Systèmes linéaires

Exercice 1. *Soient* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *et le système* $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& a\\ -2x-3y+3z &=& b\\ x+y-2z &=& c\end{array}\right.$.
A quelle condition (nécessaire et suffisante) sur (a,b,c) *le système* (S) *admet-il des solutions ? Résoudre* (S) *dans ce cas.*

Matrice augmentée :

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a\\ -2 & -3 & 3 & b\\ 1 & 1 & -2 & c\end{array}\right)\underset{L}{\sim}\cdots\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a\\ 0 & 1 & 1 & b+2a\\ 0 & 0 & 0 & a+b+c\end{array}\right).$$

- *Si* $a+b+c\neq 0$, *alors le système est incompatible et* $\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$.
- *Si* $a+b+c=0$, *alors* $M\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3a-2b\\ 0 & 1 & 1 & b+2a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ *donc* $\left\{\begin{array}{l} y=2a+b-z\\ x=-3a-2b+3z\end{array}\right.$ *i.e.*
  $\boxed{\mathscr{S}=\{(-3a-2b+3z,2a+b-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\{(-3a-2b,2a+b,0)+z(3,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\}=A+\mathbb{R}\vec{u}}$ *: droite paramétrique passant par le point* A *et dirigée par le vecteur* $\vec{u}$.

$$\boxed{(S)\text{ admet des solutions, si et seulement si, } a+b+c=0}.$$

Exercice 2. *Résoudre, en fonction du paramètre* $m\in\mathbb{R}$, *le système* (S_m) *suivant*

$$(S_m):\left\{\begin{array}{rcl} (2+m)x+2y-z &=& 0\\ 2x+(m-1)y+2z &=& 0\\ -x+2y+(2+m)z &=& 0\end{array}\right..$$

Le système est homogène. Sa matrice associée est

$$A=\begin{pmatrix} 2+m & 2 & -1\\ 2 & m-1 & 2\\ -1 & 2 & 2+m\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-m\\ 2 & m-1 & 2\\ 2+m & 2 & -1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-m\\ 0 & m+3 & 6+2m\\ 0 & 6+2m & m^2+4m+3\end{pmatrix}$$

$$A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-m\\ 0 & m+3 & 2(m+3)\\ 0 & 2(m+3) & (m+3)(m+1)\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-m\\ 0 & m+3 & 2(m+3)\\ 0 & 0 & (m+3)(m-3)\end{pmatrix}=:T.$$

- *Si* $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, *alors* T *est triangulaire sans 0 sur la diagonale donc inversible. Par conservation de l'inversibilité par opérations élémentaires, on en déduit que* A *est inversible. Le système homogène* $AX=0$ *admet donc une unique solution. Comme* $X=0$ *est solution évidente, on a* $\boxed{\mathscr{S}_m=\{(0,0,0)\}}$.
- *Si* $m=-3$ *alors* $A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ *et* $(S_{-3}): x-2y+z=0$ *(plan de* $\mathbb{R}^3$*) donc*

$\boxed{\mathscr{S}_{-3} = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v},\ \textit{où}\ \vec{u} = (1,0,-1)\ \textit{et}\ \vec{v} = (0,1,2)}$.

- *Si $m \neq -3$ alors $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc* $\boxed{\mathscr{S}_3 = \{(z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}w\ \textit{où}\ w = (1,-2,1)}$.

Finalement : $\boxed{\mathscr{S}_m = \begin{cases} \mathbb{R}u + \mathbb{R}v & \textit{si } m = -3 \\ \mathbb{R}w & \textit{si } m = 3 \\ \{(0,0,0)\} & \textit{sinon.} \end{cases}}$

Exercice 3. *Montrer qu'il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour toute fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 3, on ait :*

$$\int_2^4 P(x)\mathrm{d}x = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) \qquad (E).$$

Correction.

- *Commençons par remarquer que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 est de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.*
  Pour un tel polynôme, calculons les quantités qui entrent en jeu :
  - *d'une part, $\displaystyle\int_2^4 P(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx\right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$;*
  - *d'autre part, $\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d$.*

- *Remarquons que l'égalité (E) est vraie pour tout quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, si et seulement si, (α, β, γ) est solution du système*

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\alpha & + & 3\beta & + & 4\gamma & = & 6 \\ 4\alpha & + & 9\beta & + & 16\gamma & = & \dfrac{56}{3} \\ 8\alpha & + & 27\beta & + & 64\gamma & = & 60 \end{cases},$$

  (pour le sens direct, il suffit de considérer les quatre quadruplets $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, et $(0,0,0,1)$; le sens indirect est évident).

- *Résolvons le système (S) grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.*

Les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1$ donnent :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 & (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 2 & \\ & & 5\beta & + & 12\gamma & = & \dfrac{32}{3} & (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2) \\ & & 19\beta & + & 56\gamma & = & 44 & (L_4 \leftarrow L_4 - 19L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha & & & - & \gamma & = & 0 & \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 2 & \\ & & & & 2\gamma & = & \dfrac{2}{3} & \\ & & & & 18\gamma & = & 6 & (L_4 \leftarrow L_4 - 9L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcll} \alpha & -\gamma & = & 0 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ \beta & +2\gamma & = & 2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\ & 2\gamma & = & \dfrac{2}{3} & (L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3) \\ & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/3 \\ \beta = 4/3 \\ \gamma = 1/3 \end{array}\right. .$$

- *Ainsi, l'égalité $\int_2^4 P(x)\mathrm{d}x = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ est vraie pour toute fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 3, si et seulement si,* $\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$.

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 4. Calcul matriciel. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer les produits $(A - 2B)C$, $C^T A$, $C^T B$, $C^T(A^T - 2B^T)$.

$A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 \\ -4 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\boxed{(A - 2B)C = \begin{pmatrix} -1 & -36 \\ 1 & -28 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}}$; $\boxed{C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 4 & 14 & 10 \end{pmatrix}}$; $\boxed{C^T B \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 10 & 26 & 14 \end{pmatrix}}$;
$\boxed{C^T(A^T - 2B^T) = ((A - 2B)C)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -36 & -28 & -8 \end{pmatrix}}$.

Exercice 5. *Montrer que* $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AA^T = 0 \Longrightarrow A = 0.$

Correction. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $AA^T = 0$. *En calculant le produit matriciel,* AA^T, *on trouve :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k} = 0.$

Pour $i = j$, *on a :* $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 0$ *puis* $a_{i,k} = 0$ *pour tout* $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ *i.e.* $\boxed{A = 0}$.

