Suites réelles

Exercice 1. Formule explicite. *Déterminer les formules explicites des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ définies par les expressions suivantes.*

1. $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n^2$;
2. $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + n$;
3. $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$;
4. $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^2$.

Correction.

1. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 2 & si\ n = 0 \\ -2 & si\ n > 0 \end{cases}}$.
2. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.
3. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}}$.
4. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{2^n-1}}$.

Exercice 2. Limite. *Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les expressions suivantes.*

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$; $\quad \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$;
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$;
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.

Correction.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$. La fonction inverse décroissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que*
$$\frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2},$$
puis en sommant pour k variant entre 1 et n il vient
$$\frac{n}{n+n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^2}.$$
Les deux termes extrêmes tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc par **théorème d'encadrement** $\boxed{u_n \to 0}$.

2. *Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.*
On a, pour tout $k \in [\![1,\ n]\!]$, $\lfloor kx \rfloor \leq kx < \lfloor kx \rfloor + 1$. En affaiblissant l'inégalité stricte en une inégalité large et en retranchant 1 de part et d'autre de cette inégalité, on obtient
$$kx - 1 \leq \lfloor kx \rfloor \leq kx.$$
En sommant ces inégalités (et en divisant le résultat par n^2), on obtient
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx.$$

Le terme de droite vaut

$$\frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}x = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}.$$

Le terme de gauche vaut celui de droite $-\frac{1}{n}$ *donc tend aussi vers* $\frac{x}{2}$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\boxed{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}}.$$

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}} + \frac{n}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}}$, *où* $\frac{n}{\sqrt{2n}} \to +\infty$, *donc par* **théorème de minoration**, $\boxed{u_n \to +\infty}$.

4. *On a :* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}$.
Et : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \underbrace{\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}}_{\to 0}$, *car* $0 \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n(n-1)}$ *tend vers 0 par encadrement. Ainsi* $\boxed{u_n \to 1}$.

Exercice 3. Variations de suites. *Étudier les variations de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *ou* $(u_n)_{n>0}$ *définie par les expressions suivantes.*

1. $u_n = \binom{n}{p}$ *(pour* $p \in \mathbb{N}$*) ;*
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$;
3. $u_n = \frac{n!}{2^n}$;
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n$;
5. $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$;
6. $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{3u_n^2}{1+4u_n}$;

Correction.

1. **Méthode 1.** *Pour tout* $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \binom{n+1}{p} - \binom{n}{p} \\ &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} - \binom{n}{p} && \text{(formule de Pascal)} \\ &= \binom{n}{p-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Cela montre que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

Méthode 2. *Soit $p \in \mathbb{N}$. On peut également écrire :*

$$\forall n \geq p, \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!},$$

ce qui écrit la suite $(u_n)_{n\geq p}$ comme produit de p suites croissantes positives, ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang p. Comme $u_0 = \cdots = u_{p-1} = 0$, $\boxed{\text{la suite est croissante}}$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $(n+1)^2 \geq n(n+1)$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La suite est donc décroissante.

3. *Déjà, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} \\ &= \frac{\frac{(n+1)\,n!}{2\times 2^n}}{\frac{n!}{2^n}} \\ &= \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

cette quantité est ≥ 1 dès que $n \geq 1$, donc la suite est croissante à partir du rang 1.

Comme $u_1 = \dfrac{1}{2} < 1 = u_0$, elle n'est pas croissante <u>stricto sensu</u>.

4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln k - (n+1)\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n\right) \\ &= \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n) \\ &= n\left(\ln(n) - \ln(n+1)\right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

donc la suite est décroissante.

5. *Déjà, on constate que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1,$$

   donc la suite est décroissante.

6. *On constate que, quel que soit* $x > 0$, *on a*

$$\frac{3x^2}{1+4x} > 0.$$

   Cela permet, par une récurrence immédiate, de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

   Par ailleurs, si $x > 0$,

$$\frac{3x^2}{1+4x} - x = \frac{3x^2 - x - 4x^2}{1+4x} = \frac{-x - x^2}{1+4x} < 0.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n^2}{1+4u_n} - u_n < 0$, *ce qui montre que la suite est strictement décroissante.*

Exercice 4. *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* $[0,1]$ *telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 1$.
Étudier la convergence éventuelle des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $0 \leq a_n \leq 1$ *et* $0 \leq b_n \leq 1$ *donc* $a_n b_n \leq b_n \leq 1$.
En passant à la limite et par théorème d'encadrement on trouve que $\boxed{\lim b_n = 1}$.
De la même manière, on a $\boxed{\lim a_n = 1}$.

Exercice 5. *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = 0$.
Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers 0.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Écrivons :*

$$x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 = \underbrace{\left(x_n + \frac{1}{2}y_n\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}y_n^2}_{\geq 0} \to 0.$$

On a : $0 \leq \dfrac{3}{4}y_n^2 \leq x_n^2 + x_n y_n + y_n^2$, *donc par théorème d'encadrement,* $\dfrac{3}{4}y_n^2 \to 0$, *puis* $y_n^2 \to 0$.
Puis, par continuité de la racine carrée, ou bien par définition de la limite, on en déduit que $\boxed{y_n \to 0}$.

De la même manière, par théorème d'encadrement, on a : $\left(x_n + \frac{1}{2}y_n\right)^2 \to 0$, *ce qui implique que* $x_n + \frac{1}{2}y_n \to 0$. *Or,* $x_n = \left(x_n + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{1}{2}y_n \to 0 - 0 = 0$ *donc* $\boxed{x_n \to 0}$.
Remarque. *Les suites* (x_n) *et* (y_n) *jouent des rôles symétriques.*

Exercice 6. Limite d'un produit. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. *En déduire la limite de* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **Méthode 1.** *La deuxième inégalité est une inégalité de convexité vue en cours. Montrons seulement la première inégalité en prouvons que la fonction* $h : x \mapsto \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$, *est positive sur* $\mathbb{R}_+^*$. *En effet,* h *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de dérivée strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc* h *est strictement croissante sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+^*$. *Puisque* $h(0) = 0$, *on a* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h(x) \geq 0$, *ce qui conclut.*
  Méthode 2. *On a :*

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \iff \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq [t]_0^x$$
$$\iff \int_0^x (1-t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t.$$

  Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in [0,x],\ 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ *d'où l'encadrement précédent et par équivalences on a l'encadrement souhaité.*

  > *En effet,* $t > 0$ *donc* $\frac{1}{1+t} \leq 1$.
  > *De plus, puisque* $1 + t > 0$, *on a :* $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \iff 1 - t^2 \leq 1 \iff t^2 \geq 0$, *ce qui est vrai.*

  Méthode 3. *« A la Taylor-Lagrange ». (plus tard)*

- *Étudions d'abord la suite* $(\ln p_n)$ *où pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *En appliquant l'inégalité précédente à* $x = \frac{k}{n^2} > 0$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, *il vient :*

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

  En sommant pour k *variant entre 1 et* n, *et en utilisant les sommes bien connues* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *il vient :*

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}}_{\to \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}} \leq \ln p_n \leq \underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\to \frac{1}{2}}.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} \ln p_n = \frac{1}{2}$.

Par composition de limite et par continuité de l'exponentielle en $\mathbf{\frac{1}{2}}$*, il vient :*

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln p_n} = \lim_{x\to 1/2} e^x = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = e^{1/2} = \sqrt{e}}$.

Exercice 7. Limite d'un produit trigonométrique. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}.$$

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin \frac{a}{2^n} P_n$ *et en déduire la limite de* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En exploitant la formule* $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, *on obtient*

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \dots \cos\frac{a}{2} = \dots = \frac{1}{2^n} \sin a.$$

On peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) P_{n-1}$, *ce qui prouve que la suite* $\left(\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $\sin a$ *(pour* $n = 0$*). On en déduit sa formule explicite :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin a.$$

On voudrait diviser par $\sin(a/2^n)$*, mais on ne commettrait pas l'affront de diviser par zéro...*
Comme $\frac{a}{2^n} \to 0$, *on sait que pour* n *assez grand,* $\frac{a}{2^n} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ *donc* $\sin(a/2^n)$ *ne s'annule qu'en 0, c'est-à-dire si* a *vaut 0. Distinguons deux cas.*

- *Si* $a = 0$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = 1$ *donc* $P_n \to 1$.

- *Si* $a \neq 0$ *alors, pour* n *assez grand,* $\sin(a/2^n) \neq 0$ *et* $P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.

  Puisque $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *et* $\frac{a}{2^n} \to 0$, *on a, par composition de limites,* $\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} \to 1$.
  Puis

$$P_n = \frac{\sin(a)}{a} \times \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \to \frac{\sin(a)}{a} \times 1 = \frac{\sin(a)}{a}.$$

Sinon. *Puisque* $\frac{a}{2^n} \to 0$, *on a l'équivalent usuel* $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \sim \frac{a}{2^n}$ *donc* $2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \sim a$ *et* $P_n \sim \frac{\sin a}{a}$. *Par conservation de la limite par équivalents, on retrouve que* $P_n \to \frac{\sin a}{a}$

Finalement,

$$\boxed{P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \frac{\sin(a)}{a} & si\ a \neq 0 \\ 1 & si\ a = 0. \end{cases}}$$

Exercice 8. Suite géométrique dérivée.

