - \dfrac{1}{n}\right\}$.

> **Rappels (cours).** *Un maximum est en particulier une borne supérieure.*
> *Si* $\sup(A)$ *existe et appartient à* A*, alors* $\max(A) = \sup(A)$.
> *Par contraposée, si* $\sup(A)$ *existe mais n'appartient pas à* A*, alors* A *n'a pas de maximum.*

- *Pour* A *:*
  - A *est majorée par* 4 *et* $4 \in A$, $\boxed{\max A = 4}$ *donc* $\boxed{\sup A = 4}$.
  - A *est minorée par* 0 *et* $0 \in A$, $\boxed{\min A = 0}$ *donc* $\boxed{\inf A = 0}$.
- *Remarquons que* $\boxed{B = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in]1, 3]\right\} = \left[\dfrac{1}{3}, 1\right[}$ *donc :*
  - B *est minorée par* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{3} \in B$ $\boxed{\min B = \inf(B) = \dfrac{1}{3}}$.
  - *1 est un majorant de* B.
    Montrons que 1 est plus petit que tous les majorants de B.
    Soit M *un majorant de* B. *Montrons que* $M \geq 1$.
    Supposons par l'absurde que $M < 1$.
    Comme $\frac{1}{3} \in B$ *et* M *est un majorant de* B, *on a* $M \geq \frac{1}{3}$.
    Posons $b_0 = \frac{1+M}{2}$. *D'une part,* $M < 1$ *donc* $\frac{1+M}{2} < 1$. *D'autre part, d'où* $\frac{1+M}{2} \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$. *Ainsi,* $b_0 \in B$.
    Par ailleurs, $b_0 - M = \frac{1-M}{2} > 0$ *donc* $M < b_0$, *ce qui contredit le fait que* M *soit un majorant de* B. *Ainsi,* $M \geq 1$.
    On en déduit que 1 est le plus petit des majorants de B *i.e.* $\boxed{\sup B = 1}$.
  - *Comme* $1 \notin B$, *on en déduit que* B *n'a pas de maximum (si c'était le cas, alors* $M = \max(B)$ *et donc* $M = 1$ *donc* $1 \in B$, *ce qui n'est pas).*
- *Pour* C *:*
  - C *est majorée par 3 et* $3 \in C$, *donc* $\boxed{\max C = 3}$ *et* $\boxed{\sup C = 3}$.
  - *0 est un minorant de* C.
    Montrons que 0 *est plus grand que tous les minorants de* C *:*
    Méthode 1. *Soit* m *un minorant de* C. *Montrons que* $m \leq 0$.
    Par l'absurde, supposons que $m > 0$. *Alors* $0 < \frac{m}{2} < m$. *Or,* m *est un minorant de* C *et* $1 \in C$ *donc* $m \leq 1$ *d'où* $\frac{m}{2} \in C$ *et* $\frac{m}{2} < m$, *ce qui contredit le fait que* m *soit un minorant de* C.

__Méthode 2.__ Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que ε n'est pas un minorant de C en trouvant $c \in C$ tel que $c < \varepsilon$.

- *Si $\varepsilon \leq 1$, alors on pose $c = \frac{\varepsilon}{2}$, on a $0 < c \leq 1$;*
- *Si $\varepsilon > 1$, alors on pose $c = 1$.*

Dans tous les cas, on a $0 < c \leq 1$ donc $c \in C$ et $c < \varepsilon$.
Alternative à la disjonction. *On peut poser $c = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Puisque 1 et $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, on a $c > 0$. Par définition d'un minimum, on a aussi $c \leq 1$. Donc $c \in]0,1]$ d'où $c \in C$. De plus, on a aussi $c \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et puisque $\varepsilon > 0$, on a $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, donc $c < \varepsilon$.*
Dans tous les cas, on obtient : $\boxed{\inf C = 0}$.

- *$0 \notin C$ donc $\boxed{C \text{ n'a pas de plus petit élément}}$ (sinon, on aurait $\min(C) = \inf(C) = 0$ donc 0 appartiendrait à C, ce qui n'est pas).*

- *$D = \{1 + n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc :*
  - *D est minorée par 1 et $1 \in D$ donc $\boxed{\min D = \inf(D) = 1}$.*
  - *$\boxed{D \text{ n'est pas majoré}}$: sinon, il existerait $M \geq 1$, tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + n^2 \leq M.$$

__Méthode 1.__ PPL quand $n \to +\infty$, on obtient : $M = +\infty$, ce qui est absurde car $M \in \mathbb{R}$.
__Méthode 2.__ Alors on aurait $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq \sqrt{M-1}$, ce qui est absurde par exemple pour $n_0 = \left\lfloor \sqrt{M-1} \right\rfloor + 1$.
En conséquence, $\boxed{D \text{ n'a pas de maximum}}$.
De plus, D est une partie non vide (car $1 \in D$) et non majorée de $\mathbb{R}$ donc, par convention, $\boxed{\sup D = +\infty}$.