Quid de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

Exercice 6. Conséquences de l'associativité du produit matriciel.

1. *Soient* $n, p \geq 2$ *deux entiers, et* $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ *une famille de nombres complexes. On définit les matrices* $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{C})$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{C})$ *et* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{C})$.

   Parmi les différents produits que l'on peut écrire avec les matrices L, C *et* A, *quels sont ceux qui ont un sens ? Écrire de deux façons différentes le produit* LAC *et retrouver ainsi un résultat connu.*

2. *Soit* $r,\ s \geq 2$ *deux entiers et* $(x_k)_{k=1}^{r}$ *et* $(y_\ell)_{\ell=1}^{s}$ *deux familles de nombres complexes. On définit les matrices*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in M_{r,1}(\mathbb{C}), \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_s \end{pmatrix} \in M_{1,s}(\mathbb{C}),$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{1,r}(\mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{s,1}(\mathbb{C}).$$

   Écrire de deux façons différentes le produit $RXYS$ *et retrouver ainsi un résultat connu.*

Correction.

1. *Vu les tailles en présence, ont un sens :*

   - *le produit* LA, *de taille* $1 \times p$ *;*
   - *le produit* AC, *de taille* $n \times 1$ *;*
   - *le produit* LAC, *de taille* 1×1.

On va utiliser l'associativité du produit matriciel, on obtient d'un côté

$$\begin{aligned}[LAC]_{1,1} &= [(LA)C]_{1,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} [LA]_{1,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} [LA]_{1,\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} [L]_{1,k}[A]_{k,\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{k,\ell}\end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned}[LAC]_{1,1} &= [L(AC)]_{1,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [L]_{1,k}[AC]_{k,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [AC]_{k,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{k,\ell}[C]_{\ell,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell}.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat sur les sommes rectangulaires :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{k,\ell}}.$$

2. *On a que RX et YS sont des matrices de taille 1×1. On a*

$$\begin{aligned}[RX]_{1,1} &= \sum_{i=1}^{r} [R]_{1,i}[X]_{i,1} \\ &= \sum_{i=1}^{r} x_i \\ \text{et} \quad [YS]_{1,1} &= \sum_{\ell=1}^{s} [Y]_{1,\ell}[S]_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{s} y_\ell.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $RXYS \in M_{1,1}(\mathbb{C})$ a pour unique coefficient

$$[RXYS]_{1,1} = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell\right).$$

Par ailleurs, le produit XY est une matrice de taille $r \times s$. Pour $i \in [\![1,r]\!]$ et $j \in [\![1,s]\!]$, on a

$$\begin{aligned}[XY]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{1} [X]_{i,k}[Y]_{k,j} \\ &= x_i y_j.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}[RXYS]_{1,1} &= [R(XY)S]_{1,1} \\ &= \sum_{i=1}^{r} [R]_{1,i}\,[(XY)S]_{i,1} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} [XY]_{i,j}[S]_{j,1} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_i y_j.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_i y_j}.$$

Exercice 7. JMJ. *Soit $J \in \mathscr{M}_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Correction. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $JMJ \in \mathscr{M}_n(K)$.*
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a

$$\begin{aligned}[JMJ]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [J]_{i,k}[MJ]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[J]_{i,k}}_{=1} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \underbrace{[J]_{\ell,j}}_{=1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell}.\end{aligned}$$

En notant σ la somme de tous les coefficients de M, on a montré que la matrice JMJ est remplie de σ.

Autrement dit, $JMJ = \sigma J$, c'est-à-dire

$$\boxed{JMJ = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}[M]_{k,\ell}\right) J}.$$

Exercice 8. *Soient deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent et telles que A est inversible. Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.*

Correction. Première rédaction. *Il suffit d'écrire*

$$A^{-1}B = A^{-1}B(AA^{-1}) = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}.$$

Deuxième rédaction. *Par hypothèse, on a $AB = BA$. En multipliant cette égalité à gauche et à droite par A^{-1}, il vient : $A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ c'est-à-dire $\boxed{BA^{-1} = A^{-1}B}$, et conclut.*

Exercice 9. Commutant d'une matrice diagonale. *Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.*
Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si $AD = DA$ alors A est diagonale.

Par hypothèse, on peut écrire la matrice D sous la forme : $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ deux à deux distincts.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AD = DA$. Montrons que A est diagonale.
L'égalité matricielle $AD = DA$ implique que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(AD)_{i,j} = (DA)_{i,j}$.
D'une part, $(AD)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}D_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\delta_{k,j}\lambda_j = \lambda_j A_{i,j}$.
D'autre part, $(DA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\lambda_i A_{k,j} = \lambda_i A_{i,j}$.
Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (\lambda_i - \lambda_j)A_{i,j} = 0$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Les (λ_k) étant deux à deux distincts, on a $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ donc $A_{i,j} = 0$, ce qui signifie que $\boxed{A \text{ est diagonale}}$.

Exercice 10. Commutant de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?*
2. *Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes celles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$?*

Correction.
Lemme. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $ME_{i,j} = E_{i,j}M$, alors M est scalaire.*
Montrons le lemme.
Supposons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ ME_{i,j} = E_{i,j}M$.
Fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Des calculs matriciels donnent (faire les dessins) :

- *$ME_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont nulles exceptée la j-ième qui contient la i-ème colonne de M.*
- *$E_{i,j}M$ est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les lignes sont nulles exceptée la i-ième qui contient la j-ème ligne de M.*

L'égalité des matrices $ME_{i,j}$ et $E_{i,j}M$ implique en particulier, l'égalité de leur j-ième colonne. On *obtient :*

- $m_{i,i} = m_{j,j}$ *(en regardant le coefficient en position (i,j))*
- $\forall k \neq i,\ m_{k,i} = 0$ *(en regardant les autres coefficients de la j-ième colonne.*

Ceci montre que M est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont tous égaux, donc que M est une matrice scalaire.

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
   Alors, en particulier, M commute avec les matrices élémentaires $E_{i,j}$, donc d'après le lemme, M est scalaire.
   Réciproquement, les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Ainsi, $\boxed{\textit{les matrices qui commutent avec toutes les matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \textit{ sont les } \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}}$ *i.e. les matrices scalaires.*

2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*
   Les matrices $E_{i,j}$ ne sont inversible... mais la matrice $I_n + E_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (il s'agit d'une matrice triangulaire avec des 1 ou 2 sur la diagonale donc sans 0 sur la diagonale).
   Par hypothèse, on a $M(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})M$, dont on déduit que $ME_{i,j} = E_{i,j}M$. D'après le lemme, M est une matrice scalaire.
   Réciproquement les matrices scalaires commutent avec toutes matrices donc en particulier avec toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   Ainsi, $\boxed{\textit{les matrices qui commutent avec toutes les matrices de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \textit{ sont les } \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}}$ *i.e. les matrices scalaires.*

Exercice 11. Cours spé. *Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace de A** par* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.

1. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, *déterminer* $\mathrm{Tr}(A)$.
2. *Montrer :* $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
3. *Montrer :* $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
4. *Montrer :* $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$.
5. *Montrer* $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AA^T) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si A est la matrice nulle.*

Immédiat.

Puissances de matrices

Exercice 12. *Soit* $K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* K^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Correction. *On pose* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Un calcul matriciel donne* $J^2 = 3J$. *Une récurrence immédiate donne :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1}J$.
Comme $K = 2J$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ K^n = 2^n J^n = 2^n 3^{n-1} J = 2 \times 6^{n-1} J = 6^{n-1} K$.
Ainsi, $\boxed{K^0 = I_3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ K^n = 6^{n-1}K}$.

Exercice 13. Matrices de rotation. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *on définit la matrice* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. *Calculer, pour tout* $(\theta, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta R_\mu$.
2. *En déduire que toute matrice de rotation est inversible et que son inverse est encore une matrice de rotation.*
3. *Déterminer les puissances d'une matrice de rotation.*

Correction.

1. *Grâce aux formules de trigonométrie, on trouve que* $\boxed{\forall (\theta, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta R_\mu = R_{\theta+\mu}}$.
2. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *On remarque que* $R_0 = I_2$, *donc* $R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = I_2$, *d'où* R_θ *est inversible et* $\boxed{R_\theta^{-1} = R_{-\theta}}$.
3. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *On en déduit, par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$, *que* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_\theta^n = R_{n\theta}}$. *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N},\ R_\theta^{-n} = (R_\theta^{-1})^n = R_{-\theta}^n = R_{-n\theta}$, *d'après la première question.*

Exercice 14. Calcul de puissances. *Soit* $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$. *Calculer les puissances de*

$$\begin{pmatrix} x + \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & x - \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Correction. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Posons* $M_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$. *Un calcul matriciel donne* $M_\theta^2 = I_2$, *donc* $\forall p \in \mathbb{N},\ M_\theta^{2p} = I_2$ *et* $M_\theta^{2p+1} = M_\theta$. *On cherche à calculer* $(xI_2 + M_\theta)^n$. *Puisque* xI_2 *et* M_θ *commutent,* *on a d'après le binôme de Newton :*

$$\begin{aligned}(xI_2+M_\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}M_\theta^k\\ &= \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}x^{n-k}I_2 + \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}x^{n-k}M_\theta\\ &= p_nI_2+i_nM_\theta,\end{aligned}$$

où

$$p_n=\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}x^{n-k} \qquad \text{et} \qquad i_n=\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

Encore d'après le binôme de Newton, on a $p_n+i_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}1^k=(x+1)^n$ *et*

$$p_n-i_n=\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}x^{n-k}(-1)^k+\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}x^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-1)^k=(x-1)^n.$$

On en déduit que

$$p_n=\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2} \qquad \text{et} \qquad i_n=\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{(xI_2+M_\theta)^n=\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}I_2+\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2}M_\theta}.$$

Exercice 15. *Soit la matrice* $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. *On pose* $D=2I$ *et* $N=A-D$.

1. *Calculer les puissances de D et de N. En déduire A^p pour tout $p\in\mathbb{N}$.*
2. *A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.*

Correction.

1. - *On a :* $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ D^p=2^pI}$.
   - $\boxed{N^0=I_3,\ N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \text{et pour tout } p\geq 3,\ N^p=0}$.
   - *Soit $p\in\mathbb{N}$. On a $N(2I)=2N=(2I)N$, ce qui prouve que N et $2I$ commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.*
     $A^p=(D+N)^p=D^p+pND^{p-1}+\dfrac{p(p-1)}{2}N^2D^{p-2}+0$. *Donc*

$$A^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + p2^{p-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2}2^{p-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} & p(p-1)2^{p-3} \\ 0 & 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}}.$$

2. *A est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont égaux à 2 donc non nuls, donc A est inversible. Son inverse est une matrice triangulaire supérieure avec $\frac{1}{2}$ sur sa diagonale.*

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ 0 & \frac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *L'égalité AA^{-1} mène au système :* $\begin{cases} 2a + \frac{1}{2} = 0 \\ 2b + c = 0 \\ 2c + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

   Puis, $a = c = \frac{-1}{4}$ *et* $b = \frac{1}{8}$. *Ainsi,* $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

   Remarque *: la formule* $\boxed{A^p = \begin{pmatrix} 2^p & p2^{p-1} & p(p-1)2^{p-3} \\ 0 & 2^p & p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}}$ *est encore valable pour $p = -1$.*

Exercice 16. *Considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n \end{cases}.$$

On considère $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *On pose $N := A - 2I_2$. Montrer que N est nilpotente.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n en fonction de I_2, A et n.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.*
4. *En déduire une expression de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Correction.

1. $N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Un calcul matriciel donne* $\boxed{N^2 = 0}$ *donc* $\boxed{N \text{ est nilpotente}}$.

2. *$A = N + 2I_2$, avec N et $2I_2$ qui commutent.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme, et puisque $N^2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (N + 2I_2)^n = (2I_2)^n + nN(2I_2)^{n-1} + 0 \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1}nN \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2^{n-1}n & -2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}(2-n) & -2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 2^{n-1}(2+n). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = AU_n =$ donc par récurrence immédiate $U_n = A^n U_0$.

4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) \\ 2^n(1+n) \end{pmatrix}$ donc $\boxed{u_n = 2^n(1-n) \text{ et } v_n = 2^n(1+n)}$.

Autre méthode. *On peut aussi remarquer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 2^n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 2^n$ et $v_{n+1} = 2v_n + 2^n$.*

Exercice 17. *Soit $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

- On écrit : $A = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = XX^T$ où $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.
- $A^2 = XX^TXX^T = X(u^2+v^2+w^2)X^T = (u^2+v^2+w^2)A$.
- $A^3 = (u^2+v^2+w^2)A^2 = (u^2+v^2+w^2)^2 A$.
- On conjecture et on montre par récurrence que : $\boxed{A^n = (u^2+v^2+w^2)^{n-1}A \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } A^0 = I_2}$.