1. *Soient* $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Méthode 1. *Calculons* $(1-q)S_n$. *En effet, la somme demandée ressemble à la somme des termes d'une somme géométrique pour laquelle l'astuce est de multiplier par* $(1-q)$ *donc on s'en inspire en calculant* $(1-q)S_n$.

$$\begin{aligned}
(1-q)S_n &= \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=1}^{n} kq^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)q^k && \textit{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} q^k + q - (n+1)q^{n+1} && \textit{développement et simplification} \\
&= \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1} \\
&= q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1} && \textit{somme géométrique de raison } q \neq 1 \\
&= \frac{q-(n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)}.
\end{aligned}$$

Méthode 2. *Faire le changement d'indice* $\ell = k - 1$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)q^{\ell+1} \textit{puis en découpant} \\
&= q\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell q^\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} q^{\ell+1} \\
S_n &= q(S_n - nq^n) + q\frac{1-q^n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(1-q)S_n = -nq^{n+1} + q\frac{1-q^n}{1-q}$, *comme précédemment.*
Méthode 2 bis. *Trouver deux façons d'exprimer* S_{n+1} *en fonction de* S_n.
D'une part, en découpant la somme, on a $S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$.

D'autre part, en faisant le changement d'indice $k \to k+1$,

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k\, q^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} k\, q^{k+1} \text{ en découpant}$$
$$S_{n+1} = q\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + qS_n.$$

En rassemblant les deux égalités, il vient :

$$S_n + (n+1)q^{n+1} = q\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q\, S_n$$
$$\text{donc} \qquad (1-q)S_n = -(n+1)q^{n+1} + q\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{1-q}$$

Méthode 3. *Utiliser une fonction. On se place d'abord dans le cas où $q \in \mathbb{R}$.*
On pose $\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k. \end{array}$ Donner une formule pour la dérivée σ', et en déduire la valeur de S_n.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. On a : $\sigma(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. En dérivant cette égalité, de deux manières différentes, on obtient :

$$\text{d'une part, } \sigma'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, x^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\, x^k + \frac{x^n-1}{x-1},$$
$$\text{d'autre part, } \sigma'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k\, x^k = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} - \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{(n-1)x^{n+1}-nx^n+x}{(x-1)^2}}, \text{ cela pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Les propriétés des polynômes permettent d'affirmer que puisque cette formule est vraie sur l'ensemble infini $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, elle l'est également sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour } q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \quad S_n = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}.}$$

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\ln p_n = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Or, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \to 2,$$

car $\frac{n}{2^n} \to 0$ (par croissance comparée). Ainsi,

$$\ln p_n \to 2\ln 2 = \ln(2^2) = \ln 4.$$

***Par composition de limites et par continuité de l'exponentielle**, il vient $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 4}$.*

Exercice 9. $\mathbb{Z}$ est fermé. *Quelles sont les particularités d'une suite d'entiers (relatifs) convergente ?*

Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (a priori).
$\frac{1}{3} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n \in \left[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right]$. Cet intervalle étant de longueur $\frac{2}{3}$, il contient au plus un entier. Par ailleurs, il contient l'entier u_N donc $\left[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right]$ ne contient qu'un seul entier relatif.
Ainsi, $\forall n \geq N,\ u_n = u_N$ i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est stationnaire (elle est constante à partir d'un certain rang)}}$.
Par passage à la limite dans l'égalité précédente, il vient : $\ell = u_N$ donc $\underline{\ell \in \mathbb{Z}}$.
OU bien : $u_n \to u_N$ et $u_n \to \ell$. Par unicité de la limite, on a $\ell = u_N \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ converge dans } \mathbb{Z} \text{ (sa limite est dans } \mathbb{Z})}$. Ceci montre que l'ensemble $\mathbb{Z}$ contient les limites de ses suites convergentes.

Exercice 10. $\mathbb{N}$ est bien fondé. *Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.*

***Correction.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels.*
On considère l'ensemble $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite.
Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$ (par hypothèse) non vide (car $u_{12} \in E$, par exemple), donc elle admet un minimum $m = \min E$.
On peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = m$. On va montrer $\boxed{\forall n \geq N,\ u_n = m}$, ce qui signifiera que (u_n) est stationnaire.
Soit $n \geq N$.

- *L'entier u_n est élément de E. Comme m est un minorant de E, on a déjà $u_n \geq m$.*
- *Par ailleurs, comme $n \geq N$ et que la suite est décroissante, on en déduit $u_n \leq u_N = m$.*

On a ainsi montré $u_n = m$, ce qui conclut.

Exercice 11. Discontinuités de la fonction partie entière. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Correction. *Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de telle sorte que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

- $\boxed{\text{Montrons que si } \ell \notin \mathbb{Z}, \text{ alors } \lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor \ell \rfloor}$.
  Supposons $\ell \notin \mathbb{Z}$. Les deux inégalités de l'encadrement définissant $\lfloor \ell \rfloor$ sont alors strictes :
  $$\lfloor \ell \rfloor < \ell < \lfloor \ell \rfloor + 1.$$
  Ces inégalités étant strictes, on peut trouver un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
  $$\forall n \geq N_1, u_n > \lfloor \ell \rfloor .$$
  De même, on peut trouver un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
  $$\forall n \geq N_2, u_n < \lfloor \ell \rfloor + 1.$$
  Si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, on a donc
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor \ell \rfloor < u_n < \lfloor \ell \rfloor + 1.$$
  En particulier, si $n \geq N$, on a $\lfloor \ell \rfloor \leq u_n < \lfloor \ell \rfloor + 1$, ce qui, par définition de la partie entière, signifie que $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor$.
  La suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à $\lfloor \ell \rfloor$, ce qui montre bien
  $$\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor \ell \rfloor .$$

- *En revanche, $\boxed{\text{si } \ell \in \mathbb{Z}, \text{ il n'y a pas de comportement défini}}$, comme le montrent les exemples suivants.*
  - ⋆ *on a $2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\lfloor 2^{-n} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;*
  - ⋆ *on a $-2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\lfloor -2^{-n} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$;*
  - ⋆ *on a $(-2)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\left(\lfloor (-2)^{-n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (car les valeurs de la suite valent alternativement 0 et -1).*

Exercice 12. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, version séquentielle. *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer qu'il existe une suite de rationnels qui converge vers x.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\boxed{x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}}$. *Par définition de la partie entière, on a*

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{donc} \quad 0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}.$$

Or, $\dfrac{1}{10^n} \to 0$ *donc par théorème d'encadrement, $(x - x_n)$ tend vers 0, donc* $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } x}$.
De plus, il est clair que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ donc en particulier, $\boxed{(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}$. *On a donc exhibé une suite de rationnels qui converge vers x.*

2. *Montrer qu'il existe une suite croissante de rationnels qui converge vers x.*

Reprenons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie précédemment. Montrons que $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$. *Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$x_n \leq x_{n+1} \iff 10\lfloor 10^n x \rfloor \leq \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $\lfloor 10^n x \rfloor$, on a : $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$ donc en multipliant par 10 :

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x.$$

Mais $\left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor$ est le plus grand entier relatif à être inférieur à $10^{n+1}x$ donc

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leq \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor, \text{ puis } x_n \leq x_{n+1}.$$

3. *Montrer qu'il existe une suite décroissante de rationnels qui converge vers x.*

Définissons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\boxed{y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}}$. *On a :* $\boxed{(y_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right) = x + 0 = x$ *i.e.* $\boxed{y_n \to x}$.
Il reste à montrer que (y_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$y_n \geq y_{n+1} \iff \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \geq \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1}{10^{n+1}} \iff 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10 \geq \left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor + 1 \qquad (*).$$

Par définition de $\lfloor 10^n x \rfloor$, on a : $10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, puis en multipliant par 10, il vient :

$$10^{n+1} x < 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10.$$

Or, $10\lfloor 10^n x \rfloor + 10 \in \mathbb{Z}$ et $\left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor + 1$ est le plus petit entier relatif à être strictement supérieur à $10^{n+1}x$ donc $\left\lfloor 10^{n+1} x \right\rfloor + 1 \leq 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10$. D'après l'équivalence $(*)$, on a donc $y_n \geq y_{n+1}$, ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{(y_n) \text{ est décroissante}}$.
<u>Remarque</u> : $\boxed{((x_n), (y_n)) \text{ est un couple de suites adjacentes}}$, *car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

est décroissante et $(x_n - y_n) \to 0$.

4. *Montrer qu'il existe une suite croissante d'irrationnels qui converge vers x.*

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = \underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} + \underbrace{\dfrac{\lfloor 10^n(x-\sqrt{2})\rfloor}{10^n}}_{\in \mathbb{Q}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2} + (x - \sqrt{2}) = x$, et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Sinon (sans imposer la croissance, $z_n = x_n + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, $z_n = x_n + \dfrac{\sqrt{2}}{10^n}$ tendent également vers x et sont des suites d'irrationnels.

Exercice 13. Caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Montrer les équivalences suivantes.

1. $s = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = s. \end{cases}$

2. $i = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} i \text{ est un minorant de } A \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = i. \end{cases}$

Correction.

1. *A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ existe.*

   - *Supposons que $s = \sup A$. s est donc le plus petit des majorants de A donc en particulier s est un majorant de A.*
     $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $s - \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $a_n \in A$ tel que $s - \dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq s$. On a donc construit une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, s - \dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq s$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(s - \dfrac{1}{n+1}\right) = s$ donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = s$.
   - *Supposons que s soit un majorant de A et qu'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = s$.*
     $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$ donc $a_n \leq \sup A$. Par passage à la limite, on trouve que $\underline{s \leq \sup A}$.
     s est un majorant de A et $\sup A$ est le plus petit donc $\underline{\sup A \leq s}$.
     Finalement, par antisymétrie, on conclut que $\boxed{s = \sup A}$.