- *$E = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq 1 - \dfrac{1}{n} < 1$ donc $\boxed{E \subset [0,1[}$, donc E est une partie de $\mathbb{R}$, non vide, minorée et majorée donc $\sup E$ et $\inf E$ existent.*
  - *E est minoré par 0 et $0 \in E$ (pour $n = 1$) donc $\boxed{\min E = 0 = \inf(E)}$.*
  - *$\underline{\text{1 est un majorant de } E}$.*

Montrons que $\underline{\text{1 est plus petit que tous les majorants de } E}$.
__Méthode 1.__ Soit M un majorant de E. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \leq M$.
PPL quand $n \to +\infty$, on obtient directement $1 \leq M$.
__Méthode 2.__ Soit M un majorant de E. Montrons que $1 \leq M$.
Supposons par l'absurde que $M < 1$. Puisque $0 \in E$ et M majore E, on a $M \geq 0$. Ainsi, $M \in [0,1[$.
On a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \leq M$, donc $0 < 1 - M \leq \frac{1}{n}$, d'où $n \leq \dfrac{1}{1-M}$.
Pour $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{1-M} \right\rfloor + 1$, on a une contradiction.
Ainsi, $\boxed{\sup E = 1}$.

- *$\sup E = 1$ et $1 \notin E$ donc $\boxed{E \text{ n'a pas de plus grand élément}}$.*

Exercice 2. 1. *Quelle est la borne inférieure de* $\mathbb{R}_+^*$ *?*

2. *Soit* a *un réel tel que* $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon)$. *En utilisant la question 1., montrer que* $a = 0$.

Correction.

1. *0 est un minorant de* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus, 0 est le plus grand des minorants car si* $x > 0$ *alors* x *n'est pas un minorant de* $\mathbb{R}_+^*$ *(en effet,* $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\frac{x}{2} < x$*). Ainsi,* $\boxed{\inf(\mathbb{R}_+^*) = 0}$.

2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon)$. *Alors* $|a|$ *est un minorant de* $\mathbb{R}_+^*$. *La borne inférieure étant le plus grand des minorants, on peut en conclure que* $|a| \leq 0$, *ce qui implique que* $|a| = 0$ *puis que* $\boxed{a = 0}$.

Exercice 3. Autour de la borne supérieure. *Soient* A *et* B *deux parties non vides et majorées de* $\mathbb{R}$.

Par hypothèse, on peut trouver $a_0 \in A$ *et* $b_0 \in B$, *et on sait que* $\sup A$ *et* $\sup B$ *existent et sont des réels.*

1. *On suppose que* $A \subset B$. *Comparer* $\sup A$ *et* $\sup B$.

   On a : $\forall b \in B,\ b \leq \sup B$.
   Soit $a \in A$. *Puisque* $A \subset B$, *on a* $a \in B$, *donc* $a \leq \sup B$.
   Ainsi, $\forall a \in A,\ a \leq \sup B$, *ce qui signifie que* $\underline{\sup B \text{ est donc un majorant de } A}$.
   Or, par définition, $\sup A$ *est le plus petit des majorants de* A *donc* $\boxed{\sup A \leq \sup B}$.

2. *Montrer que :* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

   - *Commençons par justifier l'existence de* $\sup(A + B)$.
     $a_0 + b_0 \in A + B$, *donc* $A + B$ *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$.
     Pour tout $a \in A$ *et* $b \in B$, *on a* $a \leq \sup A$ *et* $b \leq \sup B$, *donc* $a + b \leq \sup A + \sup B$.
     Ainsi, la partie $A + B$ *est majorée par* $\sup A + \sup B$.
     En tant que partie non vide et majorée, on sait alors que $\underline{\sup(A + B) \text{ existe et est réel.}}$
     De plus, par définition, $\sup(A + B)$ *est le plus petit des majorants de* $A + B$, *donc*

     $$\underline{\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.}$$

   - *Montrons que* $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$.
     Pour tout $a \in A, b \in B$, *on a* $a + b \leq \sup(A + B)$. *Fixons* $b \in B$. *Donc,*

     $$\forall a \in A, \quad a \leq \underbrace{\sup(A + B) - b}_{\text{indépendant de } a}.$$

     Ainsi, $\sup(A + B) - b$ *est un majorant de* A. *Comme* $\sup A$ *est le plus petit, on a :*
     $\sup A \leq \sup(A + B) - b$. *Puis,* $b \leq \underbrace{\sup(A + B) - \sup A}_{\text{indépendant de } b}$, *cela pour tout* $b \in B$.
     Ainsi, $\sup(A + B) - \sup A$ *est un majorant de* B, *or, comme* $\sup B$ *est le plus petit, donc*
     $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$ *i.e.*

     $$\underline{\sup A + \sup B \leq \sup(A + B).}$$

Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\sup A + \sup B = \sup(A+B)}$.