Remarque sur la multiplication par une matrice de taille 1×1. *Considérons la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{C}$. Le produit matriciel $X \times (a)$ est bien définie et donne une matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dont les coefficients sont :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ [X \times (a)]_{i,1} = \sum_{k=1}^{1} [X]_{i,k}[(a)]_{k,1} = [X]_{i,1}[(a)]_{k,1}1 = x_i \times a.$$

Ainsi, multiplier X à droite par la matrice (a) revient à multiplier X par le scalaire a :

$$\boxed{X \times (a) = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}.$$

De même, multiplier $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ à droite par la matrice (a) revient à multiplier Y par le scalaire a.
En effet, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ [(a) \times Y]_{1,i} = ay_i$ donc

$$(a) \times Y = \begin{pmatrix} ay_1 & \dots & ay_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = aY.$$

Exercice 18. Un exo de l'X ! *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, *avec* $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ *et* $b+c \leq a+d$.

Pour tout $n \geq 2$, *on note* $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. *Montrer que :* $\forall n \geq 2,\ b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Correction. *Soit* $n \geq 1$. *En exploitant* $M^{n+1} = MM^n$, *on a* $\begin{cases} a_{n+1} &= aa_n + b\ c_n \\ b_{n+1} &= ab_n + b\ d_n \\ c_{n+1} &= ca_n + d\ c_n \\ d_{n+1} &= cb_n + d\ d_n \end{cases}$. *Par suite,*

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} &= a(a_n - b_n) + b(c_n - d_n) \\ c_{n+1} - d_{n+1} &= c(a_n - b_n) + d(c_n - d_n) \end{cases} \qquad (\star)$$

donc

$$\begin{aligned}(a_{n+1} + d_{n+1}) - (b_{n+1} + c_{n+1}) &= (a_{n+1} - b_{n+1}) - (c_{n+1} - d_{n+1}) \\ &= (a_n - c_n)\underbrace{(a-c)}_{\geq 0} + (c_n - d_n)\underbrace{(b-d)}_{\geq 0}.\end{aligned}$$

Sachant $a \geq c$ *et* $b \geq d$, *il suffit d'établir* $a_n \geq b_n$ *et* $c_n \geq d_n$ *pour conclure, ce que l'on peut faire par récurrence.*
L'initialisation est claire car on peut définir $a_1 = 1$, *etc. et les hypothèses assurent que* $a_1 \geq b_1$ *et* $c_1 \geq d_1$.
L'hérédité découle de $(\star)$ *où on rappelle que par hypothèse* $a, b, c, d \geq 0$.
Notons que l'hypothèse $b + c \leq a + d$ *ne nous a pas été utile.*

Matrices nilpotentes

Exercice 19. Stabilité des matrices nilpotentes. *Soient deux matrices* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *qui commutent.*

1. *Montrer que si* A *est nilpotente, alors* AB *est nilpotente.*
2. *Montrer si* A *et* B *sont nilpotentes d'indices de nilpotence* a *et* b *respectivement, alors* $A + B$ *est nilpotente d'indice inférieur ou égal à* $a + b - 1$.

Correction.

1. *Supposons* A *nilpotente. Alors il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A^p = 0$. *Puisque* A *et* B *commutent, on a*
$$(AB)^p = A^p B^p = 0_n.$$
2. *Supposons que* A *et* B *sont nilpotentes d'indices de nilpotence* $a \in \mathbb{N}^*$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$ *respectivement. Comme* A *et* B *commutent, on a, en appliquant la formule du binôme de Newton :*
$$(A+B)^{a+b-1} = \sum_{k=0}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} A^k B^{a+b-1-k}.$$
Or $A^a = 0_n$ *donc pour tout* $k \geq a$, $A^k = 0_n$.
De plus, $B^b = 0_n$ *donc pour* $j \geq b$, $B^j = 0_n$. *Or, pour* $k \in [\![0, a-1]\!]$, $a + b - 1 - k \geq b$ *donc*

$B^{a+b-1-k} = 0_n$. Ainsi, en découpant la somme ainsi :

$$(A+B)^{a+b-1} = \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k} A^k \underbrace{B^{a+b-1-k}}_{=0_n} + \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} \underbrace{A^k}_{=0_n} B^{a+b-1-k},$$

on obtient $\boxed{(A+B)^{a+b-1} = 0_n}$*, ce qui prouve que*
$\boxed{A+B \text{ est nilpotente et que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à } a+b-1.}$

Exercice 20. Nilpotence et inversibilité. *Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que N n'est pas inversible.*
2. *Montrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.*
3. *En déduire que $I_n + N$ est inversible et déterminer son inverse.*

Correction.

1. **Méthode 1.** *Si $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $N^p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $0_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ce qui est absurde. Donc* $\boxed{N \text{ n'est pas inversible}}$.
   Méthode 2. *Si N était inversible alors on pourrait parler de N^{-1} et puisque N et N^{-1} commutent, on aurait $0 = N^p(N^{-1})^p = (NN^{-1})^p = I_n^p = I_n$, ce qui est absurde. Donc* $\boxed{N \text{ n'est pas inversible}}$.

2. *On conjecture que $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$, et on le vérifie par calcul.*
   Puisque I_n et N commutent, on a d'après la formule de Bernoulli

$$(I-N)\left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right) = I_n^p - N^p = I_n \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right)(I_n - N) = I_n.$$

   Ainsi, $\boxed{I - N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } (I_n-N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k}$ *(ou on fait le produit matriciel qui se simplifie par télescopage...).*

3. *N étant nilpotente d'indice p, $-N$ l'est aussi, donc d'après 2., $I_n - (-N)$ est inversible, c'est-à-dire $I_n + N$ est inversible. Toujours d'après 2., on a :* $\boxed{(I_n+N)^{-1} = (I_n - (-N))^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k N^k}$.

Exercice 21. Deux matrices simultanément inversibles. *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où B est nilpotente et commute avec A.*
Montrer que A et $A+B$ sont simultanément inversibles (i.e. A est inversible si et seulement si $A+B$ est inversible).
Indication : *on pourra utiliser les résultats des exercices précédents.*

Correction.