2. *Dans la même veine.*

Exercice 14. Comparaison logarithmique. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs, telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. *On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.*
2. *On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Correction. *Pour les deux questions, la clé est donnée par la formule suivante, qu'on prouve par récurrence sur n :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0}.$$

Preuve 1. *La formule est en effet vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, en utilisant l'hypothèse, on déduit*

$$\frac{u_{n+1}}{u_0} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_0} = \frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

Preuve 2. *La condition donnée par l'énoncé entraîne que la suite (u_n/v_n) est décroissante.*

1. *Si (v_n) converge vers 0, alors on a $0 \leq u_n \leq v_n \dfrac{u_0}{v_0}$ et donc par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.*
2. *Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on a $\dfrac{v_0}{u_0} u_n \leq v_n$ et donc (v_n) tend vers $+\infty$.*

Exercice 15. Cas particulier du critère de d'Alembert.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction. *Puisque $|u_{n+1}/u_n| \to 0 < 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au delà duquel :*

$$\forall n \geq N,\ |u_{n+1}/u_n| \leq 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq N,\ |u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}.$$

On a alors par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq N,\ |u_n| \leq \frac{|u_N|}{2^{n-N}},$$

avec $\dfrac{|u_N|}{2^{n-N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *donc par théorème d'encadrement* $\boxed{u_n \to 0}$.

Exercice 16. Critère de d'Alembert. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. *Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
3. *Observer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.*

Correction.

1. **Preuve 1.** *Soit $\rho = \dfrac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.*
   Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$, il existe un rang N au delà duquel
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho.$$
   On a alors
   $$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\dots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N \leq \rho^{n-N}u_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Preuve 2. *On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, et minorée (par 0), donc convergente vers un réel $x \geq 0$.*
   Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 < 1$: contradiction, donc $x = 0$. Ainsi, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

2. **Preuve 1.** *Comme dans le cas précédent, sauf que $\forall n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \rho$ et $\forall n \geq N$, $u_n \geq \rho^{n-N}u_N \to +\infty$, donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.*
   Preuve 2. *Comme dans le cas précédent, sauf que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, donc tend vers $x \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Si $x \in \mathbb{R}$, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$, on a en passant à la limite, $x \geq u_0 > 0$ donc $x \in \mathbb{R}_+^*$. Mais alors, par opérations, on aurait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$: contradiction. Donc $x = +\infty$ i.e. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.*
   Preuve 3. *On utilise le cas précédent. On a $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \to \dfrac{1}{\ell} < 1$ i.e. $\dfrac{1/u_{n+1}}{1/u_n} \to \dfrac{1}{\ell} < 1$, avec $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. D'après le premier cas, $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.*

3. $\boxed{u_n = n,\ u_n = 1 \text{ et } u_n = 1/n}$ *sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.*

Exercice 17. Une forme vraiment indéterminée. *Soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $+\infty$, respectivement, telles que $u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Correction. *Déjà, on a $u_n^{v_n} = \exp(v_n \ln u_n)$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par continuité de $\ln$ en 1), on se retrouve avec la forme indéterminée « $0 \times +\infty$ » à l'intérieur de l'exponentielle, et on va pouvoir construire pour cette forme indéterminée différents exemples convergeant vers $-\infty$, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.*

Pour plus de commodité, on va construire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies uniquement sur $\mathbb{N}^*$. Si l'on tient absolument à donner des exemples définis sur $\mathbb{N}$, comme dans l'énoncé, il sera toujours possible de considérer nos suites, mais décalées, c'est-à-dire $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Distinguons trois cas.

1. *Si $\ell = 0$, posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(e^{-1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a*
$$v_n \ln u_n = n^2 \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$
donc
$$u_n^{v_n} = \exp\left(v_n \ln u_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. *Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(e^{\ln \ell/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\ell^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a*
$$u_n^{v_n} = \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

3. *Si $\ell = +\infty$, posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(e^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a*
$$v_n \ln u_n = n^2 \times \frac{1}{n} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
donc
$$u_n^{v_n} = \exp\left(v_n \ln u_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 18. Convergence presque monotone. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}.$$
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction. *Le point clef est de voir $\dfrac{1}{2^n} = S_{n+1} - S_n$ où*
$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Grâce à l'inégalité $a_{n+1} \geq a_n - \dfrac{1}{2^n}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} + S_{n+1} \geq a_n + S_n,$$

ce qui prouve que la suite $(S_n + a_n)_n$ est donc croissante.
De plus, par opérations, (S_n) converge donc est bornée, et par hypothèse, (a_n) est bornée, donc la suite somme $(S_n+a_n)_n$ est bornée. En particulier, $(S_n+a_n)_n$ est croissante et majorée, donc converge, d'après le théorème de la limite monotone.
La suite (a_n) est alors la différence de deux suites convergentes, donc converge.

Suites complexes

Exercice 19. *Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n})$.*
Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Introduisons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a, par unicité de l'écriture algébrique de $(z_{n+1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}.$$

Ainsi, (x_n) est constante égale à x_0 et (y_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ donc tend vers 0 d'où $\boxed{(z_n) \text{ converge vers } \mathrm{Re}(z_0)}$.

Exercice 20. *Étudier la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.*

Correction. Première résolution.

- *Si $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ alors $z_1 = z_0$ donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à z_0 donc $\boxed{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } z_0}$.*
- *Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$ alors $z_1 = 0$ puis donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle donc $\boxed{(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$.*
- *Supposons maintenant que $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En particulier, $z_0 \neq 0$ donc z_0 a une écriture exponentielle et on peut écrire $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. On a alors :*

$$z_1 = \rho\frac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2},$$

$$|z_1| = \rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \rho\cos\frac{\theta}{2},\ \text{car } \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\frac{1 + e^{i\theta/2}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}e^{i\theta/4}, \ldots$$

On conjecture, et on montre par récurrence (laissée au lecteur), que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \rho e^{i\theta/2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}} \quad (\text{également valable pour } n = 0)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{i\theta/2^n} = \cos(\theta/2^n) + i\sin(\theta/2^n)$ *et par continuité de* $\cos$ *et* $\sin$ *en 0, on en déduit que* $(e^{i\theta/2^n})$ *converge vers* $1 + i \times 0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Calculons le produit*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k},$$

par exploitations successives de la formule $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos a \sin a = \dfrac{\sin(2a)}{2}$.

Première méthode. *On obtient que :*

$$\sin\frac{\theta}{2^n}p_n = p_{n-1}\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}} = \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2}P_1 = \frac{\sin\theta}{2^n},$$

ou bien sans itérer, on remarque que la première égalité assure que la suite $(\sin\dfrac{\theta}{2^n}p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$, *donc* $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\dfrac{\theta}{2^n}p_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{\theta}{2^0}p_0 = \dfrac{1}{2^n}\sin\theta$.
Or, $-\pi < \theta < \pi$ *et* $2^n > 0$ *donc*

$$-\pi \leq \frac{-\pi}{2^n} < \frac{\theta}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} \leq \pi$$

donc $\sin\dfrac{\theta}{2^n} = 0 \iff \dfrac{\theta}{2^n} = 0 \iff \theta = 0$, *ce qui est exclu dans ce cas vu que* $z_0 \notin \mathbb{R}$. *Ainsi, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sin\dfrac{\theta}{2^n} \neq 0$ *et*

$$p_n = \frac{\frac{\sin\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} \sim \frac{\sin\theta}{2^n\frac{\theta}{2^n}} \sim \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Deuxième méthode. *Comme précédemment, on remarque que* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sin\dfrac{\theta}{2^k} \neq 0$, *et on utilise la formule de duplication du sinus pour écrire :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\theta}{2\times 2^k}}{2\sin\frac{\theta}{2^k}} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^k}} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^0}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}},$$

car le produit est télescopique.

Par opérations sur les limites, on conclut que $\boxed{(z_n) \text{ converge et que sa limite est } \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta}}$.

Conclusion, on constate que, dans tous les cas, $\boxed{\text{la suite complexe } (z_n) \text{ converge, vers une limite réelle positive}}$ *(dont la valeur dépend du premier terme).*
Deuxième résolution. *En notant pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ *et* $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$, *on a :*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{2}$, *donc* (y_n) *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et donc* $\boxed{(y_n) \text{ converge vers } 0}$.

- *Par IT, on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{n+1}| \leq \dfrac{|z_n| + |z_n|}{2} \leq |z_n|$, *donc la suite réelle* $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. Comme de plus, elle est minorée,* $(|z_n|)$ *converge, disons vers* $r \in \mathbb{R}_+$.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 = |z_n|^2 - y_n^2 \to r^2$ *donc par continuité de* $\sqrt{\cdot}$, *on a* $|x_n| \to r$, *mais attention on ne peut pas en déduire que* (x_n) *converge (pensez par exemple à* $(-1)^n$ *qui converge en module mais n'a pas de limite sans).* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + |z_n|}{2}$ *et* $|z_n| \geq x_n$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \geq x_n$, *ce qui prouve que* (x_n) *est croissante.*
  De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq |z_n|$, *et* $(|z_n|)$ *est majorée (vu qu'elle converge) donc* (x_n) *est majorée. D'après le théorème de la limite monotone,* $\boxed{(x_n) \text{ converge vers un réel}}$.

  Mieux : *on a* $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leq z$ *donc* $-\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + |z_n|}{2} \geq 0$, *d'où* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est positive. Puisque* $|x_n| \to r$, *on a donc aussi* $\boxed{x_n \to r}$.

- *Ainsi, la suite complexe* $\boxed{(z_n) \text{ converge vers un réel}}$, *mais on ne connait pas sa valeur avec cette méthode.*

Relations de comparaison

Exercice 21. Recherche d'équivalent. *Déterminer un équivalent simple des suites suivantes.*

1. $u_n = \dfrac{n - \ln(n) + 4/n}{e^n - n^2}$.
2. $u_n = \arccos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. $u_n = \dfrac{(n + 4\ln(n))^3}{(2n^2 + n + 1)^6}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n$.
5. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.
6. $z_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\ln(n+1)}} - 1$.
7. $u_n = \mathrm{ch}\left(\sqrt{n}\right)$.
8. $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}} - 1$.
9. $v_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.
10. $w_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$.
11. $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
12. $u_n = \dbinom{n}{p}$ *pour* $p \in \mathbb{N}$ *fixé.*
13. $u_n = \left(\dfrac{2n^5}{5n + 3n^5}\right)^n$.
14. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Correction.