3. *Montrer que :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- *Commençons par justifier l'existence de* $\sup(\lambda A)$.
  λA *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *(car* $\lambda a_0 \in \lambda A$*).*
  Soit $a \in A$*. Alors* $\lambda a \in \lambda A$ *et* $a \leq \sup A$*. En multipliant par* $\lambda > 0$*, on obtient :* $\lambda a \leq \lambda \sup A$*.*
  Ainsi la partie $\underline{\lambda A \text{ est majorée}}$ *par* $\lambda \sup A$ *donc* $\underline{\sup(\lambda A) \text{ existe dans } \mathbb{R}}$*. En outre, comme par définition,* $\sup(\lambda A)$ *est le plus petit des majorants de* λA*, on a :* $\underline{\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup A}$*.*
- **Méthode 1.** *Montrons que* $\lambda \sup A \geq \sup(\lambda A)$.
  Soit $a \in A$*. On a :* $\lambda a \leq \sup(\lambda A)$*, et comme* $\lambda > 0$*, on a :* $a \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)}_{\text{indépendant de } a}$ *, cela pour tout* $a \in A$*. Ainsi,* $\frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$ *est un majorant de* A*, mais puisque* $\sup A$ *est le plus petit on obtient :* $\sup A \leq \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$*, puis* $\underline{\lambda \sup A \leq \sup(\lambda A)}$*.*
  Méthode 1 bis. *Dans le premier point, on a montré que* $\lambda \sup(A)$ *est un majorant de* λA*. Il suffit donc de montrer que* $\lambda \sup(A)$ *est inférieur ou égal à tous les majorants de* λA*, ce qui revient à utiliser la méthode précédente avec* M *un majorant quelconque de* λA *(et non* $\sup(\lambda A)$*...), et de montrer que* $\lambda \sup(A) \leq M$*.*
  On sait que : $\forall a \in A,\ \lambda a \leq M$ *et* $\lambda > 0$ *donc* $\forall a \in A,\ a \leq \frac{M}{\lambda}$*. Ainsi,* $\frac{M}{\lambda}$ *est un majorant de* A*. Donc* $\sup(A) \leq \frac{M}{\lambda}$*, puis* $\lambda \sup(A) \leq M$*.*
  Méthode 2. *En utilisant la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure.*
  On a déjà que $\lambda \sup(A)$ *est un majorant de* λA*.*
  Soit $\varepsilon > 0$*. Trouvons* $a_0 \in A$ *tel que* $\lambda \sup A - \varepsilon < \lambda \alpha$*, i.e. tel que* $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} < a_0$*.*
  Puisque $\frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$*, on a* $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} < \sup A$ *donc d'après la caractérisation epsilonesque de* $\sup(A)$ *il existe* $a_0 \in A$ *tel que* $\sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda} < a_0$*. En multipliant par* $\lambda > 0$*, on obtient* $\underline{\lambda \sup A - \varepsilon < \lambda a_0, \text{ où } \lambda a_0 \in \lambda A}$*.*
  On conclut que $\boxed{\lambda \sup A = \sup(\lambda A)}$.

Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\sup(\lambda A) = \lambda \sup A}$.

4. *On suppose que* $A \subset]0,+\infty[$ *et* $B \subset]0,+\infty[$*. Montrer que :* $\sup(AB) = (\sup A) \times (\sup B)$.

- *Commençons par justifier l'existence de* $\sup(AB)$.
  AB *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *(car* $a_0 b_0 \in AB$*).*
  Soient $a \in A$ *et* $b \in B$*. Alors* $0 < a \leq \sup A$ *et* $0 < b \leq \sup B$*.*
  En multipliant ces inégalités positives, on a : $ab \leq \sup A \sup B$*. Ainsi la partie* AB *est majorée par* $\sup A \sup B$ *donc* $\underline{\sup(AB) \text{ existe}}$*. En outre, comme par définition,* $\sup(AB)$ *est le plus petit des majorants, on a :* $\underline{\sup(AB) \leq \sup A \sup B}$*.*
- *Montrons que* $\sup A \sup B \geq \sup(AB)$.
  Pour tout $a \in A$ *et* $b \in B$*, on a* $ab \leq \sup(AB)$ *et* $b > 0$ *(car* $B \subset \mathbb{R}_+^*$*) donc* $a \leq \underbrace{\frac{1}{b}\sup(AB)}_{\text{indépendant de } a}$ *.*

Fixons $b \in B$. On a

$$\forall a \in A,\ a \leq \frac{1}{b}\sup(AB),$$

ce qui montre que $\frac{1}{b}\sup(AB)$ est un majorant de A. Or, $\sup A$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup A \leq \frac{1}{b}\sup(AB)$.
Puisque $b > 0$ et $\sup A \geq a_0 > 0$, on a aussi :

$$b \leq \underbrace{\frac{\sup(AB)}{\sup A}}_{\textit{indépendant de } b},\ \textit{cela pour tout } b \in B,$$

ce qui prouve que $\frac{\sup(AB)}{\sup A}$ est un majorant de B. Or, $\sup B$ est le plus petit, donc $\sup B \leq \frac{\sup(AB)}{\sup A}$ d'où $\underline{\sup A \sup B \geq \sup(AB)}$.
***Autre méthode.** On montre que $\sup A \sup B$ est le plus petit des majorants de AB.*

> *Soit M un majorant de AB. Montrons que $\sup A \sup B \leq M$ (M joue le même rôle que $\sup A \sup B$ dans la preuve précédente).*

Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\sup A \sup B = \sup(AB)}$.

5. *Montrer que :* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

- *$-A = \{-a \mid a \in A\}$. On sait que : $\forall a \in A,\ a \leq \sup(A)$ donc $\forall a \in A,\ -a \geq -\sup(A)$ donc $\underline{-A \text{ est minorée}}$. Comme de plus, $-A$ est non vide, on en déduit que $\boxed{\inf(-A) \text{ existe}}$.*
  En outre, on vient de montrer que $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$ et on sait que $\inf(-A)$ est le plus grand des minorants de $-A$ donc $\underline{\inf(-A) \geq -\sup(A)}$.
- *De plus, $\forall a \in A$, $-a \geq \inf(-A)$ donc $\forall a \in A,\ a \leq -\inf(-A)$ donc $-\inf(-A)$ est un majorant de A. Or, $\sup(A)$ est le plus petit donc $\sup(A) \leq -\inf(-A)$ d'où $\underline{\inf(-A) \leq -\sup(A)}$.*

On en déduit que $\boxed{\inf(-A) = -\sup(A)}$.

Exercice 4. « Longueur » d'une partie. *Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.*
On note $\Delta = \{|x-y| : (x,y) \in A^2\}$. Montrer que

$$\sup \Delta = \sup A - \inf A.$$

Correction.