- *Supposons A inversible. On écrit :*

$$\boxed{A+B = A(I_n + A^{-1}B)}.$$

Idée : justifions que $A^{-1}B$ est nilpotente.
Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. En effet, on a

$$A^{-1}B = A^{-1}B(AA^{-1}) = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}.$$

Comme B est nilpotente et A^{-1} et B commutent, on en déduit que $A^{-1}B$ est également nilpotente (exercice 19).
D'après l'exercice précédent, on sait alors que $I_n + A^{-1}B$ est inversible.
La matrice $A+B = A(I_n + A^{-1}B)$ s'écrit donc comme un produit de matrices inversibles, donc $\boxed{A+B \text{ est inversible}}$.

- *Supposons $A+B$ inversible.*
Première méthode. *On vient de montrer que :*

$$\begin{cases} A \text{ inversible} \\ B \text{ nilpotente} \\ AB = BA \end{cases} \Longrightarrow A+B \text{ inversible.}$$

En appliquant ce résultat aux matrices $A+B$ et $-B$ (puisque $A+B$ est inversible, $-B$ est inversible et ces deux matrices commutent vu que $(A+B)(-B) = -AB - B^2 = -BA - B^2 = (-B)(A+B)$), on obtient $(A+B)+(-B)$ est inversible, i.e. $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
Deuxième méthode. *De même, on écrit :*

$$A = (A+B) - B = (A+B)(I_n - (A+B)^{-1}B).$$

Idée. *Là encore, justifions que $(A+B)^{-1}B$ est nilpotente. Comme B est nilpotente, il suffit de montrer que $(A+B)^{-1}$ et B commutent.*
Or, B et $A+B$ commutent (car $B(A+B) = BA + B^2 = AB + B^2 = (A+B)B$ vu que A et B commutent) et on a déjà montré qu'alors B commute avec $(A+B)^{-1}$.
Finalement, $(A+B)^{-1}B$ est nilpotente donc d'après l'exercice précédent, $I_n - (A+B)^{-1}B$ est inversible d'où $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

Exercice 22. Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes.
Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice* ***triangulaire supérieure stricte*** *i.e. vérifiant*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j \leq i \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

Montrons que T *est nilpotente.*

Correction. **Phase de recherche, pour comprendre.** *D'après le cours, on sait déjà que* T^2 *est encore triangulaire supérieure stricte. Un calcul matriciel nous montre que la sur-diagonale de* T^2 *est encore nulle, i.e.* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(T^2)_{i,i+1} = 0$, *ce que nous allons prouver par calcul.*
Finalement, en rassemblant ces informations, il s'agit de montrer que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j \leq i+1 \Longrightarrow (T^2)_{i,j} = 0.$$

On a

$$(T^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{t_{i,k}}_{=0 \text{ si } k \leq i} t_{k,j} = 0 + \sum_{k=i+1}^{n} t_{i,k} \underbrace{t_{k,j}}_{=0 \text{ car } j \leq k} = 0.$$

Ainsi, T^2 *a sa diagonale et sa sur-diagonale nulle.*
De même, T^3 *a « trois » diagonales nulles, et en itérant,* $\boxed{T^n = 0}$.
Formalisation. *Montrons que pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$, T^k *est triangulaire supérieure avec « k » diagonales nulles, par récurrence finie.*
Notons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$P(k) : « \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j \leq i+k-1 \Longrightarrow (T^k)_{i,j} = 0 ».$$

- *On a* $P(1)$ *car* T *est triangulaire stricte par hypothèse.*
- *Soit* $k \in [\![1,n-1]\!]$ *tel que* $P(k)$. *Montrons* $P(k+1)$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ *tel que* $j \leq i+k$. *On a*

$$\begin{aligned}(T^{k+1})_{i,j} &= (T^k T)_{i,j} = \sum_{q=1}^{n} (T^k)_{i,q} T_{q,j} \\ &= \sum_{q \leq i+k-1} \underbrace{(T^k)_{i,q}}_{=0 \text{ d'après } P(k)} T_{q,j} + \sum_{q \geq i+k} (T^k)_{i,q} \underbrace{T_{q,j}}_{=0 \text{ car } j \leq i+k \leq q} \quad \text{car } T \text{ est triangulaire sup. stricte} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- *Par théorème de récurrence, on a* $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(k)$.

En particulier, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, *on a* $j \leq n$ *et* $n \leq i-1+n$ *donc par transitivité,* $j \leq i-1+n$ *et d'après* $P(n)$, *on sait alors que* $(T^n)_{i,j} = 0$. *Cela prouve que* $\boxed{T^n = 0}$, *et conclut.*

Exercice 23. *Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente.*

Correction. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
D'après l'exercice précédent, les matrices triangulaires supérieures strictes sont nilpotentes.
On peut écrire $A = S + T$ avec $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $T = (t_{i,j})$ triangulaire supérieure stricte d'ordre n données par

$$\boxed{s_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \geq j \\ a_{j,i} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{i,j} - a_{j,i} & \text{sinon} \end{cases}},$$

ce qui prouve l'existence.

Matrices inversibles, calcul de l'inverse

Exercice 24. Un polynôme annulateur. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.*
2. *Que vaut $(A^2)^{-1}$?*

Correction.

1. *$A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ implique que $I_3 = -A^3 + A^2 + A$ donc $\underline{A(-A^2 + A + I_3) = (-A^2 + A + I_3)A = I_3}$.*
   Ainsi, $\boxed{A \text{ inversible et } A^{-1} = -A^2 + A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.
2. ***Première méthode :*** $\boxed{(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2}$ *et on fait le produit matriciel.*
   Deuxième méthode : *on utilise encore l'équation matricielle : $I_3 = -A^3 + A^2 + A = A^2(-A + I_3 + A^{-1}) = (-A + I_3 + A^{-1})A^2$ donc* $\boxed{A^2 \text{ est inversible et } (A^2)^{-1} = -A + I_3 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 25. Trois méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice inversible. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que A est inversible et calculer son inverse en résolvant un système linéaire.*

Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. *Résolvons* $AX = B$, *afin d'avoir une expression de* $X = A^{-1}B$. *On a :*

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+3z &=& a \\ x+y+4z &=& b \\ x-2y+z &=& c \end{array}\right. \underset{\text{deux échanges}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z &=& b \\ x-2y+z &=& c \\ 2x+2y+3z &=& a \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z &=& b \\ -3x-3z &=& c-b \\ -5z &=& a-2b \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow -\frac{1}{5}L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z &=& b \\ -3y-3z &=& c-b \\ z &=& \frac{2b-a}{5} \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2-L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+4z &=& b \\ y &=& \frac{3a-b-5c}{15} \\ z &=& \frac{2b-a}{5} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2-4L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{9a-8b+5c}{15} \\ y &=& \frac{3a-b-5c}{15} \\ z &=& \frac{-3a+6b}{15} \end{array}\right.$$

Ainsi, $A^{-1}B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9a-8b+5c \\ 3a-b-5c \\ -3a+6b \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. *Vérifier que A est inversible et calculer son inverse à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan.*

$(A \mid I_n) \underset{L}{\sim} (I_n \mid A^{-1})$ *d'où :* $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$.