1. *Soit N (resp. D) le numérateur (resp. dénominateur) de u_n. $N \sim n$ et $D \sim e^n$ donc* $\boxed{u_n \sim \dfrac{n}{e^n}}$*, d'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. $\dfrac{1}{n} \to 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ *donc **par composition**,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$ *d'où* $\boxed{u_n \sim \dfrac{\pi}{2}}$.

3. $n + 4\ln(n) \sim n$ *donc* $N \sim n^3$. $2n^2 + n + 1 \sim 2n^2$ *donc* $D \sim 2^6 n^{12}$ *puis* $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2^6 n^9}}$*, d'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}$. *Et puisque* $\dfrac{3}{n} \to 0$*, il s'ensuit que* $\ln\left(1 + \dfrac{3}{n}\right) \sim \dfrac{3}{n}$ *puis* $n\ln\left(1 + \dfrac{3}{n}\right) \sim 3$. *On en déduit donc que* $n\ln\left(1 + \dfrac{3}{n}\right) \to 3$ *et ainsi (**par continuité de la fonction exponentielle en 3**),* $u_n \to e^3 \neq 0$. *Par conséquent,* $\boxed{u_n \sim e^3}$.

5. *Pour tout* $n \geq 2$, $1 - \dfrac{1}{n} > 0$ *et* $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. *Cependant,* $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{n}$ *(car* $\dfrac{1}{n} \to 0$*). Donc* $n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim -1$. *En particulier,* $n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \to -1$ *et **par continuité de la fonction exp en -1**, on en déduit que* $u_n \to e^{-1}$. *Puisque* $e^{-1} \neq 0$*, on en déduit que* $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{e}}$.

6. *Comme* $\dfrac{1}{\ln(n+1)} \to 0$*, il s'ensuit que*

$$z_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(n+1)}} - 1 \sim \frac{1}{2\ln(n+1)}.$$

De plus, on sait que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ *(car* $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \to 1+0 = 1$*) et donc* $\boxed{z_n \sim \dfrac{1}{2\ln(n)}}$*. D'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0}$*.*

7. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
$$u_n = \operatorname{ch}\left(\sqrt{n}\right) = \frac{e^{\sqrt{n}} - e^{-\sqrt{n}}}{2} = \frac{e^{\sqrt{n}}}{2}\left(1 - e^{-2\sqrt{n}}\right).$$
Or $1 - e^{-2\sqrt{n}} \to 1$*, donc* $\boxed{u_n \sim \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{2}}$*. D'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$*.*
Sinon : $e^{-\sqrt{n}} = o(e^{\sqrt{n}})$ *donc* $\operatorname{ch}(\sqrt{n}) \sim \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{2}$*.*

8. *Puisque* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}} \to 0$*, on a* $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}} - 1 \sim \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n+2}} \sim \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ *donc* $\boxed{u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$*. D'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$*.*

9. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
$$v_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) = \sqrt{n+1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n+1}} - 1\right).$$
De plus, puisque $\dfrac{1}{n+1} \to 0$*, on a :* $\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}} - 1 \sim \dfrac{1}{2(n+1)}$ *puis* $v_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$*. Or,* $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$*, donc* $\boxed{v_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}}$*. Avec la quantité conjuguée, on aurait également eu que* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$*, mais l'équivalent est plus précis.*

10. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*
$$w_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)} = e^{1/n}\left(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}\right).$$
De plus, puisque $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \to 0$*, il s'ensuit que*
$$1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$*. Ainsi, puisque* $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$*, on a :* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$*. De plus,* $e^{1/n} \to 1$*, et donc* $e^{1/n} \sim 1$*. La règle sur les produits d'équivalents permet de conclure que :* $\boxed{w_n \sim \dfrac{1}{n^2}}$*.*

11. *On a* $\dfrac{1}{n} \to 0$*, donc, par équivalent usuel,* $\boxed{u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}}$*.*

12. *Pour* $n \geq p$, *on a :* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-p+1)}{p!} \sim \dfrac{n^p}{p!}$ *donc* $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^p}{p!}}$.

13. $u_n = \left(\dfrac{2n^5}{5n+3n^5}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{5}{3n^4}}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n e^{-n\ln\left(1+\frac{5}{3n^4}\right)}$. *Or,* $-n\ln\left(1+\dfrac{5}{3n^4}\right) \sim -\dfrac{5}{3n^3} \to 0$. *Ainsi, (**par composition de limite et par continuité de l'exponentielle en 0**),* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{5}{3n^4}\right)} = e^0 = 1$ *donc* $e^{-n\ln\left(1+\frac{5}{3n^4}\right)} \sim 1$. *En multipliant par* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, *il vient :* $\boxed{u_n \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$. *D'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

14. $\dfrac{1}{n} \to 0$ *donc **par continuité du cos en 0**,* $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 1$.
$\ln u \sim_1 u-1$ *donc* $u_n \sim \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$ *et et* $\cos x - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$ *donc* $\boxed{u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$. *D'où* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 22. Un équivalent peut servir à cela. *On suppose que* $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite. Montrer que la suite* $(nu_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *admet la même limite.*

Correction. *Supposons que* $nu_n \to L$ *avec* $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
Alors $n \sim n+1$.
Multiplions par u_{n+1}, *d'où* $nu_{n+1} \sim (n+1)u_{n+1}$.
Par hypothèse, on a $nu_n \to L$, *donc par décalage, on a* $(n+1)u_{n+1} \to L$.
Par conservation de la limite dans les équivalents, on a $\boxed{nu_{n+1} \to L}$.

Exercice 23. Recherche d'équivalent pour une suite implicite. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de limite* 0 *telle que* $(u_{n+1}+u_n) \sim \dfrac{1}{n}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $a_n = n\,(u_{n+1}+u_n)$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $a_n \leq 2nu_n \leq \dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$. *En déduire un équivalent de* u_n.

Correction. *Soit* $n \geq 2$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante donc* $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$ *puis en ajoutant* u_n *et en multipliant par* $n > 0$, *il vient :*

$$a_n \leq 2nu_n \leq n(u_n + u_{n-1}) = \frac{n}{n-1}a_{n-1}.$$

Par hypothèse, on a $a_n \to 1$, *donc* $a_{n-1} \to 1$ *et* $\dfrac{n}{n-1} \to 1$ *donc par produit* $\dfrac{n}{n-1}a_{n-1} \to 1$.
La suite $(2nu_n)$ *est encadrée par deux suites qui tendent vers 1, donc par théorème d'encadrement, on a* $2nu_n \to 1$ *d'où* $2nu_n \sim 1$ *ou encore* $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

Exercice 24. Négligeabilité. *Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité.*

1. n, n^2, $n\ln n$, $\sqrt{n}\ln n$, $\dfrac{n}{\ln n}$, $\dfrac{n^2}{\ln n}$.
2. $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{\ln n}{n}$, $\dfrac{\ln n}{n^2}$, $\dfrac{1}{\ln n}$, $\dfrac{1}{n\ln n}$.

Correction.

1. *Voici le classement :*

$$\boxed{\sqrt{n}\ln n << \frac{n}{\ln n} << n << n\ln n << \frac{n^2}{\ln n} << n^2},$$

où il faut comprendre que :

- $\sqrt{n}\ln n = o(\dfrac{n}{\ln n})$; *en effet, on a* $(\ln n)^2 = o(\dfrac{n}{\sqrt{n}})$, *par croissances comparées.*
- $\dfrac{n}{\ln n} = o(n)$; *en effet, on a* $n = o(1)$.
- $n = o(n\ln n)$; *en effet, on a* $1 = o(\ln n)$.
- $n\ln n = o(\dfrac{n^2}{\ln n})$; *en effet, on a* $(\ln n)^2 = o(\dfrac{n^2}{n})$, *par croissances comparées.*
- $\dfrac{n^2}{\ln n} = o(n^2)$; *en effet, on a* $\dfrac{1}{\ln n} = o(1)$.

2. *Voici le classement :*

$$\boxed{\frac{1}{n^2} << \frac{\ln n}{n^2} << \frac{1}{n\ln n} << \frac{1}{n} << \frac{\ln n}{n} << \frac{1}{\ln n}},$$

où il faut comprendre que :

- $\dfrac{1}{n^2} = o(\dfrac{\ln n}{n^2})$; *en effet,* $1 = o(\ln n)$.
- $\dfrac{\ln n}{n^2} = o(\dfrac{1}{n\ln n})$; *en effet,* $(\ln n)^2 = o(n)$.
- $(\dfrac{1}{n\ln n}) = o(\dfrac{1}{n})$; *en effet,* $(\dfrac{1}{\ln n}) = o(1)$
- $\dfrac{1}{n} = o(\dfrac{\ln n}{n})$; *en effet,* $1 = o(\ln n)$.
- $\dfrac{\ln n}{n} = o(\dfrac{1}{\ln n})$; *en effet, on a* $(\ln n)^2 = o(1)$.

Suites adjacentes

Exercice 25. Suites simultanément récurrentes. *On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_0 > a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.*

1. *Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq a_n$.* **Indication :** *on pourra utiliser une preuve directe.*
3. *Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. (a) *En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$, montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et en déduire que (a_n) et (b_n) sont convergentes et convergent vers le même réel.*
   (b) *En utilisant simplement la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, retrouver le résultat de convergence précédent.*

Correction.