- *$\sup A$ et $\inf A$ existent car A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.*
- *Montrons que $\sup \Delta$ existe.*
  A est non vide donc on peut trouver $a_0 \in A$ puis $|a_0 - a_0| \in \Delta$. Ainsi $0 \in \Delta$ donc $\underline{\Delta \text{ n'est pas vide}}$.
  Soit $(x,y) \in A^2$. On a : $\inf A \leq x \leq \sup A$ et $\inf A \leq y \leq \sup A$, donc

$$\inf A \leq x \leq \sup A \qquad \textit{et} \qquad -\sup A \leq -y \leq -\inf A.$$

En additionnant les deux inégalités, on obtient :

$$-(\sup A - \inf A) \leq x - y \leq \sup A - \inf A,$$

ce qui signifie que

$$|x-y| \leq \sup A - \inf A.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in A^2$, on en déduit que $\underline{\sup A - \inf A \text{ est un majorant de } \Delta}$.
En tant que partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, $\boxed{\Delta \text{ admet donc une borne supérieure réelle}}$.
De plus, la borne supérieure étant par définition le plus petit des majorants, on a :

$$\underline{\sup \Delta \leq \sup A - \inf A}.$$

- *Montrons que $\sup A - \inf A \leq \sup \Delta$.*
  Soit $(x,y) \in A^2$.
  On a : $x - y \leq |x-y| \leq \sup \Delta$ puis $x \leq \sup \Delta + y$, cela étant valable pour tout $x \in A$, on en déduit que $\sup A \leq \sup \Delta + y$.
  On a donc : $\forall y \in A,\ y \geq \sup A - \sup \Delta$, ce qui signifie que $\sup A - \sup \Delta$ est un minorant de A.
  Or, $\inf A$ est le plus grand des minorants de A donc $\sup A - \sup \Delta \leq \inf A$. On a donc :

$$\underline{\sup \Delta \geq \sup A - \inf A}.$$

Finalement, on a l'égalité : $\boxed{\sup \Delta = \sup A - \inf A}$.

Exercice 5. Distance d'un réel à une partie. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **distance** *de x à A le réel*

$$d(x,A) = \inf \{|x-a|,\ a \in A\}.$$

Justifier que $d(x,A)$ est bien définie, puis montrer

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|d(x,A) - d(y,A)\big| \ \leq \ |x-y|.$$

Correction.

- *Puisque A est non vide, on peut trouver $a_0 \in A$.*

  La partie $\Big\{ |x-a|\,,\ a \in A \Big\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $|x-a_0|$) et minorée (par 0), donc elle admet une borne inférieure réelle.

- *Montrons que*

  $$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad -|x-y| \ \leq \ d(x,A) - d(y,A) \ \leq \ |x-y|.$$

  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons l'inégalité de droite.

  D'après l'inégalité triangulaire, on a

  $$\forall\, a \in A, \quad |x-a| \ \leq \ |x-y| + |y-a|\,.$$

  Par définition de la borne inférieure, on a $d(x,A) \leq |x-a|$.

Donc

$$\forall\, a \in A, \quad d(x, A) \leq |x-y| + |y-a|\,.$$

On a donc

$$\forall\, a \in A, \quad d(x, A) - |x-y| \ \leq\ |y-a|\,.$$

Ainsi, $d(x, A) - |x-y|$ *est un minorant de la partie* $\Big\{\, |y-a|\,,\ a \in A \Big\}$ *dont la borne inférieure est* $d(y, A)$. *Ainsi*

$$d(x, A) - |x-y| \leq d(y, A).$$

On aurait aussi pu dire : par passage à la borne inférieure dans les inégalités larges, on en déduit

$$d(x, A) - |x-y| \ \leq\ \inf_{a \in A} |y-a| \ =\ d(y, A).$$

On a donc montré l'inégalité de droite

$$\boxed{d(x, A) - d(y, A) \leq |x-y|}.$$

Montrons maintenant l'inégalité de gauche à l'aide de l'inégalité de droite.

On vient de montrer que

$$\forall\, (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad d(x', A) - d(y', A) \leq |x'-y'|$$

En appliquant cela à $x' = y$ *et* $y' = x$, *on a*

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |y-x|\,.$$

En multipliant par -1, *il vient*

$$d(x, A) - d(y, A) \geq -|y-x|$$

Comme $|y-x| = |x-y|$, *on obtient l'inégalité de convoitée.*

Exercice 6. Norme infinie. *On rappelle qu'une application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite* **bornée** *si et seulement si :* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$. *On désigne par* E *l'ensemble des fonctions bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Pour* $f \in E$, *on pose :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Le réel $\|f\|_\infty$ *est appelé* **norme infinie** *de* f.

1. **Définition et séparation**. *On considère* $f \in E$.
   - (a) *Justifier l'existence de* $\|f\|_\infty$ *et le fait que* $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$.
   - (b) *Établir que :* $\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

(a)
- *Notons* $A = \{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$. *Puisque* $|f(0)| \in A$, *on sait que* $A \neq \varnothing$. *Par ailleurs,* f *est bornée donc il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$, *donc la partie* A *est majorée (par* M*).*
  En tant que partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{A admet une borne supérieure réelle}}$.
  On note $\|f\|_\infty = \sup A$.

- *De plus,* $\|f\|_\infty \geq |f(12)| \geq 0$ *donc* $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$.

(b)
- *Supposons que* $\|f\|_\infty = 0$. *Comme :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$, *on a :* $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = 0$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ *d'où* $f = 0$.
- *Supposons que* $f = 0$. *Alors* $\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ *donc* $\boxed{\|f\|_\infty = 0}$.