3. *Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 - 4A^2 + \alpha A - 15I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.*

$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 17 \\ 7 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 35 & -16 & 44 \\ 20 & -13 & 12 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$; $A^3 - 4A^2 - 15I_3 = \begin{pmatrix} -16 & -16 & -24 \\ -8 & -8 & -32 \\ -8 & 16 & -8 \end{pmatrix} = -8A$

donc $\boxed{\alpha = 8}$.

De, $A^3 - 4A^2 + 8A - 15I_3 = O_3$, *on déduit que :* $A(A^2 - 4A + 8I_3) = 15I_3$ *i.e.* $A \times \frac{1}{15}(A^2 - 4A + 8I_3) = I_3$. *Ainsi, A est inversible à droite donc inversible et* $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}(A^2 - 4A + 8I_3) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. **Application.** *En déduire les solutions du système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+3z &=& 15 \\ x+y+4z &=& 15 \\ x-2y+z &=& 0 \end{array}\right.$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$, *on a* $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, *donc l'unique solution de ce système est le triplet* $\boxed{(1,2,3)}$.

Exercice 26. Une mini matrice compagnon. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. *Montrer que* A *est inversible si et seulement si* $x \neq 0$.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A, *ce qui ne change par son caractère inversible.*
En effectuant $L_1 \leftrightarrow L_2$, *puis* $L_2 \leftrightarrow L_3$, *puis* $L_3 \leftrightarrow L_4$, *on obtient la matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

qui est inversible si et seulement si $x \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } x \neq 0}$.

Exercice 27. Inversible avec paramètres. *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on note* $A_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & 4 & y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. *Représenter dans le plan l'ensemble des* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pour lesquelles la matrice* $A_{x,y}$ *n'est pas inversible.*

Correction. *Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de* $A_{x,y}$, *ce qui ne change par son caractère inversible.*
En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, *on obtient la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x-3 \\ 0 & 2 & y-3 \end{pmatrix}$$

Puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, *on obtient*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x-3 \\ 0 & 0 & y-2x+3 \end{pmatrix}$$

qui est non inversible si et seulement si $y - 2x + 3 = 0$.
$\boxed{\text{L'ensemble des } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } A_{x,y} \text{ n'est pas inversible est la droite ayant pour équation } y = 2x-3}$.

Exercice 28. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.*

1. *Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.*
2. *Montrer que $I + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.*

Correction.

1. *Puisque $(I + A)(I - A) = I - A^2 = (I - A)(I + A)$, on a, en multipliant à droite et à gauche par $(I + A)^{-1}$, la relation*
$$\boxed{(I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)},$$
d'où les deux expressions de B.

2. *On a $(I + A)B = I - A$ donc*
$$(I + A)(I + B) = (I + A) + (I - A) = 2I.$$
De même, on a
$$(I + B)(I + A) = (I + A) + B(I + A) = (I + A) + (I - A) = 2I$$
donc $\boxed{I + B \text{ est inversible et } (I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A)}$ puis
$$(I - B)(I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I - B)(I + A) = \frac{1}{2}(I + A) - (I - A) = A.$$
D'où $\boxed{A = (I - B)(I + B)^{-1}}$.

Exercice 29. La matrices des 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note J_n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur n la matrice J_n est inversible.*

- **Méthode 1.**
  - *Si $n \geq 2$, alors J_n possède au moins deux lignes égales donc $J_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*
  - *Si $n = 1$, alors $J_1 = (1) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ (d'inverse lui-même).*

- **Méthode 2.** *On a*
$$J_n^2 = nJ_n.$$
Raisonnons par l'absurde. Supposons que J_n est inversible. Alors en multipliant (à gauche ou à droite) par J_n^{-1} dans l'égalité précédente, on obtient
$$\boxed{J_n = nI_n}, \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = nI_n.$$
Si $n \geq 2$, en se plaçant en dehors de la diagonale et en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient $1 = 0$, ce qui est absurde. Donc J_n n'est pas inversible.
Si $n = 1$ alors J_1 est inversible.

Ainsi, $\boxed{J_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow n = 1}$.

Exercice 30. Une matrice à coefficients complexes. *Soit* $n \geq 2$. *On pose* $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ *et* $A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leq k,\ell\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Calculer $A\overline{A}$. *En déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

Correction. $A = (a_{k,\ell})$ *avec* $a_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.
$\overline{A} = (b_{k,\ell})$ *avec* $b_{k,\ell} = \overline{a_{k,\ell}} = \omega^{-(k-1)(\ell-1)}$.
$A\overline{A} = (c_{k,\ell})$ *avec*

$$c_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} b_{m,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-\ell)(m-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^{(k-\ell)})^m.$$

Or,

$$\omega^{(k-\ell)} = 1 \Longleftrightarrow \frac{2\pi(k-\ell)}{n} \equiv 0\ [2\pi] \Longleftrightarrow k-\ell \equiv 0\ [n] \Longleftrightarrow k-\ell \in n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow k-\ell = 0,$$

car $-(n-1) \leq k-\ell \leq n-1$.

- *Si* $k = \ell$ *alors* $\omega^{k-\ell} = 1$ *et* $c_{k,k} = n$.
- *Si* $k \neq \ell$ *alors* $\omega^{k-\ell} \neq 1$ *et* $c_{k,\ell} = \dfrac{1-(\omega^{k-\ell})^n}{1-\omega^{k-\ell}} = \dfrac{1-(\omega^n)^{k-\ell}}{1-\omega^{k-\ell}} = 0,$ *car* $\omega^n = 1$.

Ainsi, $\boxed{A\overline{A} = nI_n}$, *donc* $A\overline{A}$ *est scalaire. En conjuguant, il vient* $\overline{A}A = nI_n$. *Ainsi,* $A\left(\frac{1}{n}\overline{A}\right) = \left(\frac{1}{n}\overline{A}\right)A = I_n$, *ce qui prouve que* $\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}}$.

Exercice 31. Matrice à diagonale dominante. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.