1. *On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 0$ et $a_n > 0$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $b_n - a_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}})^2 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \geq a_n$. Comme c'est encore vrai pour $n = 0$ par hypothèse, on a bien montré la propriété voulue.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :*
   - $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq 0$ *donc* $\boxed{(b_n) \text{ décroît}}$.
   - *$a_n > 0$ donc $a_n \neq 0$, et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}} \geq 1$ (car $b_n \geq a_n$ et $\sqrt{\cdot}$ est croissante).*
     Comme $a_n > 0$, on en déduit que $a_{n+1} \geq a_n$ donc $\boxed{(a_n) \text{ croît}}$.
4. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 \leq \dfrac{1}{2}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}) \leq \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.*
   En itérant : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n - a_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0)$. Or, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ donc, par encadrement de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Ainsi, $\underline{((a_n), (b_n)) \text{ est un couple de suites adjacentes}}$. D'après le cours, <u>elles sont convergentes et convergent vers la même limite</u>.
   (b) *On a :*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$$
   donc (a_n) est croissante est majorée par b_0 donc $\underline{(a_n)\ CV}$.
   De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_0 donc $\underline{(b_n)\ CV}$. Notons a et b les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
   (a_{n+1}) est extraite de (a_n) donc elles convergent vers la même limite a. Idem pour (b_{n+1}).
   On a donc : $a = \sqrt{ab}$ et $b = \dfrac{a+b}{2}$. $b = \dfrac{a+b}{2}$ implique que $\underline{a = b}$ ((a_n) et (b_n) ont même limite).

Exercice 26. Théorème des segments emboîtés. *Démontrer le théorème suivant.*
Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides dont les longueurs tendent vers 0, alors l'ensemble* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *est un singleton.*

On pourra montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Par hypothèse, la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante donc :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

- *En particulier,* $a_{n+1} \in [a_n, b_n]$ *donc* (a_n) *est croissante.*
- *En particulier,* $b_{n+1} \in [a_n, b_n]$ *donc* (b_n) *est décroissante.*
- $b_n - a_n \to 0$ *par hypothèse.*

Ainsi, les suites (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes. Notons* ℓ *leur limite commune. Comme* (a_n) *est croissante et* (b_n) *est décroissante, on a, d'après le cours :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n.$$

Le réel ℓ *appartient à tous les segments* $[a_n, b_n]$*, donc il appartient à leur intersection. On a donc l'inclusion :*

$$\underline{\{\ell\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].}$$

Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$*. Alors :* $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$*. En passant à la limite, on obtient que* $\ell \leq x \leq \ell$ *i.e.* $x = \ell$ *ou encore* $x \in \{\ell\}$*. Ainsi,* $\underline{\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset \{\ell\}}$ *puis on a l'égalité :* $\boxed{\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}}$.

Exercice 27. Suites adjacentes et notion de série, irrationalité du réel e.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

1. *Montrer que $((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est un couple de suites adjacentes.*
2. *En notant e la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.*
3. *On suppose que $e \in \mathbb{Q}$. Puisque $e > u_1 = 1$, il existe donc $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e = \frac{p}{q}$.*
   En remarquant que $u_q < e < v_q$, obtenir une contradiction puis conclure.

Correction.

1. • *On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $\underline{(u_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$*
   • *On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \cdots = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc $\underline{(v_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$*
   • *On a $\underline{v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0.}$*

   Ainsi, $\boxed{((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) \text{ est un couple de suites adjacentes}}$.

2. *D'après le théorème des suites adjacentes, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une limite commune $e \in \mathbb{R}$, et*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq e \leq v_n. \qquad (\star)$$
   Reste à montrer qu'il ne peut pas y avoir égalité, en utilisant la stricte monotonie des suites. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} = e$. Comme (u_n) est strictement croissante, on a $\forall n > n_0,\ u_n > u_{n_0} = e$, ce qui contredit $(\star)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e$. On montre de la même façon que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < e$. On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < e < v_n}$.

3. *En application le résultat de la question 2. à $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient : $u_q < e < v_q$, ce qui se ré-écrit, en remplaçant par leurs valeurs :*
$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}.$$
   En multipliant par $q! \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + \frac{1}{q} \leq q!u_q + 1 \text{ car } q \in \mathbb{N}^*.$$
   Posons $N = q!u_q$. Alors $N \in \mathbb{N}$ (il suffit d'écrire : $N = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = q! + q! + \cdots + q + 1$) et on vient de voir que
$$N < \underbrace{p(q-1)!}_{\in\mathbb{N}} < N + 1.$$

Ainsi, $p(q-1)!$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde. Donc $\boxed{e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Suites extraites

Exercice 28. Suite harmonique alternée. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On pourra montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- $u_{2n+2}-u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0$ *donc $(u_{2n})_n$ est décroissante.*
- $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = -\dfrac{1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0$ *donc $(u_{2n+1})_n$ est croissante.*
- $u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+1} \to 0.$

Ainsi, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers la même limite.
D'après la première question, la suite (u_n) est donc convergente.

Exercice 29. Périodicité et convergence. *Montrer que toute suite périodique non constante diverge.*

Correction. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique non constante. Soit $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n$.*
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non constante, on peut trouver deux indices n_0 et n_1 tels que $u_{n_0} \neq u_{n_1}$.
Par une récurrence immédiate, on montre alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(u_{n_0+kT} = u_{n_0} \quad \text{et} \quad u_{n_1+kT} = u_{n_1}\right).$$

On définit alors les deux applications

$$\varphi_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & n_0 + kT \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & n_1 + kT, \end{array}$$

qui sont clairement des extractrices. D'après ce qui précède, les sous-suites $\left(u_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux constantes, mais prennent des valeurs différentes.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite. Par contraposée d'un résultat de cours, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$.

Exercice 30. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?*

On pourra étudier des extractions bien choisies de (u_n).

Correction. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{6n} = \sin\left(\frac{\pi}{3}6n\right) = \sin(2n\pi) = 0$ *et* $u_{6n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Donc* $\boxed{u_{6n} \to 0}$ *et* $\boxed{u_{6n+1} \to \frac{\sqrt{3}}{2}}$. *On a donc deux suites extraites de* (u_n) *qui ont deux limites distinctes. On en déduit que* $\boxed{(u_n) \text{ n'a pas de limite}}$.

Exercice 31. *On suppose que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle croissante telle que* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Première méthode. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant croissante, elle admet une limite (finie ou* $+\infty$*) d'après le TLM. La suite* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui en est extraite admet la même limite. Puisque* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, il en est de même pour* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Deuxième méthode. (u_n) *est croissante donc :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$. *Or, par hypothèse et en tant que suite extraite,* (u_{2n}) *et* (u_{2n+2}) *convergent vers* $\ell \in \mathbb{R}$. *Par théorème d'encadrement, on en déduit que* (u_{2n+1}) *tend également vers* ℓ. *Les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *ayant la même limite* ℓ, *on sait par théorème que* $\boxed{(u_n) \text{ converge aussi vers } \ell}$.

Exercice 32. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent. Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Correction. *Supposons que* $u_{2n} \to \ell$, $u_{2n+1} \to \ell'$ *et* $u_{3n} \to \ell''$.
(u_{6n}) *est extraite de* (u_{2n}) *et de* (u_{3n}) *donc elle converge vers* ℓ *et* ℓ''. *Par unicité de la limite,* $\ell'' = \ell$.
(u_{6n+3}) *est extraite de* (u_{2n+1}) *et de* (u_{3n}) *donc elle converge vers* ℓ' *et* ℓ''. *Par unicité de la limite,* $\ell'' = \ell'$.

$$\text{En effet,} \quad u_{6n} = u_{2(3n)} = u_{3(2n)} \qquad \text{et} \qquad u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = u_{2(3n+1)+1}.$$

Ainsi, $\ell = \ell' = \ell''$. *Comme* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* ℓ, *on sait par théorème que* $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell}$.

Exercice 33. Suite harmonique. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $\quad a_n = H_n - \ln(n+1)$ *et* $\quad b_n = H_n - \ln(n)$.

1. *Montrer que* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *tend vers* $+\infty$. **Indication :** *on pourra montrer* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$ *donc* (H_n) *est croissante. Ainsi,* (H_n) *a pour limite* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Raisonnons par l'absurde. Si* (H_n) *CV vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *alors sa suite extraite* (H_{2n}) *CV aussi vers* ℓ. *Puis, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :* $0 \geq \frac{1}{2}$, *ce qui est absurde. Ainsi,* $\boxed{H_n \to +\infty}$, *on en déduit qu'elle n'est donc pas majorée et donc* $\boxed{(H_n)\ DV}$.

2. (a) *Montrer que :* $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.

   (b) *En déduire que :* $\forall x \in]-\infty,1[,\ x \leq \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

   (c) *Déduire des deux inégalités précédentes que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

   (d) *En déduire que les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes. On note* γ *(la constante d'Euler) leur limite commune.*

Correction.

(a) *On sait que* $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln y \leq y-1$.
Soit $x \in]-1,+\infty[$. *Alors* $1+x \in \mathbb{R}_+^*$ *et d'après ce qui précède,* $\ln(1+x) \leq (1+x)-1 = x$.
pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(b) *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x < 1$, *alors* $-x > -1$. *Avec l'inégalité précédente, on en déduit donc que* $\ln(1-x) \leq -x$ *ou encore que* $x \leq -\ln(1-x)$. *Ainsi, on obtient bien que* $\boxed{\forall x < 1,\ x \leq \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}$.

(c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \dfrac{1}{n+1} < 1$ *donc, en utilisant la première inégalité, on a* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$ *et en utilisant la seconde,* $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)$, *c'est-à-dire,*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$

(d) *En utilisant les deux inégalités précédentes, on a :*

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}-a_n = H_{n+1}-H_n-\ln(n+2)+\ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \geq 0$, *donc la suite* (a_n) *est croissante.*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}-b_n = H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq 0$, *donc la suite* (b_n) *est décroissante.*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n = \ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to 0$.