Ainsi, $\boxed{\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0}$.

2. **Homogénéité**.

(a) Justifier que $\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda f \in E$.

(b) Montrer que : $\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\, \|f\|_\infty$.

(c) En déduire que : $\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$.

(a) Soient $f \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. f *bornée donc* $\|f\|_\infty$ *existe et* $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \|f\|_\infty$. *Alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda|\ |f(x)| \leq |\lambda|\ \ \|f\|_\infty .$$

Ainsi, λf *est bornée donc* $\boxed{\lambda f \in E}$.

(b) Soient $f \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a montré à la question précédente que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ |(\lambda f)(x)| \leq |\lambda|\ \ \|f\|_\infty$. *Ainsi,* $|\lambda|\ \ \|f\|_\infty$ *est un majorant de* $B = \{|(\lambda f)(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$. *Comme* $\|\lambda f\|_\infty = \sup B$ *est le plus petit des majorants de* B, *on a :*

$$\boxed{\forall f \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\, \|f\|_\infty}.$$

(c) Soient $f \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Si* $\lambda \neq 0$, *on peut appliquer le résultat précédent au réel* $\frac{1}{\lambda}$ *et à la fonction* λf. *Il vient :*

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\lambda f\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda f\|_\infty ,$$

  d'où $|\lambda|\, \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$.
- *Si* $\lambda = 0$, *alors* $\lambda f = 0$ *donc* $\|\lambda f\|_\infty = 0$, *et en particulier on a encore* $|\lambda|\, \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\underline{|\lambda|\, \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty}.$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty}.$$

3. **Sous-additivité**. *Soit* $(f, g) \in E^2$. *Montrer que* $f + g \in E$ *puis établir que* $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- f *et* g *sont bornées donc* $\|f\|_\infty$ *et* $\|g\|_\infty$ *existent et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ et } |g(x)| \leq \|g\|_\infty .$$

Par inégalité triangulaire, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,,$$

d'où $f+g$ est bien bornée et $\boxed{f+g \in E}$.

- *De plus, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $C = \{|(f+g)(x)|, x \in \mathbb{R}\}$, et $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit des majorants de C donc*

$$\boxed{\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty}.$$

Les trois points précédents permettent de montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une ***norme*** *sur E.*

4. **Exemples.**

(a) *On considère* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. *Calculer $\|f\|_\infty$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x^2+1 \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ d'où $|f(x)| = f(x) \leq 1$. On en déduit que f est bornée et que $\underline{\|f\|_\infty \leq 1}$.
De plus, $\underline{\|f\|_\infty \geq |f(0)| = 1}$.
Finalement, $\boxed{\|f\|_\infty = 1}$.

(b) *On considère* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array}$. *Donner le tableau de variations de g puis établir avec soin que $\|g\|_\infty = 1$.*

g est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}+1 \geq 1 > 0$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et après calculs : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1}$. En factorisant par e^{2x} au numérateur et au dénominateur, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1}$. D'après le tableau de variations, il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < g(x) < 1$ donc $|g(x)| < 1$ et a fortiori $|g(x)| \leq 1$. Ainsi, g est bornée et $\underline{\|g\|_\infty \leq 1}$.
Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R},\ \|g\|_\infty \geq |g(x)| = \left|\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right| = \left|\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right|$. Par passage à la limite quand $x \to +\infty$, il vient : $\underline{\|g\|_\infty \geq 1}$. On a donc bien : $\boxed{\|g\|_\infty = 1}$.
Remarque. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \mathrm{th}x$.

(c) *On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0,1]$. Déterminer $\|h_n\|_\infty$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in [0,1],\ x^n \leq 1$ donc $\underline{\sup_{x\in[0,1]} x^n \leq 1.}$

De plus, pour $x = 1$, on a $\sup_{x\in[0,1]} x^n \geq 1^n = 1$.

Ainsi, $\boxed{\|h_n\|_\infty = 1}$.

Partie entière

Exercice 7. Propriétés de la partie entière. *Démontrer les assertions suivantes :*

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$
2. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor n \rfloor = n$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.

Correction.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. On a : $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$. Or, par définition, $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier relatif à être inférieur ou égal à y, donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction partie entière est croissante sur } \mathbb{R}}$.
   Alternative. On a aussi : $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$. Par propriété des entiers, on a alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor + 1$.
   Remarque. La réciproque est fausse puisque $\lfloor 3,4 \rfloor = 3 = \lfloor 3 \rfloor$ alors que $3,4 > 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $n \leq n < n+1$. Par unicité d'un tel entier, $\boxed{n = \lfloor n \rfloor}$.
   Alternative. On a $\lfloor n \rfloor \leq n < \lfloor n \rfloor + 1$. Puisque ce sont des entiers, on a $\lfloor n \rfloor \leq n \leq \lfloor n \rfloor$, donc $\boxed{\lfloor n \rfloor = n}$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :
   $$\underbrace{\lfloor x+n \rfloor}_{\in\mathbb{Z}} \leq x+n < \lfloor x+n \rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\lfloor x \rfloor + n}_{\in\mathbb{Z}} \leq x+n < \lfloor x \rfloor + n + 1.$$
   Par unicité de la partie entière, on a : $\boxed{\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n}$.

4. $x \notin \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor \neq x$ et $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$, ce qui se ré-écrit
   $$\underbrace{-\lfloor x \rfloor - 1}_{\in\mathbb{Z}} < -x < (-\lfloor x \rfloor - 1) + 1.$$
   Par unicité d'un tel entier, on en déduit que $\boxed{\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1}$.
   Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $-x \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x \rfloor = -x$ d'après 2.