1. *Montrer que :* $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \left(AX = 0 \Longrightarrow X = 0\right)$.
   Indication : *une fois le raisonnement lancé, on pourra s'aider d'un raisonnement par l'absurde et considérer* $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.
2. *On admet (pour l'instant) que*
   $$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \left(AX = 0 \Longrightarrow X = 0\right) \Longrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$
   Que peut-on dire d'une matrice à diagonale dominante ?
3. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ? Donner une condition suffisante sur* $\lambda \in \mathbb{C}$ *pour que* $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *soit inversible.*

Correction.

1. *Soit X une colonne telle que $AX = 0$.*
   Montrons que $X = 0$.
   La partie $\left\{|x_1|, \dots, |x_n|\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, finie et non vide, donc elle admet un maximum.
   Ainsi, il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_m| = \max\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right)$.
   Par hypothèse, on a l'égalité matricielle $AX = 0$ qui se réécrit :

   $$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

   En particulier, pour $i = m$, on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = 0$.
   En isolant le terme d'indice m, on obtient

   $$a_{mm} x_m = -\sum_{j \neq m} a_{mj} x_j.$$

   Puis, en appliquant le module :

   $$|a_{mm} x_m| = \Big|\sum_{j \neq m} a_{mj} x_j\Big|.$$

   Puis par inégalité triangulaire,

   $$|a_{mm}||x_m| \leqslant \sum_{j \neq m} |a_{mj}||x_j|.$$

   Comme $|x_m| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, on a

   $$|a_{mm}||x_m| \leqslant \sum_{j \neq m} |a_{mj}||x_m|.$$

   Supposons, par l'absurde, que $X \neq 0$. Alors $|x_m| > 0$.
   En divisant par $|x_m|$ dans l'inégalité précédente, on obtient $|a_{mm}| \leqslant \displaystyle\sum_{j \neq m} |a_{mj}|$, ce qui contredit le fait que la matrice soit à diagonale dominante.
   D'où $X = 0$.

2. *On en conclut que $\boxed{\text{toute matrice à diagonale dominante est inversible}}$.*

3. *A est à diagonale dominante, donc inversible.*
   Si $|\lambda| > 5$, alors M_λ est à diagonale dominante, donc inversible (condition suffisante).

Melting-pot

Exercice 32. Une équation matricielle. *Déterminer les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Correction. *Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Par opérations matricielles, on obtient*

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd+b \\ ac+cd+c & bc+d^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad M^2+M = \begin{pmatrix} a^2+bc+a & b(a+d+1) \\ c(a+d+1) & bc+d^2+d \end{pmatrix}.$$

On procède par analyse-synthèse (les raisonnements qui vont suivre sont un peu trop compliqués pour qu'il soit facile de raisonner par chaîne d'équivalences).

Analyse. *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors*

$$\begin{cases} a^2+a+bc = 1 \\ b(a+d+1) = 1 \\ c(a+d+1) = 1 \\ bc+d^2+d = 1. \end{cases}$$

Un point important est alors que si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ vérifient $\alpha\beta = 1$, on a nécessairement $\alpha = \beta = \pm 1$.

Ainsi, on en déduit $b = c = a+d+1 = \pm 1$. En particulier, $bc = 1$.

Les deux équations extrêmes du système deviennent alors

$$\begin{cases} a^2+a = 0 \\ d^2+d = 0. \end{cases}$$

Comme $a^2+a = a(a+1)$, la règle du produit nul entraîne que $a \in \{-1, 0\}$. De même, $d \in \{-1, 0\}$. Comme on doit également avoir $a+d+1 = \pm 1$, les seuls possibilités sont $(a,d) = (-1,-1)$ et $(a,d) = (0,0)$.

On obtient alors que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Synthèse. *On a $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc les deux matrices que l'on a identifiées à la fin de la phase d'analyse vérifient $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Ainsi, les deux solutions sont $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Exercice 33. Matrice triangulaire commutant avec sa transposée. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure commutant avec sa transposée. Montrer que A est diagonale.*
Indication : *on pourra écrire A par blocs :*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & C \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right),$$

montrer que C est la colonne nulle, puis expliquer comment conclure.

Correction. *On écrit la matrice par blocs*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & C \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right) \qquad \text{avec } B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}),\ C \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } d \in \mathbb{R}.$$

Comme A est triangulaire supérieure, la matrice B l'est également.
D'après l'hypothèse, A commute avec sa transposée, donc on obtient :

$$AA^T = \left(\begin{array}{c|c} BB^T + C^T C & d\,C \\ \hline dC^T & d^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B^T B & B^T C \\ \hline C^T B & C^T C + d^2 \end{array}\right) = A^T A.$$

*L'égalité des blocs en bas à droite fournit $d^2 = C^T C + d^2$, d'où $C^T C = 0$. Ce produit s'interprète comme (la matrice 1×1 dont l'unique coefficient vaut ...) le scalaire $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{n-1}^2$ où $C^T = (c_1, \ldots, c_{n-1})$. On obtient donc une somme de **réels** positifs de somme nulle, donc tous les réels sont nuls, donc tous les c_i sont nuls, donc $C = 0$.*
L'égalité des blocs en haut à gauche fournit $BB^T + CC^T = B^T B$, et comme $C = 0$, on obtient que B commute avec sa transposée.
Ainsi,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right) \qquad \text{avec } B \text{ triangulaire supérieure qui commute avec sa transposée.}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que B est diagonale, ce que l'on peut obtenir par récurrence sur la taille de la matrice (on vient d'expliquer l'hérédité).

Exercice 34. Un mini-problème. *On considère* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Résoudre pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, le système* $AX = \lambda X$*, d'inconnue* $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*.*
   En déduire trois vecteurs non nuls $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ *et trois réels* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$*, tels que* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ *et pour tout* $i \in [\![1,3]\!]$*,* $AX_i = \lambda_i X_i$*.*

On note P *la matrice de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *de colonnes* X_1, X_2, X_3*.*

2. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}*.*
3. *Déterminer, sans calcul, une matrice diagonale* $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *pour laquelle* $AP = PD$*.*
4. *En déduire pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, une expression de* A^k *en fonction de* k*,* P *et* D*, puis une expression explicite de* A^k *en fonction de* k *seulement.*

Correction.