On en déduit donc que les suites $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$ *et convergent vers* γ *la constante d'Euler.*
Remarque. *On retiendra que* $H_n \to +\infty$.
On pourra retenir que : $H_n - \ln(n) \to \gamma$ *donc* $H_n - \ln(n) - \gamma \to 0$ *donc* $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$ *d'où*

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}.$$

Exercice 34. Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n,\ u_k < u_n\}$.

1. *Montrer que si E est infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite décroissante.*
2. *Montrer que si E est fini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite croissante.*
3. *Déduire de ce qui précède une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Correction.

1. *Si E est infini, notons*
$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$
la suite des éléments de E, rangés par ordre croissant.
Comme $\forall \ell \in \mathbb{N},\ n_\ell \in E$, l'inégalité $n_{\ell+1} > n_\ell$ implique $u_{n_{\ell+1}} < u_{n_\ell}$. La sous-suite $(u_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ est alors (strictement) décroissante.

2. *Si E est fini, il est majoré. On peut donc considérer un entier n_0 strictement plus grand que tous les éléments de E.*
En particulier $n_0 \notin E$. On peut donc trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} \geq u_{n_0}$.
L'entier n_1 est alors lui-même strictement plus grand que tous les éléments de E, donc $n_1 \notin E$. On peut donc trouver un entier $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \geq u_{n_1}$.
De proche en proche, on construit ainsi par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{n_{\ell+1}} \geq u_{n_\ell}$. Autrement dit, la suite $(u_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite croissante.

3. *Considérons désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle bornée.*
Il s'agit de montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.
On déduit des deux questions précédentes, que E soit fini ou non, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite monotone. Cette sous-suite est alors bornée et monotone, et d'après le théorème de la limite monotone, elle converge, ce qui prouve le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Cesàro

Exercice 35. Théorème de Cesàro généralisé. *Démontrer le théorème suivant.*
Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ et $(\beta_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k = +\infty$. Alors la suite $\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Preuve *: pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $C_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k u_k$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \ell$.*

Soit $\varepsilon > 0$.

On peut ré-écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n - \ell = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k(u_k - \ell)$ donc par IT,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |C_n - \ell| \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}\sum_{k=0}^{n}\beta_k|u_k - \ell|.$$

Par hypothèse, $u_n \to \ell$ et $\varepsilon/2 > 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0,\ |C_n - \ell| &\leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}\sum_{k=0}^{n_0-1}\beta_k|u_k - \ell| + \underbrace{\frac{\sum_{k=n_0}^{n}\beta_k}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k}}_{\leq 1}\times\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{cste}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

De plus, $\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k \to +\infty$ donc $\frac{cste}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k} \to 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \frac{cste}{\sum_{k=0}^{n}\beta_k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on obtient $|C_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \ell}$.

Remarques. *Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\beta_k = 1$, alors on obtient $\boxed{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$, dont on déduit :*

- $\boxed{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$ *car* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k = \frac{n+1}{n}\times\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k \to 1\times\ell = \ell$
- $\boxed{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$ *car* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k = \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}u_k - u_n\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k - \frac{u_n}{n} \to \ell - \ell\times 0 = \ell$
- $\boxed{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$ *car* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k = \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}u_k - u_0\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k - \frac{u_0}{n} \to \ell - 0 = \ell$
- **Théorème de Cesàro (classique).** *On retiendra que si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors : les suites $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent encore vers ℓ.*

- **Attention : la réciproque est fausse.** *Contre-exemple : en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{1}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$ donc $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

Exercice 36. Autour du théorème de Cesàro. *Les questions 1., 2., et 3. sont indépendantes.*

1. *Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.*

   (a) *Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.*

   Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$. Par télescopage, on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) + u_0}{n}.$$

   D'une part, en appliquant le théorème de Cesàro à la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

   D'autre part, $\frac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On conclut par somme de suites convergentes.

   (b) *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+2} - u_n) = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \frac{\ell}{2}$.*

   Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+2} - u_n) = \ell$.
   Par propriétés des suites extraites, on a en particulier, $u_{2n+2} - u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+3} - u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. En notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_{2n}$ et $i_n = u_{2n+1}$, on a que $p_{n+1} - p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $i_{n+1} - i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
   D'après la question (a), on a donc $\frac{p_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\frac{i_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ i.e. $\frac{u_{2n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\frac{u_{2n+1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $\frac{u_{2n}}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{2}$ et $\frac{u_{2n+1}}{2n+1} = \frac{u_{2n+1}}{n} \times \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{2}$.
   On en déduit que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{2}$, ce qui prouve l'implication souhaitée.

   (c) *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = \ell$.*

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_n)^{1/n} = e^{\frac{\ln(u_n)}{n}}$.
   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell),$$

par continuité du $\ln$ *en* ℓ.
D'après la question (a), on a donc $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$.
Ainsi, par continuité de l'exponentielle en $\ln(\ell)$*, on obtient :* $(u_n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(\ell)} = \ell$.

2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe convergente.*
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par pour tout* $n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dbinom{n}{0}u_0 + \dbinom{n}{1}u_1 + \cdots + \dbinom{n}{n}u_n\right)$.
Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notons $\ell \in \mathbb{C}$ *la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Par définition, on a :*

$$v_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \beta_k} \sum_{k=0}^n \beta_k u_k \to \ell,$$

d'après le théorème de Cesàro généralisé, car $\displaystyle\sum_{k=0}^n \beta_k = 2^n \to +\infty$.

3. *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites complexes convergentes.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $z_n = \dfrac{1}{n}(x_1y_n + \cdots + x_ny_1)$*. Déterminer la limite de la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On conjecture que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = xy$.

$$\begin{aligned}
|z_n - xy| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k y_{n-k+1} - xy)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left[(x_k - x)y_{n-k+1} + x(y_{n-k+1} - y)\right]\right| \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(|x_k - x||y_{n-k+1}| + |x||y_{n-k+1} - y|\right) \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\le \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |x_k - x|}_{\to 0 \text{ par Cesàro}} M + |x| \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n |y_\ell - y|}_{\to 0 \text{ par Cesàro}}, \ ((y_n) \text{ CV donc est bornée, disons par } M)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = xy}$.

Exercice 37. Une étude de suite récurrente non linéaire. *On admet que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.
On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par récurrence par* $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. *Déterminons un équivalent de* u_n.
   (a) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

   On pourra utiliser des équivalents.

   (b) *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{u_{k+1}^2} - \dfrac{1}{u_k^2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

   On pourra penser au théorème de Cesàro.

   (c) *Déterminer un équivalent simple de* $\dfrac{1}{nu_n^2}$ *puis de* u_n.

Correction.
Étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par récurrence par* $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Posons* $D = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   - *Remarquons que la fonction* $\sin$ *est définie sur* D*, que* D *est stable par* $\sin$ *et que* $\sin$ *est croissante sur* D *donc on sait qu'on est dans le cas favorable où* (u_n) *est monotone. Montrons-le !*
   - *Notons* g *la fonction définie sur* D *par* $g : x \mapsto \sin(x) - x$. g *est dérivable sur* D *et* $\forall x \in D,\ g'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ *donc* g *est strictement décroissante sur l'intervalle* D*. Comme* $g(0) = 0$*,* g *est négative sur* D*. Ainsi,*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = g(u_n) < 0,$$
   donc (u_n) *est strictement décroissante. Comme, de plus,* (u_n) *est minorée par 0, on en déduit que* $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$*. Notons* $\ell \in \mathbb{R}$ *sa limite.*
   - *D'une part, la fonction* $\sin$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc en particulier en* ℓ *et* (u_n) *tend vers* ℓ *donc* $(\sin(u_n))$ *tend vers* $\sin(\ell)$*, i.e.* (u_{n+1}) *tend vers* $\sin(\ell)$.
   D'autre part, en tant que suite extraite de (u_n)*, la suite* (u_{n+1}) *tend vers* ℓ.
   Par unicité de la limite de (u_{n+1})*, on a* $\sin(\ell) = \ell$*, i.e.* $g(\ell) = 0$*. Or,* g *ne s'annule qu'en 0, donc* $\boxed{\ell = 0}$.

   On a donc montré que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

3. (a)
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n + u_{n+1})(u_n - u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n + \sin u_n)(u_n - \sin u_n)}{u_n^2 (\sin u_n)^2}.$$
- *Puisque $u_n \to 0$, on a les équivalents usuels :* $\boxed{\sin u_n \sim u_n}$ *et* $\boxed{u_n - \sin u_n \sim \frac{1}{6} u_n^3}$.
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc*
$$\frac{u_n + \sin u_n}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin u_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
par opérations sur les limites. Donc $\boxed{u_n + \sin u_n \sim 2u_n}$.
- *Ainsi,*
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{2u_n \times \frac{u_n^3}{6}}{u_n^4} \sim \frac{1}{3}.$$

(b) *On a* $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$, *donc d'après le théorème de Cesàro :* $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}}$.

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme* $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)$ *est télescopique, égale à* $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$. *On déduit alors de la question précédente que*
$$\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$
Or, $\frac{1}{nu_0^2} \to 0$, *donc par somme :*
$$\boxed{\frac{1}{nu_n^2} = \left(\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2}\right) + \frac{1}{nu_0^2} \longrightarrow \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}}.$$
Ainsi,
$$\boxed{\frac{1}{nu_n^2} \sim \frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Suites implicites

Exercice 38. Une suite implicite.

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions réelles que l'on note x_n et y_n avec $x_n < 0 < y_n$.*

   Soit $n \geq 2$. Posons $f_n : x \mapsto e^x - x - n$. Alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n' : x \mapsto e^x - 1$.