Exercice 8. Limites. *Calculer les limites suivantes :* *1)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ *2)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor - x}$.

1) Soit $x>0$. *On a* $\dfrac{1}{x}-1<\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ *donc* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}<\sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$. *Or,* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=+\infty$ *donc, par domination,* $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor=+\infty}$.

2) **Méthode 1.** *On a une FI du type* $\frac{\infty}{\infty}$ *donc on factorise par* $\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ *(on factorise par le terme prépondérant).*
Pour $x\in]0,1[$, *on a* $1/x>1$ *donc* $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor\neq 0$ *donc*

$$\frac{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor - x}=\frac{1+\dfrac{x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor}}{1-\dfrac{x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor}}.$$

Or, pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x}-1<\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$, *donc* $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor=+\infty}$, *d'où* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x}{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor}=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1+\dfrac{x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor}}{1-\dfrac{x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor}}=1$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor - x}=1}$.

Méthode 2. *Pour* $x\in]0,1[$, *on écrit :*

$$\frac{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x}=\frac{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x+2x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x}=1+\frac{2x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}1+0=0,$$

car on a encore $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor=+\infty$.

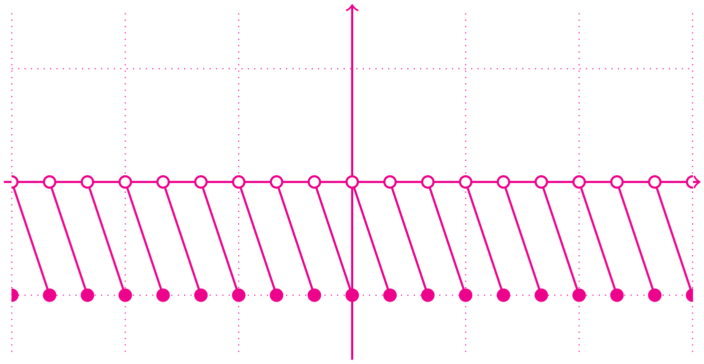
Exercice 9. Des études de fonctions. *Montrer que les fonctions* $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ *et* $g : x \mapsto \dfrac{x}{2} - \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$ *sont périodiques. Tracer l'allure des courbes.*

Correction.

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{3}) &= \left\lfloor 3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\rfloor - 3\left(x+\frac{1}{3}\right) \\ &= \lfloor 3x+1 \rfloor - 3x - 1 \\ &= \lfloor 3x \rfloor + 1 - 3x - 1 \\ &= \lfloor 3x \rfloor - 3x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

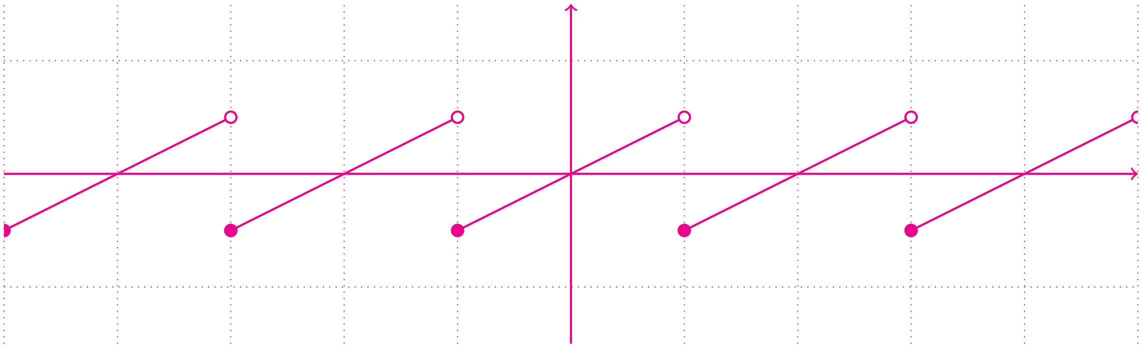
Cela montre que la fonction $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - 3x$ *est* $\frac{1}{3}$*-périodique.*
Pour $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[$, *on a* $3x \in [0,1[$ *donc* $\lfloor 3x \rfloor = 0$ *donc* $f(x) = -3x$. *Cela permet de tracer la courbe de* f *sur* $\left[0, \frac{1}{3}\right[$. *On obtient ensuite la courbe de* f *sur* $\mathbb{R}$ *par translation en utilisant la* $\frac{1}{3}$*-périodicité.*



- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} g(x+2) &= \frac{x+2}{2} - \left\lfloor \frac{(x+2)+1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1 \right\rfloor \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1 \\ &= \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ *est 2-périodique.*
Pour $x \in [-1, 1[$, *on a* $\frac{x+1}{2} \in [0,1[$ *donc* $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$ *donc* $g(x) = \frac{x}{2}$.



Exercice 10. 1. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2. *Montrer que :* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor \ = \ \lfloor nx \rfloor$.

Correction.