1. • *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*. On a :*

$$AX = \lambda X \iff (A - \lambda I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons (S_λ) *le système* $AX = \lambda X$*. En permutant la première et la troisième ligne, on obtient :*

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y - (1+\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + 2z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1) \end{cases}$$

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y - (1+\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)y + z = 0 \\ -(1-\lambda)y + (3-\lambda^2)z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x + y - (1+\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)y + z = 0 \\ (4-\lambda^2)z = 0. \end{cases}$$

• *Pour* $\lambda = -2$*, on obtient le système*

$$(S_{-2}) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de (S_{-2}) *est* $\{(2y, y, -3y) \mid y \in \mathbb{R}\}$*.*

- *Pour $\lambda = 2$, on obtient le système*

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ \quad -y + z = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases} .$$

L'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(2y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- *Pour $\lambda = 1$, on obtient le système*

$$(S_1) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ \qquad\quad z = 0 \\ \qquad\ 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} .$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- *Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, les opérations $L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{4-\lambda^2} L_3$ donnent :*

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

L'ensemble des solutions de (S_λ) est $\{(0, 0, 0)\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

- *En conclusion,* $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = \lambda X \text{ est } \begin{cases} \{(2y, y, -3y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = -2 \\ \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 1 \\ \{(2y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 2 \\ \{(0, 0, 0)\} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\} \end{cases}}$

- *Finalement, on trouve* $\boxed{\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2}$ *et* $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

2. *Par définition, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Utilisons des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer $(P|I_3)$. On a :

$$\begin{aligned}
(P|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1+L_2+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2-L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/12 & 1/12 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \\
&= \left(I_3 \mid P^{-1} \right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})}$ *et* $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/12 & -1/4 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$.

3. *AP est une matrice 3×3 dont les colonnes sont respectivement AX_1, AX_2, AX_3 donc d'après la question 1., $\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \lambda_3 X_3$. On peut donc interpréter la matrice AP comme la matrice PD où*

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

4. • *Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.*

   – *$A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ donc $\underline{A^0 = PD^0P^{-1}}$ et la propriété est initialisée.*

   – *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = PD^kP^{-1}$. D'après la question précédente, on a $AP = PD$ donc, puisque $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $A = PDP^{-1}$. Ainsi,*

   $$A^{k+1} = A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1},$$

   ce qui montre que la propriété est héréditaire.

   Le théorème de récurrence permet de conclure que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}}$.

- *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a* $D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ *donc* $\boxed{PD^k = \begin{pmatrix} 2(-2)^k & 1 & 2^{k+1} \\ (-2)^k & -1 & 2^k \\ -3(-2)^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}}$, *et*

$$A^k = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2^k\left(2(-1)^k+6\right)+4 & 2^k\left(2(-1)^k+6\right)-8 & 3\times 2^{k+1}\left((-1)^{k+1}+1\right) \\ 2^k\left((-1)^k+3\right)-4 & 2^k\left((-1)^k+3\right)+8 & 3\times 2^k\left((-1)^{k+1}+1\right) \\ 3\times 2^k\left((-1)^{k+1}+1\right) & 3\times 2^k\left((-1)^{k+1}+1\right) & 3\times 2^k\left(3(-1)^k+1\right) \end{pmatrix}.$$

Puisque $(-1)^{k+1}+1$, $(-1)^k+3$, $(-1)^k+1$ et $3(-1)^k+1$ sont des entiers pairs, on a

$$\boxed{A^k = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^k\left((-1)^k+3\right)+2 & 2^k\left((-1)^k+3\right)-4 & 3\times 2^k\left((-1)^{k+1}+1\right) \\ 2^{k-1}\left((-1)^k+3\right)-2 & 2^{k-1}\left((-1)^k+3\right)+4 & 3\times 2^{k-1}\left((-1)^{k+1}+1\right) \\ 3\times 2^{k-1}\left((-1)^{k+1}+1\right) & 3\times 2^{k-1}\left((-1)^{k+1}+1\right) & 3\times 2^{k-1}\left(3(-1)^k+1\right) \end{pmatrix}}.$$

(Formule vérifiée pour $k=0$ et $k=1$).

Exercice 35. Matrice symétrique de trace nulle.

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$. Montrer que M est symétrique et de trace nulle.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Ici $n=3$. Montrer que les matrices de l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_3\right\}$ s'écrivent comme combinaison linéaire de 5 matrices à déterminer.*

Correction.

1. *On a $M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$. En transposant cette égalité, on obtient :*

$$M = M^T + \mathrm{Tr}(M)I_n.$$

On obtient le petit système

$$\begin{cases} M^T &= M + \mathrm{Tr}(M)I_n \\ M &= M^T + \mathrm{Tr}(M)I_n \end{cases}$$

Effectuons $L_1 - L_2$. On obtient $M^T - M = M - M^T$, d'où $M^T = M$. Ainsi $\boxed{M \text{ est symétrique}}$. Et en reportant cette information dans l'égalité initiale, on trouve $\mathrm{Tr}(M)I_n = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = 0}$.

2. $\boxed{\textit{Oui !}}$
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique et de trace nulle, alors on a : $M^T = M$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$, d'où l'égalité $\boxed{M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_n}$.

3. *D'après les deux questions précédentes, l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_3\right\}$ est exactement l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.*

Une matrice M carrée de taille 3 symétrique et de trace nulle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a+d+f=0.$$

donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } a,b,c,d,e \in \mathbb{K}.$$

Ainsi M s'écrit

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $a,b,c,d,e \in \mathbb{K}$.
Ainsi, les matrices de l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^T = M + \mathrm{Tr}(M)I_3\right\}$ s'écrivent comme combinaison linéaire des matrices

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{11}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}+E_{21}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{13}+E_{31}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{22}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{23}+E_{32}}.$$

Exercice 36. Inversibilité pour les matrices carrées de taille 2. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.*

1. *Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2$.*

   Des calculs matriciels donne : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+b)d \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = (a+d)A - (ad-bc)I_2$. En faisant la différence, on obtient la formule demandée.

2. *Montrer que $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \iff ad-bc \neq 0$, et déterminer A^{-1} le cas échéant.*

   - *Supposons $ad-bc \neq 0$. D'après la formule précédente, on écrit*

     $$(ad-bc)I_2 = A(-A+(a+d)I_2) = (-A+(a+d)I_2)A.$$

     Puisque $ad-bc \neq 0$, on a $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et

     $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}(-A+(a+d)I_2) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}.$$

   - *Supposons A inversible. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $ad-bc=0$.*
     Alors $A^2 = (a+d)A$.
     En multipliant par A^{-1}, on obtient : $A = (a+d)I_2$. L'égalité de leurs coefficients mène à

$a = b = c = d = 0$, donc $A = 0_2$. On obtient une contradiction car 0_2 n'est pas inversible. Ainsi, $ab - bc \neq 0$, ce qui prouve l'implication directe.