   - *f_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur*

     $$f_n(]-\infty,0]) = [f_n(0), \lim_{x\to-\infty} f_n(x)[= [1-n, +\infty[.$$

     Or, $1 - n \leq -1 < 0$ donc $0 \in f_n(]-\infty,0])$ puis : $\exists! x_n \in]-\infty,0],\ f_n(x_n) = 0$. Mais $f_n(0) = 1 - n \neq 0$ donc $x_n \in]-\infty, 0[$ est tel que $e^{x_n} = x_n + n$.
   - *f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n induit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f_n(]0,+\infty[) =]f_n(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [1-n, +\infty[$.*
     Or, $0 \in f_n(]0,+\infty[)$ donc : $\exists! y_n \in]0,+\infty[,\ f_n(y_n) = 0$ i.e. $e^{y_n} = y_n + n$.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto e^x - x - n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \leq f_n$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) - f_{n+1}(x) = 1 \geq 0$ donc $f_n \geq f_{n+1}$ i.e. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. *En déduire que les suites $(x_n)_{n\geq 2}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ sont monotones.*

   Soit $n \geq 2$.

   - *On a : $f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et f_{n+1} est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ donc $x_n \geq x_{n+1}$ (sinon ...). Ainsi, $\boxed{(x_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$*
   - *On a : $f_n(y_n) = f_{n+1}(y_{n+1}) \leq f_n(y_{n+1})$ et f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $y_n \leq y_{n+1}$ (sinon ...). Ainsi, $\boxed{(y_n)_{n\geq 2} \text{ est croissante.}}$*

4. *Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ n'est pas minorée et que $(y_n)_{n\geq 2}$ n'est pas majorée. Que peut-on conclure ?*

   - *Par l'absurde. Supposons $(x_n)_{n\geq 2}$ minorée. Alors elle serait décroissante et minorée et convergerait vers $x \in \mathbb{R}$ (Théorème de la limite monotone).*
     On a, par définition de $(x_n)_{n\geq 2}$: $\forall n \geq 2,\ e^{x_n} = x_n + n$ donc

     $$\forall n \geq 2,\ x_n = e^{x_n} - n.$$

     Par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ (donc en x), on a $e^{x_n} \to e^x$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $x = -\infty$, ce qui est absurde vu que $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{(x_n) \text{ n'est pas minorée.}}$
   - *Idem avec (y_n).*

- *$(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante non minorée donc* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty}$.
- *$(y_n)_{n\geq 2}$ est croissante non majorée donc* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty}$.

Exercice 39. Une suite implicite, bis. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit* $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 + nx - 1. \end{array}$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.*
3. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis que sa limite est 0.*

Dans la deuxième question, on pourra calculer la fonction $f_{n+1} - f_n$.
Dans la troisième, on pourra commencer par montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}_+$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Correction.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable par opérations, de dérivée*

$$f_n' : x \mapsto 5x^4 + n.$$

En particulier, f_n' est strictement positive.

Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$, on a

$$f_n(x) = x^5 \underbrace{\left(1 + \frac{n}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0}.$$

Ainsi, la fonction f_n est continue (par opérations), strictement croissante (car $f_n' > 0$) et vérifie $f_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, on en déduit que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

En particulier, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution, à savoir $u_n = f_n^{-1}(0)$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
   - *Commençons par remarquer que $f_n(0) = -1$, c'est-à-dire $f_n^{-1}(-1) = 0$. Comme la réciproque d'une bijection strictement croissante est strictement croissante, on en déduit que $u_n = f_n^{-1}(0) > f_n^{-1}(-1) = 0$.*
   - *On a donc*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \\ &= u_n && \text{(car } f_{n+1} - f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\text{)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

On a donc $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
En appliquant la fonction (strictement croissante) f_{n+1}^{-1}, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$.
Cela montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3. *Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite minorée (par 0) et décroissante, le théorème de la limite monotone garantit que l'on peut trouver $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

   Par construction, on a par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_n) = 0$, ce que l'on peut réécrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n\,u_n = 1 - u_n^5.$$

   Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. On aurait alors

$$n\,u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad 1 - u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \ell^5,$$

   ce qui constitue une contradiction.

   On en déduit donc que $\ell = 0$, c'est-à-dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Remarque. *On peut avoir directement la convergence vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

   - *On sait déjà que $u_n \geq 0$.*
   - *Par ailleurs, $f_n(u_n) = 0$ se réécrit $u_n^5 + n\,u_n = 1$.*
     Comme $u_n \geq 0$, on a donc $1 = u_n^5 + n\,u_n \geq n\,u_n$. En multipliant cette inégalité par $\frac{1}{n} > 0$, on en déduit $u_n \leq \frac{1}{n}$.

   Cela prouve l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

   On a clairement $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème des gendarmes, l'encadrement précédent montre donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Suites récurrentes linéaires

Exercice 40. *1. Exprimer le terme général et déterminer la limite de la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$, où λ est un réel fixé.*

- *Si $\lambda = 1$, alors (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ donc* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr = 2 + 3n}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.
- *Si $\lambda \neq 1$, alors (u_n) est arithmético-géométrique.*
  Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lambda\ell + 3$, ce qui équivaut à $\ell = \dfrac{3}{1-\lambda}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - \ell$.
  On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = \lambda u_n + 3 - (\lambda\ell + 3) = \lambda(u_n - \ell) = \lambda v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison λ et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell = \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \lambda^n$
  donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}\lambda^n + \dfrac{3}{1-\lambda}}$.
  - *Si $\lambda \leq -1$, alors (λ^n) n'a pas de limite et comme $\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} \neq 0$ (car sinon, $\lambda = -\dfrac{1}{2} > -1$), (u_n) non plus.*
  - *Si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\lambda^n \to 0$ donc $u_n \to \ell = \dfrac{3}{1-\lambda}$.*
  - *Si $\lambda > 1$, alors $\lambda^n \to +\infty$ et puisque $\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} > 0$, on a $u_n \to +\infty$.*

Conclusion : (u_n) converge ssi $\lambda > -1$ et dans ce cas $\lim u_n = \begin{cases} \ell \text{ si } |\lambda| < 1 \\ +\infty \text{ si } \lambda > 1 \end{cases}$

2. Exprimer le terme général de la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$.
3 est racine double donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec comme conditions initiales $u_0 = \alpha = -1$ et $u_1 = (\alpha + \beta)3 = 1$ i.e. $\alpha = -1$ et $\beta = \dfrac{4}{3}$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-1 + \dfrac{4n}{3}\right)3^n = (4n-3)3^{n-1}}$ *(OK pour $n = 0$).*

Exercice 41. Suite de Fibonacci. *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :* $\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer F_n en fonction de n.

$P = X^2 - X - 1$. $\Delta = 5$. P a 2 racines $\boxed{r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$ *et* $\boxed{r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ (nombre d'or)}}$.
$\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

Les conditions initiales permettent de trouver que $\beta = -\alpha$ *et* $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Ainsi,* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[r_2^n - r_1^n]}$.

Exercice 42. *Déterminer la formule explicite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Correction. *Le polynôme caractéristique* $X^2 - 2X + 2$ *a pour racines* $1 \pm i$, *que l'on peut mettre sous forme exponentielle :* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ *et* $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. *On sait alors qu'on peut trouver deux réels* U *et* V *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n \left(U \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + V \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Grâce aux conditions initiales, on obtient le système $\begin{cases} U & = 2 \\ U + V & = 1 \end{cases}$, *dont l'unique solution est* $(U, V) = (2, -1)$. *On en déduit que*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2}^n \left(2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)}.$$

Exercice 43. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u = 1, \quad u_2 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+3} - 8u_{n+2} + 5u_{n+1} - u_n = 0 \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* u_n *en fonction de* n.

Correction. (u_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre 3, et de polynôme caractéristique* $P = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$. *On remarque que* 1 *est racine évidente de* P *donc* P *se factorise en*

$$P = (X - 1)(4X^2 - 4X + 1) = (X - 1)(2X - 1)^2.$$

Ainsi, 1 *est racine simple de* P *et* $1/2$ *est racine double de* P.
En mimant le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on pourrait chercher un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\forall n \in \{0, 1, 2\},\ u_n = \alpha 1^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n + \gamma n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *et espérer que ce triplet convienne pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *c'est-à-dire* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha 1^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n + \gamma n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Après calculs à l'aide des conditions initiales, on trouve $\boxed{\alpha = 4}$, $\boxed{\beta = -4}$ *et* $\boxed{\gamma = -2}$.
Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha 1^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n + \gamma n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^2 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ *et montrons que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$ *par récurrence triple. Faites-la seul, c'est un bon test sur les récurrences et un bon entraînement de calcul (essayez d'avoir une stratégie de calcul...).*

Par construction de (α, β, γ) on a bien $u_0 = v_0$, $u_1 = v_2$ et $u_2 = v_2$ d'où l'initialisation.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$, $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = v_{n+2}$. Montrons que $u_{n+3} = v_{n+3}$ ou plutôt que $4u_{n+3} = 4v_{n+3}$.
D'une part, $v_{n+3} = 2^2 - \dfrac{n+5}{2^{n+2}}$ donc $4v_{n+3} = 4 \times 2^2 - \dfrac{n+5}{2^n}$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} 4u_{n+3} &= 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n && \text{par définition de } (u_n) \\ &= 8v_{n+2} - 5v_{n+1} + v_n && \text{par HR.} \end{aligned}$$

Or,

$$v_n = 2^2 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, \quad v_{n+1} = 2^2 - \frac{n+3}{2^n} \quad \text{et} \quad v_{n+2} = 2^2 - \frac{n+4}{2^{n+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} 4u_{n+3} &= (8-5+1) \times 2^2 - \frac{2^3(n+4)}{2^{n+1}} + \frac{5(n+3)}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n-1}} \\ &= 4 \times 2^2 - \frac{1}{2^n}\left[4(n+4) - 5(n+3) + 2(n+2)\right] \\ &= 4 \times 2^2 - \frac{1}{2^n}(n+5) \\ &= 4v_{n+3}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = 2^2 - \dfrac{n+2}{2^{n-1}}}$.