1. *On note* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ *la partie fractionnaire de* x. *L'égalité souhaitée devient alors :*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + 1/2 \rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor .$$

En tenant compte du fait que $\lfloor x \rfloor$ *est un entier, l'égalité précédente est équivalente à :*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor \{x\} + 1/2 \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor.$$

Le résultat sera donc établi si l'on montre que :

$$\lfloor \{x\} + 1/2 \rfloor = \lfloor 2\{x\} \rfloor.$$

On sait que $\{x\}$ *appartient à* $[0, 1[$, *il n'y a plus qu'à faire une disjonction de cas, suivant que* $\{x\} \in [0, 1/2[$ *ou* $\{x\} \in [1/2, 1[$, *chacun des deux cas étant trivial.*

2. *Généralisons le résultat de la question précédente. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \ - \ \lfloor nx \rfloor$ *est nulle sur* $\mathbb{R}$. *Pour cela, on va montrer que* f *est* $1/n$*-périodique et nulle sur* $\left[0, \frac{1}{n}\right[$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \left(x+\frac{1}{n}\right)+\frac{k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx+1 \rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor x+\frac{0}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{n}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\ &= f(x) - \lfloor x \rfloor + \lfloor x+1 \rfloor - 1 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc f est $\frac{1}{n}$-périodique.
De plus, f est clairement nulle sur $[0,1/n[$, puisque tous les termes que l'on écrit dans l'expression de $f(x)$ sont alors nuls.

> *Soit $x \in [0,1/n[$. Alors $nx \in [0,1[$ donc $\lfloor nx \rfloor = 0$.*
> *De plus, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a :*
>
> $$0 \leq \frac{k}{n} \leq 1-\frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq x < \frac{1}{n}$$
>
> *donc*
>
> $$0 \leq x+\frac{k}{n} < 1$$
>
> *d'où $\left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = 0$. Ainsi, $\boxed{f(x)=0}$.*

On en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor \;=\; \lfloor nx \rfloor.}$

Exercice 11. *Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$.*

   On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc en multipliant par $n > 0$, on obtient $n\lfloor x \rfloor \leq nx$.
   Or, $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Et, par définition, $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier relatif à être inférieur à nx donc : $\boxed{n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor}$.

2. *Montrer $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.*

   Rédaction 1.

   - *D'une part, d'après 1., $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$, et puisque $\frac{1}{n} \geq 0$, on a $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.*

Or, $\lfloor x \rfloor$ *est un entier* $\leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ *et* $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ *est le plus grand donc*

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor}.$$

Sinon, on utilise le fait que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ *et* $\lfloor \cdot \rfloor$ *est croissante.*

- *D'autre part, par définition de la partie entière, on a* $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ *et* $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ *et* $n > 0$ *donc par transitivité*

  $$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq x.$$

  Puisque $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$*, et par définition de* $\lfloor x \rfloor$*, on en déduit que* $\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor}$ *(ou bien par croissance de* $\lfloor \cdot \rfloor$*).*

Rédaction 2. *On a* $\quad n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$*, et* $n \geq 0$ *donc*

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Par croissance de $\lfloor \cdot \rfloor$*, et puisque* $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$*, on a :*

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

Par antisymétrie, on conclut que $\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$.

3. *Montrer* $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. **Indication :** *on pourra utiliser les parties fractionnaires.*

Méthode 1 [avec les parties fractionnaires]. *On écrit*

$$x = \lfloor x \rfloor + \delta \text{ et } y = \lfloor y \rfloor + \mu,$$

avec $\delta = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ *et* $\mu = y - \lfloor y \rfloor \in [0, 1[$. *Alors*

$$\lfloor 2x \rfloor = \left\lfloor \underbrace{2 \lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + 2\delta \right\rfloor = 2 \lfloor x \rfloor + \lfloor 2\delta \rfloor,$$

$$\lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2 \lfloor y \rfloor + 2\mu \rfloor = 2 \lfloor y \rfloor + \lfloor 2\mu \rfloor$$

et

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \delta + \lfloor y \rfloor + \mu \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \delta + \mu \rfloor.$$

L'inégalité demandée à la question 3. est alors équivalente à :

$$\lfloor \delta + \mu \rfloor \leq \lfloor 2\delta \rfloor + \lfloor 2\mu \rfloor,$$

ce l'on vérifie aisément en distinguant successivement les cas où $(\delta,\mu) \in [0,\frac{1}{2}[^2$, $(\delta,\mu) \in [\frac{1}{2},1[^2$ *et* $0 \leq \delta < \frac{1}{2} \leq \mu < 1$.

Méthode 2.

- *D'après 1.,* $2\lfloor x\rfloor + 2\lfloor y\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$ *donc* $\underline{\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \frac{1}{2}\left(\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\right)}$.
- *Il suffit donc de montrer que :* $\boxed{\lfloor x+y\rfloor \leq \frac{1}{2}\left(\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\right)}$.

  On a : $\lfloor x+y\rfloor \leq x+y = \frac{1}{2}(2x+2y)$.
  Or, $2x < \lfloor 2x\rfloor + 1$ *et* $2y < \lfloor 2y\rfloor + 1$ *donc* $2x+2y < \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor + 2$ *d'où*

  $$\lfloor x+y\rfloor \leq x+y = \frac{1}{2}(2x+2y) < \frac{1}{2}\left(\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\right) + 1.$$

  Ainsi, comme les quantités en jeu sont des entiers : $\underline{\lfloor x+y\rfloor \leq \frac{1}{2}\left(\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\right)}$, *ce qui conclut la preuve.*

Exercice 12. Comptage d'entiers dans un segment. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a \leq b$. *Montrer que* $\mathrm{Card}\left([a,b] \cap \mathbb{Z}\right) = \lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor$.

Correction. *On distingue deux cas.*

- *Supposons* $a \in \mathbb{Z}$.

  La partie $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![a, \lfloor b\rfloor]\!]$ *possède alors* $\lfloor b\rfloor - a + 1$ *éléments.*

  Par ailleurs, dans ce cas, $1-a \in \mathbb{Z}$, *donc* $\lfloor 1-a\rfloor = 1-a$, *et on a bien*

  $$\lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor = \lfloor b\rfloor + 1 - a.$$

- *Supposons* $a \notin \mathbb{Z}$.