Remarque. *Notons E l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 3 vérifiant la même relation de récurrence que (u_n). On pourrait montrer, comme dans le cours que :*

- *si r est racine de P, alors (r^n) est dans E ;*
- *si r est racine double de P, alors (nr^n) est dans E ;*
- *E est stable par combinaisons linéaires ;*
- *deux suites de E qui coïncident sur leurs 3 premiers termes sont égales.*

On pourrait ainsi retrouver que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

SUITES RÉCURRENTES DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 44. *Considérons la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.*

Indication : *on peut parfois démontrer directement la convergence d'une suite récurrente vers un des points fixes ℓ de la fonction f. Il s'agit de démontrer directement que $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à une inégalité sur la fonction f du type « $\exists k \in]0,1[:\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ ».*

Posons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{2+x} \end{array}$.

- *Si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite extraite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Or, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f(u_n) \to f(\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on obtient $\ell = f(\ell)$ i.e. ℓ est un point fixe de f.*
  De plus, une récurrence immédiate, montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc PPL : $\ell \geq 0$.
  On observe que l'unique point fixe positif de f est $\ell = \sqrt{2}-1$ ($\Delta = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $r = -1 \pm \sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2} < 0$). Ainsi, en cas de convergence, (u_n) converge vers $\ell = \sqrt{2}-1$.

- *Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :*

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y}\right| = \left|\frac{(2+y)-(2+x)}{(2+x)(2+y)}\right| = \frac{|x-y|}{(2+x)(2+y)} \leq \frac{|x-y|}{4}.$$

- *Sachant que $f(\ell) = \ell$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq \frac{|u_{n-1}-\ell|}{4}.$$

  Par une récurrence immédiate, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq 4^{-n}|u_0 - \ell|$. Or, $4^{-n}|u_0-\ell| \to 0$, donc par encadrement, $\boxed{(u_n)\ CV\ vers\ \ell}$.

Exercice 45. *Étudier la suite définie par* $\begin{cases} u_0 \geq -\dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3} \end{cases}$.

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ (définie à partir du rang 1). Alors $u_1 \geq 0$ et une récurrence immédiate montrerait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$.
Posons $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que composée de fonctions croissantes), on sait qu'on est dans le cas favorable où la suite (u_n) est monotone donc (u_n) a une limite (finie ou $+\infty$). Montrons le !

1. *Commençons par tracer la fonction f pour conjecturer le comportement de la suite (u_n) (voir brouillon).*

2. *Trouvons la limite potentielle de (u_n) :*
   Supposons que (u_n) CV vers un réel ℓ. Alors $\ell \geq 0$. De plus, la suite extraite (u_{n+1}) convergerait aussi vers ℓ et en même temps, $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$ car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par unicité

de la limite $f(\ell)=\ell$ donc ℓ est un point fixe, positif, de f. Or, pour $x\in\mathbb{R}_+$,

$$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Donc $\boxed{\text{si } (u_n) \text{ converge, ce sera vers 3}}$.

3. *Étude du signe de $x\mapsto f(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+$: soit $x\in\mathbb{R}_+$,*

$$f(x)>x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}>x \Leftrightarrow 2x+3>x^2 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0 \Leftrightarrow x\in[0,3[.$$

De même :

$$f(x)<x \Leftrightarrow x>3.$$

4. *Étude de la suite (u_n) :*

1er cas *Si $u_1\in I_1:=[0,3[$:*
f est strictement croissante sur $[0,3[$ et $f(3)=3$ donc I_1 est stable par f. $u_1\in I_1$ donc par récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in I_1$.
Or, $\forall x\in I_1$, $f(x)>x$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, f(u_n)>u_n \Leftrightarrow u_{n+1}\geq u_n$ donc (u_n) est strictement croissante.
$\boxed{(u_n) \text{ est une suite réelle, croissante et majorée (par 12) donc } (u_n) \text{ converge, vers 3}}$.

2ème cas *Si $u_1=3$, alors (u_n) est constante égale à 3 donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers 3}}$.*

3ème cas *Si $u_1\in I_2:=]3,+\infty[$:*
f est strictement croissante sur $]3,+\infty[$ et $f(3)=3$ donc I_2 est stable par f. Or, $u_1\in I_2$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in I_2$.
Or, $\forall x\in I_2$, $f(x)<x$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=f(u_n)<u_n$ d'où (u_n) est strictement décroissante.
$\boxed{(u_n) \text{ est une suite réelle, décroissante et minorée (par -12) donc } (u_n) \text{ converge, vers 3}}$.

$\boxed{\text{Finalement, dans tous les cas, } (u_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers 3}}$.

Exercice 46. *Étudier la suite définie par* $\begin{cases} u_0\in\mathbb{R}_+^* \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{5}{u_n^2} \end{cases}$.

Correction.

1. **Cadre.** *$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f:x\mapsto\dfrac{5}{x^2}$. Par récurrence immédiate, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$ donc (u_n) est bien définie.*
f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on va étudier les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (on va notamment montrer qu'elles sont monotones, de monotonie contraire, et déterminer leurs limites).
Posons $\varphi=f\circ f$. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x)=f(f(x))=\frac{5}{f(x)^2}=\frac{x^4}{5}.$$

φ est également définie en 0, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que composée de deux fonctions strictement décroissantes) et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2(n+1)}=\varphi(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1}=\varphi(u_{2n+1})$.

2. **Limites réelles potentielles ?** *Comme φ est continue, si (u_{2n}) converge alors sa limite est un point fixe de φ. De même pour (u_{2n+1}). Déterminons donc les points fixes positifs de φ. Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$. On a :*
$$\varphi(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{\ell^4}{5} = \ell \Leftrightarrow \ell^4 - 5\ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\ell^3 - 5) = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ ou } \ell = \sqrt[3]{5}).$$
De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(x) > x \Leftrightarrow \frac{x^4}{5} > x \Leftrightarrow x^4 - 5x > 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 5) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{5}.$$
On déduit des deux équivalences précédentes que :
$$\varphi(x) < x \Leftrightarrow x \in]0, \sqrt[3]{5}[.$$
Sinon : *on détermine les limites réelles potentielles de (u_n) qui sont soit 0, soit un point fixe strictement positif de f par continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (i.e. $\sqrt[3]{5}$).*

3. **Étude.** *Notons $I_1 :=]0, \sqrt[3]{5}[$ et $I_2 :=]\sqrt[3]{5}, +\infty[$, et distinguons les cas.*

   1er cas : $u_0 \in I_1$.
   φ est strictement croissante sur I_1, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5}$, donc $\forall x \in I_1$, $\varphi(x) \in I_1$ i.e. I_1 est stable par φ. Comme $u_0 \in I_1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in I_1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(u_{2n}) < u_{2n}$ d'où (u_{2n}) est une suite réelle, décroissante et minorée (par 0), donc d'après le TLM (u_{2n}) converge, et d'après l'étude précédente, sa limite est 0 ou $\sqrt[3]{5}$.
   (u_{2n}) étant décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_0 < \sqrt[3]{5}$ donc PPL on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \leq u_0 < \sqrt[3]{5}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$. De plus, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = f(u_{2n}) = \frac{5}{u_{2n}^2} \to +\infty.$$
   Ainsi, $u_{2n} \to 0$ et $u_{2n+1} \to +\infty$. On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ n'a pas de limite}}$.

   2ème cas : *si $u_0 = \sqrt[3]{5}$ alors comme $\sqrt[3]{5}$ est aussi un point fixe pour f, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[3]{5}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est constante égale à } \sqrt[3]{5} \text{ donc } (u_n) \text{ converge vers } \sqrt[3]{5}}$.*

   3ème cas : $u_0 \in I_2$.
   1ère méthode : *En appliquant f qui est strictement décroissante et vérifie $f(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5}$, on a $u_1 \in I_1$. Or, I_1 est stable par φ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \in I_1$. Comme dans le premier cas, on montre que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée (par 0) donc converge vers 0 ou $\sqrt[3]{5}$ et en fait vers 0 (car $\forall n$, $u_{2n+1} \leq u_1 < \sqrt[3]{5}$).*
   Par ailleurs,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = \frac{5}{u_{2n+1}^2} \to +\infty$$
   donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
   Ainsi, $u_{2n} \to +\infty$ et $u_{2n+1} \to 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'a pas de limite}}$.
   2ème méthode : *en utilisant la stricte croissance de φ, on montre que I_2 est stable par φ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in I_2$. D'après l'étude préliminaire, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} > u_{2n}$, ce qui prouve que (u_{2n}) est strictement croissante. D'après le TLM, on sait alors que (u_{2n})*

converge ou $u_{2n} \to +\infty$. Excluons le premier cas en raisonnant par l'absurde.
Supposons que (u_{2n}) converge vers ℓ.
La croissance de (u_{2n}) implique que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \geq u_0$. PPL, on obtient : $\ell \geq u_0 > \sqrt[3]{5}$, ce qui est absurde vu que $\ell \in \{0, \sqrt[3]{5}\}$.
Donc $\underline{u_{2n} \to +\infty}$.
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = f(u_{2n}) = \dfrac{5}{u_{2n}^2} \to 0 \neq +\infty$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ n'a pas de limite}}$.

En conclusion, $\boxed{(u_n) \text{ diverge tout le temps sauf si } u_0 = \sqrt[3]{5} \text{ (dans ce cas, } (u_n) \text{ est constante)}}$.