  La partie $[a,b] \cap \mathbb{Z} = [\![\lfloor a\rfloor + 1, \lfloor b\rfloor]\!]$ *possède alors* $\lfloor b\rfloor - (\lfloor a\rfloor + 1) + 1 = \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor$ *éléments.*

  Par ailleurs, dans ce cas, $\lfloor 1-a\rfloor = -\lfloor a\rfloor$.
  En effet, on a, par définition de la partie entière et puisque $a \notin \mathbb{Z}$, *l'encadrement* $\lfloor a\rfloor < a < \lfloor a\rfloor + 1$, *donc* $-\lfloor a\rfloor < 1-a < -\lfloor a\rfloor + 1$.
  Ainsi, on a bien

  $$\lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor = \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor, \qquad \text{ce qui conclut.}$$

Densité

Exercice 13. Densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$. *Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{Q}$* ***est dense dans*** *$\mathbb{R}$ i.e. qu'entre deux réels, on peut toujours trouver un rationnel.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

1. *(a) Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $qy - qx > 1$.*
   (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qx < p < qy$.
   (c) Conclure.
2. **Applications.**
   (a) Montrer qu'il existe $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \xi < y$. On dit alors que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ***est dense dans*** *$\mathbb{R}$.*
   Indication : *on pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
   (b) Justifier que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contient un au moins rationnel et un irrationnel.

Correction.

1. *(a) Il suffit de prendre $\boxed{q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1}$.*
   En effet, $\frac{1}{y-x} > 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ puis $\underline{q \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) On prend $p = \lfloor qx \rfloor + 1$.
   Par définition de $\lfloor qx \rfloor$, on a $qx < p$. De plus, $\lfloor qx \rfloor \leq qx$ donc $p \leq qx + 1 < qy$ d'après 1.
   (c) En divisant par $q > 0$ dans l'inégalité précédente, on trouve : $\boxed{x < \frac{p}{q} < y}$. Or, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On a donc montré qu'entre deux réels distincts x et y, on peut toujours trouver un rationnel, ce qui signifie que $\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$.

> **A retenir.** *Pour montrer qu'il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $x < \frac{p}{q} < y$, montrons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $qx < p < qy$.*
>
> *(a) Pour avoir un entier p entre deux réels, il faut qu'ils soient distant de plus de 1. Donc on montre d'abord : $\exists q \in \mathbb{N}^*,\ qy - qx > 1$ i.e. tel que $q > \frac{1}{y-x}$. Il suffit de poser $q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$.*
> *(b) Dès lors, on pose $p = \lfloor qx \rfloor + 1$ qui permet d'avoir $qx < p < qy$.*
> *(c) En conclusion : $x < \frac{p}{q} < y$.*

2. **Applications.**
   (a) On a : $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$ et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$ donc
   $$x < r + \sqrt{2} < y.$$
   Vérifions que $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: si $r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors on aurait $\sqrt{2} = \underbrace{r + \sqrt{2}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(-r)}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Ainsi, $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On a donc montré qu'on peut toujours insérer un irrationnel entre deux réels : ce qui signifie que $\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \textit{ est dense dans } \mathbb{R}}$.

(b) *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors il existe $(x_0, y_0) \in I^2$ tel que $x_0 < y_0$. D'après les questions précédentes, il existe alors $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x_0 < r < y_0$. Ainsi, $r \in [x_0, y_0]$ et $[x_0, y_0] \subset I$ (puisque I est un intervalle) donc $\underline{I \text{ contient au moins un rationnel}}$.*
De même, par densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, il existe $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\zeta \in [x_0, y_0] \subset I$. Donc $\underline{I \text{ contient au moins un irrationnel}}$.

Exercice 14. Une équation fonctionnelle.

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.*
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$.

- *Commençons par remarquer que $f(0) = 0$ et que f est impaire.*
- *Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$.*
- *On en déduit que $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = kf(1)$. En effet, si $k \in \mathbb{Z}^-$, $k = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(k) = f(-n) = -f(n) = -nf(1) = kf(1)$.*
- *On montre que $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ |\ r = \dfrac{p}{q}$. D'où $p = qr$.*
D'une part, puisque $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(p) = pf(1)$, et d'autre part, puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f(qr) = qf(r)$.
On en déduit que $pf(1) = qf(r)$ puis $f(r) = \frac{p}{q} f(1)$ i.e. $f(r) = rf(1)$.
- *On montre que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$. Alors $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $(y_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x \leq y_n$.*
Par croissance de f, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) \leq f(x) \leq f(y_n) \quad \text{i.e.} \quad x_n f(1) \leq f(x) \leq y_n f(1).$$
PPL quand $n \to +\infty$, il vient : $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$, d'où $\boxed{f(x) = xf(1)}$.

2. *Déterminer toutes les fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

Procédons par analyse-synthèse.

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$. Alors d'après la question 1., pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.*
De plus, f doit être croissante donc pour tout $x \neq y$, $a = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ doit être positif.
$\underline{\text{Les fonctions } f \text{ solutions sont donc parmi les fonctions linéaires à coefficient directeur positif}}$.
- *Réciproquement, les fonctions linéaires vérifient l'équation fonctionnelle et sont croissantes.*

Ainsi, $\boxed{\textit{les solutions du problèmes sont les fonctions linéaires à coefficient directeur positif}}$*.*